

# Jacobi 椭圆函数展开解的可视化

郑 强 岳 萍 龚伦训<sup>†</sup>

(贵州师范大学理学院, 贵阳 550001)

(2004 年 9 月 30 日收到, 2004 年 11 月 10 日收到修改稿)

作出了 Jacobi 椭圆正弦函数  $\text{sn}(x, k)$  的图像, 通过图像展示了它的一些性质, 并作出了 KdV 方程 Jacobi 椭圆函数展开解在两种参数下的图像.

关键词: Jacobi 椭圆函数, Jacobi 椭圆函数展开法, KdV 方程, 可视化

PACC: 0340K, 0290

## 1. 引 言

求非线性方程的精确解在非线性问题中有很重要的作用. 近年来, 人们对求解非线性发展方程提出了很多方法, 如齐次平衡法<sup>[1]</sup>, 逆散射变换法<sup>[2]</sup>, Backlund 变换法<sup>[3]</sup>, 分离变量法<sup>[4]</sup>, Jacobi 椭圆函数展开法<sup>[5,6]</sup>等等, 其中 Jacobi 椭圆函数展开法有着广泛的应用<sup>[7-10]</sup>.

同时, 随着计算机技术的不断发展, 利用计算机作图直观地展示一些特殊函数或非线性发展方程的解也引起了人们的兴趣. 文献 [11] 展示了 Mathieu 函数的图像及以其为基础的许多问题的解的图像; 文献 [12] 用图像直观地表现 KP 方程和一种新的 NPDE 的孤立子纠缠; 文献 [13] 用图像表现了 NNV 方程的压缩子 (compacton), 峰子 (peakon) 和折叠子 (flodon) 结构的解, 其中孤立子的碰撞稳定性在该文中表现得非常明显; 文献 [14] 用推广的 Jacobi 椭圆函数展开法解 NLS 方程, 并作出了部分解的图像. 我们的工作是在以上文献的启发下, 用 MATLAB 编程作图来展示部分 Jacobi 椭圆函数和 KdV 方程的 Jacobi 椭圆函数展开解.

## 2. Jacobi 椭圆函数和 Jacobi 椭圆函数展开解

### 2.1. Jacobi 椭圆函数<sup>[15]</sup>

Jacobi 椭圆函数有 24 种之多, 常用的大概有 4

种:  $\text{sn}(x, k)$ ,  $\text{cn}(x, k)$ ,  $\text{dn}(x, k)$  和  $\text{ns}(x, k)$ . 我们主要研究  $\text{sn}(x, k)$  图像, 其余的可类比讨论.

第一类椭圆方程之一:

$$y'' = -(1 + k^2)y + 2k^2y^3, \quad (1)$$

其中, "是  $d^2/dx^2$ ;  $k$  是模数,  $0 < k < 1$ .

(1) 式的解记为

$$y = \text{sn}(x, k). \quad (2)$$

(2) 式就叫 Jacobi 椭圆正弦函数.

在理论上可以证明 (2) 式有以下三条性质:

1) 奇偶性  $y = \text{sn}(x, k)$  是关于  $x$  的奇函数, 即

$$\text{sn}(x, k) = -\text{sn}(-x, k). \quad (3)$$

2) 周期性

$$\text{sn}(u + 4K) = \text{sn}(u), \quad (4)$$

其中

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx. \quad (5)$$

3) 退化

$k \rightarrow 0$  时 (2) 式退化为  $\sin x$ ;

$k \rightarrow 1$  时 (2) 式退化为  $\tanh x$ .

也可以通过作出  $(y-x-k)$  的图像展示  $y = \text{sn}(x, k)$  的上述性质.

(2) 式的三维图和俯视图分别为图 1(a) 和 (b).

由图 1(a) 和 (b) 可以看出,  $y = \text{sn}(x, k)$  呈现了: 1) 奇偶性  $y = \text{sn}(x, k)$  是关于  $x$  的奇函数 (图 1(b) 中平面  $x = 0$  两边的色差可看出), 即  $\text{sn}(x, k) = -\text{sn}(-x, k)$ ; 2) 周期性, 在图 1(b) 中, 对于一定的  $k$  值, 灰带和白带形成了一个周期, 这相当于  $x = 0$  处的波源发出的波向  $x$  轴的两边传播开去.

在图 2 中对比了  $k = 0.001$ ,  $k = 0.998$  时的

<sup>†</sup>E-mail: glx3097@sina.com

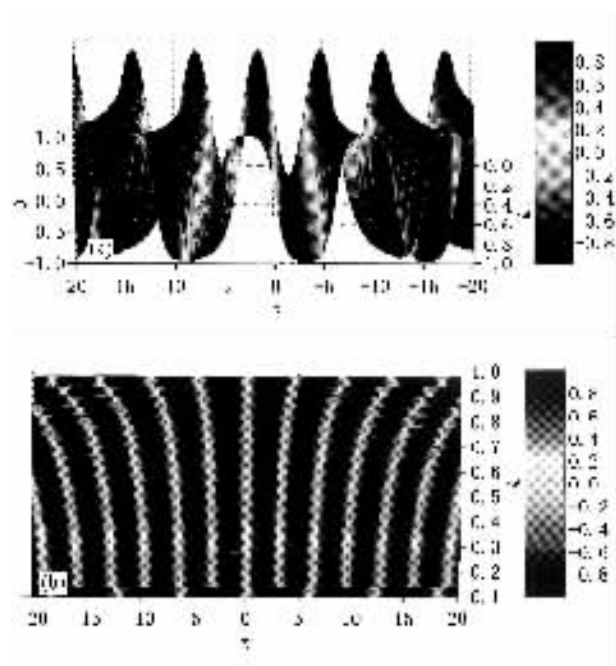


图1 (a)  $y = \text{sn}(x, k)$  的三维图像 (b)  $y = \text{sn}(x, k)$  的俯视图

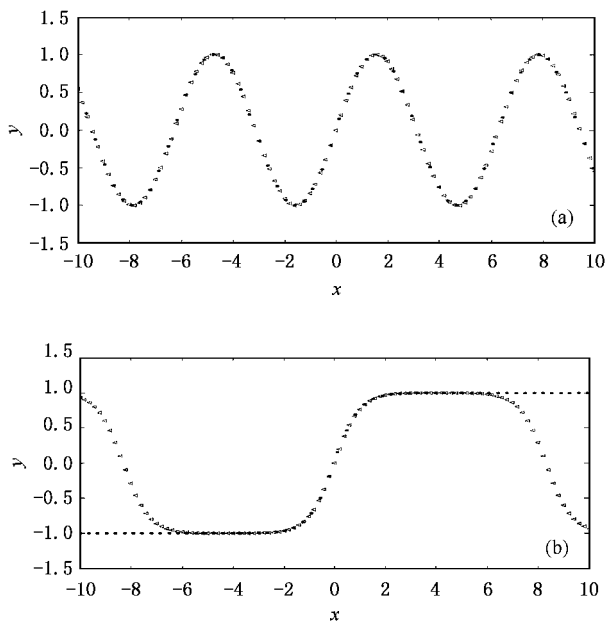


图2  $y = \text{sn}(x, k)$  的退化图。(a)  $y = \text{sn}(x, k = 0.001)$  与  $y = \sin(x)$  的对比图像 ;dot 表示  $y = \sin(x)$  的图像 ,triangle 表示  $y = \text{sn}(x, k = 0.001)$  的图像 (b)  $y = \text{sn}(x, k = 0.998)$  与  $y = \tanh(x)$  的对比图像 ;dot 表示  $y = \tanh(x)$  的图像 ,triangle 表示  $y = \text{sn}(x, k = 0.998)$  的图像

$\text{sn}(x, k)$  与  $\sin x, \tanh x$  的对比图。

### 2.2. Jacobi 椭圆函数展开解

以 KdV 方程为例来说明。

KdV 方程<sup>[5]</sup>为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{6}$$

可设(6)式的 Jacobi 椭圆函数展开解为

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^N \text{sn}^i(\xi), \tag{7}$$

其中

$$\xi = l(x - vt) \tag{8}$$

是行波变换。

将(7),(8)式代入(6)式,通过平衡最高阶导数项与非齐次项可定得

$$N = 2. \tag{9}$$

将(7)(8)(9)式代入(6)式可得 KdV 方程的解为(具体解法请参考文献[5])

$$u = v + 4(1 + k^2)\beta l^2 - 12k^2\beta l^2 \text{sn}^2(\xi, k). \tag{10}$$

2.2.1. 当  $\beta = 1, l = 1, v = 1$  时

作出  $k = 0.4$ (图3(a))和  $k = 0.9$ (图3(b))的  $(u-x-t)$  的俯视图。

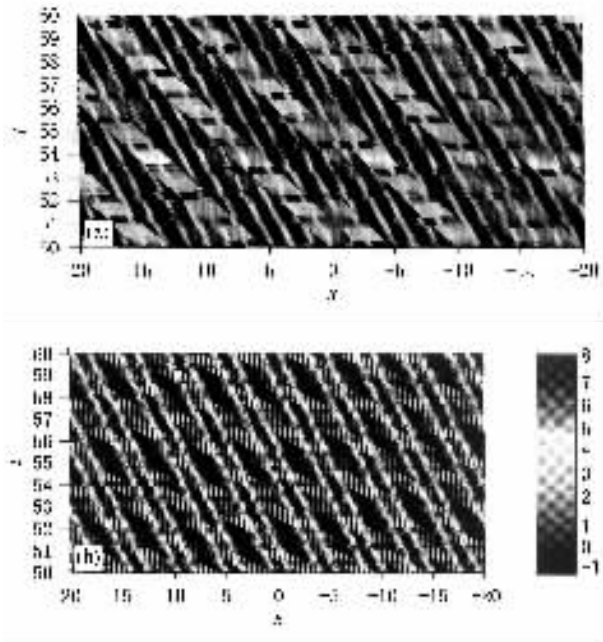


图3 (a)  $\beta = 1, l = 1, v = 1, k = 0.4$  时的  $(u-x-t)$  俯视图 (b)  $\beta = 1, l = 1, v = 1, k = 0.9$  时的  $(u-x-t)$  俯视图

将图3(a)和(b)的黑带按顺序编号,奇数号的黑带是相同的,偶数号也是如此,但奇数号的黑带与偶数号的黑带不一样,所以“波长”是指图3中两个相邻的奇(偶)数号黑带的距离,是通过图3读出来的(见表1)。

表 1 图 3 中的“波长”

$k$	0.4	0.9
波长	3.44	4.84

由图 3 可以看出,当  $\beta = 1, l = 1, v = 1$  时,随  $k$  的变化的  $(u-x-t)$  的图像从形状上看是非常之相似的,都是周期性的震荡,图像几乎没有变化,甚至当  $(x-t)$  都很大时,图像仍然相似(见图 4(f)).在表 1 中, KdV 方程的行波解的波长也随着  $k$  的增加而增加.

2.2.2. 当  $\beta = 6, l = 1, v = 10$  时

$(u-x-t)$  的图像形成了许多周期性的小峰(见图 4(a)和(c))是因为由于  $\beta = 6$  相对于  $\beta = 1$  是增加的,而  $\beta$  表征的是系统的耗散特征,当  $\beta = 6$  时  $(u-x-t)$  的图像就会在  $\beta = 1$  的图像(图 3 的一个斜周期带)的基础上分化而形成了许多的周期性的的小峰(对比图 4(d)和(f));即使经过很长时间的演化,这种周期性在同一空间间隔的小峰图像也是相当稳定的(见图 4(b)).

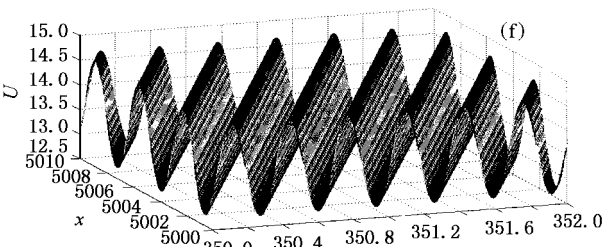
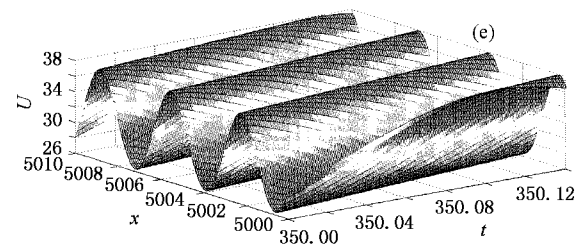
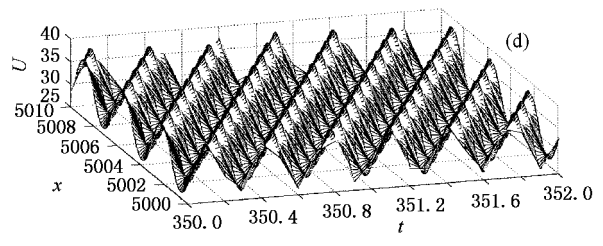
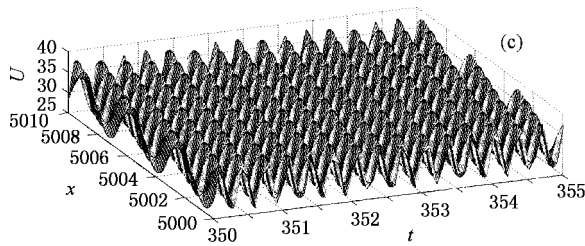
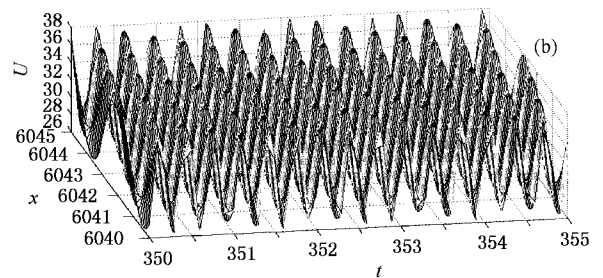
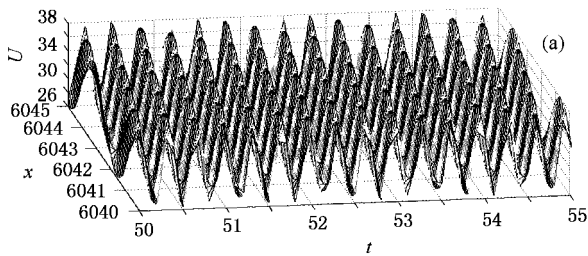


图 4 (a)  $\beta = 6, l = 1, v = 10, k = 0.4$  时的  $(u-x-t)$ ,  $x = (6040, 6045), t = (50, 55)$  的  $(u-x-t)$  的图像;(b)  $\beta = 6, l = 1, v = 10, k = 0.4, x = (6040, 6045), t = (350, 355)$  的  $(u-x-t)$  的图像.(c)  $\beta = 6, l = 1, v = 10, k = 0.4, x = (5000, 5010), t = (350, 355)$  的  $(u-x-t)$  的图像 (d) 为  $\beta = 6, l = 1, v = 10, k = 0.4, x = (5000, 5010), t = (350, 352)$  的  $(u-x-t)$  的图像 (e) 为  $\beta = 6, l = 1, v = 10, k = 0.4, x = (5000, 5010), t = (350, 350.14)$  的  $(u-x-t)$  的图像 (f) 为  $\beta = 1, l = 1, v = 10, k = 0.4, x = (5000, 5010), t = (350, 352)$  时的  $(u-x-t)$  的图像

从图 4(c)-(f)可以看出 (c)(d)(e) 的时间尺度不断地减小,因此后者是前者的部分时段的图像,而图 4(e)  $\beta = 6$  的形状与 (f)  $\beta = 1$  的很相似,所以我们认为  $\beta = 6$  的图像是在  $\beta = 1$  的基础上分化而形成了小峰(对比图 4(d)和(f)也可得同样的结论);系统的这种分化即耗散特征被以波速恒定行波

方式传播  $(u-x-t)$  的图像的周期性也是显然的.

3. 结 论

我们用 MATLAB 编程作出了 Jacobi 椭圆正弦函数  $\text{sn}(x, k)$  的图像,并通过图像展示了  $\text{sn}(x, k)$  的

一些性质:奇偶性、周期性和退化,并作出了 KdV 方程 Jacobi 椭圆函数展开解图像, KdV 方程 Jacobi 椭圆函数展开解的  $(u-x-t)$  的图像有如下一些性质:1) 周期性; 2) 比较好的稳定性; 时间和空间的尺度较大时的  $(u-x-t)$  的图像与时间和空间的尺度较小时的

$(u-x-t)$  的图象很相似; 3) 当  $\beta$  较大( $\beta = 6$ ) 时图像的分化相对  $\beta$  较小( $\beta = 1$ ) 时大,  $\beta$  较大时的  $(u-x-t)$  的图像是在  $\beta$  较小时图像的基础上分化而形成的小峰. 图像给人以直观的美感, 是一种重要的研究方法.

- [ 1 ] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
- [ 2 ] Ablowitz M J and Clarkson P A 1991 *Soliton, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* ( New York :Cambridge University Press )
- [ 3 ] Li B, Cheng Y and Zhang H Q 2002 *Phys. Lett. A* **305** 377
- [ 4 ] Lou S Y 2000 *Phys. Lett. A* **277** 94
- [ 5 ] Liu S K et al 2001 *Phys. Lett. A* **289** 69
- [ 6 ] Liu S K et al 2001 *Phys. Lett. A* **290** 72
- [ 7 ] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2001 *Acta. Phys. Sin.* **50** 2068 ( in Chinese ) [ 刘式适、付遵涛、刘式达、赵强 2001 物理学报 **50** 2068 ]
- [ 8 ] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 1923 ( in Chinese ) [ 刘式适、付遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 1923 ]
- [ 9 ] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 10 ( in Chinese ) [ 刘式适、付遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 10 ]
- [ 10 ] Liu S K, Fu Z T, Liu S D and Zhao Q 2002 *Acta. Phys. Sin.* **51** 719 ( in Chinese ) [ 刘式适、付遵涛、刘式达、赵强 2002 物理学报 **51** 719 ]
- [ 11 ] Gutierrez-Vega J C et al 2003 *Am. J. Phys.* **71** 233
- [ 12 ] Zhang J F et al 2002 *Commun. Theor. Phys.* **38** 517
- [ 13 ] Zhang J F et al 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 7
- [ 14 ] Zhu J M et al 2004 *Chin. Phys.* **13** 798
- [ 15 ] Liu S K and Liu S D. 2000 *Nonlinear equations in physics* ( Beijing : Peking University Press ) ( in Chinese ) [ 刘式适、刘式达 2000 物理学中的非线性方程 ( 北京 : 北京大学出版社 ) ]

## Visualization of the solution of Jacobi elliptic expanding function

Zheng Qiang Yue Ping Gong Lun-Xun<sup>†</sup>

( School of Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China )

( Received 30 September 2004 ; revised manuscript received 10 November 2004 )

### Abstract

Thanks to the powerful software MATLAB, this paper gets the beautiful figures of a kind of Jacobi elliptic function- $\text{sn}(x, k)$ ; and as an example, we also draw the figures of solution of Jacobi expanding function of KdV equation in two different parameters.

**Keywords** : Jacobi elliptic functions, Jacobi elliptic function expanding method, KdV equation, visualization

**PACC** : 0340K, 0290

<sup>†</sup>E-mail : glx3097@sina.com