第 54 卷 第 7 期 2005 年 7 月
1000-3290/2005/54(07)/3005-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.7, July, 2005

Kerr-Newman-de Sitter 黑洞的统计熵*

李固强†

(湛江师范学院信息科技学院,广东湛江 524048)

(2004 年 7 月 15 日收到;2004 年 10 月 25 日收到修改稿)

避开求解波动方程的困难,利用量子统计的方法,直接计算 Kerr-Newman-de Sitter 黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数.然后利用砖墙膜模型计算和讨论黑洞背景下的玻色场和费米场的熵.

关键词:量子统计, 砖墙膜模型, Kerr-Newman-de Sitter 黑洞, 统计熵

PACC:0420, 9760L

1. 引　　言

't Hooft[1] 首次引进砖墙模型的方法研究了标量场对 Schwarzschild 黑洞的熵的量子修正,给出了黑洞熵与视界面积成正比的结果;1995 年,Solodukhin[2] 通过路径积分的方法也讨论了标量场对 Schwarzschild 黑洞的熵的量子修正,并指出了它包含一个对数项.运用砖墙模型的方法,人们最近讨论了多种黑洞的熵[3—7],取得了一些有价值的成果.由于黑洞熵的主要部分来自于黑洞视界附近量子场的贡献[8],因此改进后的砖墙模型——膜模型[9] 越来越受到欢迎[10—16].不过,在以往采用改进的砖墙方法计算黑洞熵的文献中,其他研究者都取薄膜厚度与截断因子(薄膜到视界的距离)为同阶无穷小,或默认薄膜厚度远小于截断因子,因而得出黑洞熵与视界面积成正比的结论,并把它作为运用改进的砖墙方法计算黑洞熵的必然结果.本文避开求解波动方程的困难,直接运用量子统计的方法[17],计算 Kerr-Newman-de Sitter 黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数,再利用砖墙膜模型得到系统熵的表达式.本文的计算表明,黑洞的熵与视界面积成正比的结论只有在薄膜的厚度远小于截断因子或两者为同阶无穷小时成立,当无穷小薄膜的厚度远大于无穷小截断因子时,黑洞的熵有一个对数发散项,黑洞熵不再与视界面积成正比.

* 湛江师范学院重点科研项目资助的课题.

† E-mail: liguqiang@tom.com

2. Kerr-Newman-de Sitter 时空

在 Boyer-Lindquist 坐标中,Kerr-Newman-de Sitter 黑洞外部时空线元[18]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = {}& \frac{\Delta_r - \Delta_\theta a^2\sin^2\theta}{\Sigma\Xi^2}\mathrm{d}t^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_r}\mathrm{d}r^2 - \frac{\Sigma}{\Delta_\theta}\mathrm{d}\theta^2 \\ & - \frac{\Delta_\theta{}^2(r^2+a^2)^2 - \Delta_r a^2\sin^2\theta}{\Sigma\Xi^2}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 \\ & + \frac{2a[\Delta_\theta(r^2+a^2) - \Delta_r]\sin^2\theta}{\Sigma\Xi^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

式中

$$\begin{aligned} &\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \Xi = 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2, \\ &\Delta_\theta = 1 + \frac{1}{3}\Lambda a^2\cos^2\theta, \\ &\Delta_r = (r^2+a^2)\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) - 2Mr + Q^2. \end{aligned} \tag{2}$$

由文献[19]的方法容易确定时空(1)的视界面方程为

$$\Delta_r = (r^2+a^2)\left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) - 2Mr + Q^2 = 0. \tag{3}$$

当 $\frac{1}{\Lambda} \gg M^2 > a^2 + Q^2$ 时,方程(3)有四个实根,$r_{++} > r_+ > r_- > 0 > r_{--}$,$r_{++}$,$r_+$,$r_-$ 分别对应宇宙视界、黑洞的外视界和内视界[16].Δ_r 可以分解为

$$\Delta_r = -\frac{1}{3}\Lambda(r - r_{++})(r - r_+)(r - r_-)(r - r_{--}). \tag{4}$$

黑洞外视界的 Hawking 辐射温度

$$T_{\mathrm{H}}=\frac{\kappa_{+}}{2\pi}=\frac{1}{\beta_{\mathrm{H}}}=-\frac{\Lambda(r_{+}-r_{++})(r_{+}-r_{-})(r_{+}-r_{--})}{12\Xi\pi(r_{+}^{2}+a^{2})}. \quad (5)$$

由文献[20]知无穷远静止观测者测得的固有温度为

$$T=\frac{T_{\mathrm{H}}}{\sqrt{\tilde{g}_{tt}}}, \quad (6)$$

式中

$$\tilde{g}_{tt}=\frac{\Delta_{r}\Delta_{\theta}\Sigma}{\Xi^{2}[\Delta_{\theta}(r^{2}+a^{2})^{2}-\Delta_{r}a^{2}\sin^{2}\theta]}. \quad (7)$$

3. 系统的熵

巨配分函数

$$\ln Z=\mp\sum_{i}g_{i}\ln(1\mp\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_{i}})$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i}g_{i}\sum_{n}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_{i}}, & (\text{玻色场}),\\ \displaystyle\sum_{i}g_{i}\sum_{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_{i}}, & (\text{费米场}).\end{cases} \quad (8)$$

在单位体积里,能量在 ε 到 $\varepsilon+\mathrm{d}\varepsilon$ 或 v 到 $v+\mathrm{d}v$ 间隔内的粒子的量子态数为

$$g(v)\mathrm{d}v=j4\pi v^{2}\mathrm{d}v, \quad (9)$$

式中 j 为粒子的自旋简并度,在时空(1)中,任意 r 点的二维曲面

$$A(r)=\int\sqrt{g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi, \quad (10)$$

在视界外,任意 r 点的壳层体积元为

$$\mathrm{d}V=A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r, \quad (11)$$

所以在视界外,任意 r 点任意厚度的壳层内系统的巨配分函数为

$$\ln Z=\begin{cases}\displaystyle\int A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r\sum_{i}g_{i}\sum_{n}\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_{i}}=j4\pi\int A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r\sum_{n}\frac{1}{n}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\beta hv}v^{2}\mathrm{d}v & (\text{玻色场})\\ \displaystyle\int A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r\sum_{i}g_{i}\sum_{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_{i}}=j4\pi\int A(r)\sqrt{-g_{rr}}\,\mathrm{d}r\sum_{n}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\beta hv}v^{2}\mathrm{d}v & (\text{费米场})\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\frac{j\pi^{2}}{90}\int\frac{\sqrt{-g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}}{\beta^{3}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{j\pi^{2}}{90\beta_{\mathrm{H}}^{3}}\int\frac{\sqrt{-g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}}{(\sqrt{\tilde{g}_{tt}})^{3}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi & (\text{玻色场}),\\ \displaystyle\frac{j7\pi^{2}}{720}\int\frac{\sqrt{-g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}}{\beta^{3}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\frac{j7\pi^{2}}{720\beta_{\mathrm{H}}^{3}}\int\frac{\sqrt{-g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}}{(\sqrt{\tilde{g}_{tt}})^{3}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi & (\text{费米场}),\end{cases} \quad (12)$$

其中 $\beta=\frac{1}{T}=\sqrt{\tilde{g}_{tt}}\beta_{\mathrm{H}}$.利用熵和巨配分函数的关系 $S=\ln Z-\beta_{\mathrm{H}}\frac{\partial\ln Z}{\partial\beta_{\mathrm{H}}}$得

$$S=\begin{cases}\displaystyle\frac{j2\pi^{2}}{45\beta_{\mathrm{H}}^{3}}\int\frac{\Xi^{2}[\Delta_{\theta}(r^{2}+a^{2})^{2}-\Delta_{r}a^{2}\sin^{2}\theta]^{2}}{(r^{2}+a^{2}\cos^{2}\theta)\Delta_{\theta}^{2}\Delta_{r}^{2}}\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi & (\text{玻色场}),\\ \displaystyle\frac{j7\pi^{2}}{180\beta_{\mathrm{H}}^{3}}\int\frac{\Xi^{2}[\Delta_{\theta}(r^{2}+a^{2})^{2}-\Delta_{r}a^{2}\sin^{2}\theta]^{2}}{(r^{2}+a^{2}\cos^{2}\theta)\Delta_{\theta}^{2}\Delta_{r}^{2}}\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi & (\text{费米场}).\end{cases} \quad (13)$$

采用薄膜方法,对 r 取积分区间$[r_{+}+\varepsilon,r_{+}+\varepsilon+h]$,其中 $0<\varepsilon\ll r_{+}$ 为无穷小截断因子(薄膜到视界的距离),$0<h\ll r_{+}$ 为无穷小薄膜的厚度.当薄膜的厚度远小于截断因子或两者为同阶无穷小时,

$$S=\begin{cases}\displaystyle\frac{j4\pi^{3}}{45\beta_{\mathrm{H}}^{3}}\cdot\frac{9\Xi^{2}(r_{+}^{2}+a^{2})^{4}}{\Lambda^{2}(r_{+}-r_{++})^{2}(r_{+}-r_{-})^{2}(r_{+}-r_{--})^{2}}\cdot\frac{2}{ar_{+}}\mathrm{arctg}\frac{a}{r_{+}}\cdot\frac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} & (\text{玻色场}),\\ \displaystyle\frac{j7\pi^{3}}{90\beta_{\mathrm{H}}^{3}}\cdot\frac{9\Xi^{2}(r_{+}^{2}+a^{2})^{4}}{\Lambda^{2}(r_{+}-r_{++})^{2}(r_{+}-r_{-})^{2}(r_{+}-r_{--})^{2}}\cdot\frac{2}{ar_{+}}\mathrm{arctg}\frac{a}{r_{+}}\cdot\frac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} & (\text{费米场}).\end{cases} \quad (14)$$

由(10)式可以算得黑洞外视界的面积为

$$A(r_{+})=\frac{4\pi(r_{+}^{2}+a^{2})}{\Xi}. \quad (15)$$

利用(5,15)式可将(14)式改写为

$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{j\Xi A(r_+)}{90\beta_{\mathrm{H}}}\cdot\dfrac{(r_+^2+a^2)}{ar_+}\mathrm{arctg}\dfrac{a}{r_+}\cdot\dfrac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} & (\text{玻色场}),\\[2ex] \dfrac{1}{4}\dfrac{j7\Xi A(r_+)}{720\beta_{\mathrm{H}}}\cdot\dfrac{(r_+^2+a^2)}{ar_+}\mathrm{arctg}\dfrac{a}{r_+}\cdot\dfrac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} & (\text{费米场}).\end{cases}\tag{16}$$

当薄膜的厚度远大于截断因子时，由(13)式可得

$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{j\Xi A(r_+)}{90\beta_{\mathrm{H}}}\cdot\dfrac{(r_+^2+a^2)}{ar_+}\mathrm{arctg}\dfrac{a}{r_+}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon}+\dfrac{j4\pi^3}{45\beta_{\mathrm{H}}^3}\cdot\displaystyle\int f(r_+,\theta)\,\mathrm{d}\theta\cdot\ln\left(1+\dfrac{h}{\varepsilon}\right) & (\text{玻色场}),\\[2ex] \dfrac{1}{4}\dfrac{j7\Xi A(r_+)}{720\beta_{\mathrm{H}}}\cdot\dfrac{(r_+^2+a^2)}{ar_+}\mathrm{arctg}\dfrac{a}{r_+}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon}+\dfrac{j7\pi^3}{90\beta_{\mathrm{H}}^3}\cdot\displaystyle\int f(r_+,\theta)\,\mathrm{d}\theta\cdot\ln\left(1+\dfrac{h}{\varepsilon}\right) & (\text{费米场}),\end{cases}\tag{17}$$

其中

$$f(r_+,\theta)=\left[\frac{9\Xi^2(r^2+a^2)^4}{\Lambda^2(r-r_{++})^2(r-r_-)^2(r-r_{--})^2}\cdot\frac{\sin\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right]'\Bigg|_{r=r_+}+\frac{6\Xi^2(r_+^2+a^2)^2a^2}{\Lambda(r_+-r_{++})(r_+-r_-)(r_+-r_{--})}\cdot\frac{\sin^3\theta}{(r_+^2+a^2\cos^2\theta)\left(1+\frac{1}{3}\Lambda a^2\cos^2\theta\right)}.\tag{18}$$

4. 结果与讨论

本文直接运用量子统计的方法，计算 Kerr-Newman-de Sitter 黑洞背景下玻色场和费米场的配分函数，再利用砖墙膜模型计算了系统的熵，得到了熵的表达式(16)和(17). 本文所作计算表明，Kerr-Newman-de Sitter 黑洞的熵与视界面积成正比的结论只有在薄膜的厚度远小于截断因子或两者为同阶无穷小时成立. 这种情形下，只要选取恰当的截断因子，黑洞熵还可以写为其视界的面积的 1/4，这与 Bekenstein 的理论一致[21]. 当薄膜的厚度远大于截断因子但仍然远小于视界半径时，黑洞的熵除了一个与面积成正比的发散项以外，还有一个对数发散项，黑洞熵不再与视界面积成正比. 我们注意到，由于计算仍然限于视界附近，故远离围绕系统的真空的贡献项不会出现.

(16)和(17)式也表明，粒子场对熵的贡献与黑洞的转动或时空的非球对称性有关. 对于静态球对称的 Reissner-Nordstrom-de Sitter 黑洞，即 $a=0$ 时，利用极限

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{a}{r_+}=\frac{1}{r_+},\tag{19}$$

(16)和(17)式分别可以改写为

$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{jA(r_+)}{90\beta_{\mathrm{H}}}\cdot\dfrac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} & (\text{玻色场}),\\[2ex] \dfrac{1}{4}\dfrac{j7A(r_+)}{720\beta_{\mathrm{H}}}\cdot\dfrac{h}{\varepsilon(\varepsilon+h)} & (\text{费米场})\end{cases}\tag{20}$$

和

$$S=\begin{cases}\dfrac{1}{4}\dfrac{jA(r_+)}{90\beta_{\mathrm{H}}}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon}+\dfrac{j8\pi^3}{5\Lambda^2\beta_{\mathrm{H}}^3}b_1\ln\left(1+\dfrac{h}{\varepsilon}\right) & (\text{玻色场}),\\[2ex] \dfrac{1}{4}\dfrac{j7A(r_+)}{720\beta_{\mathrm{H}}}\cdot\dfrac{1}{\varepsilon}+\dfrac{j7\pi^3}{5\Lambda^2\beta_{\mathrm{H}}^3}b_1\ln\left(1+\dfrac{h}{\varepsilon}\right) & (\text{费米场}),\end{cases}\tag{21}$$

其中

$$b_1=\left[\frac{r^6}{(r-r_{++})^2(r-r_-)^2(r-r_{--})^2}\right]'\Bigg|_{r=r_+}.$$

对于无源引力、电磁、中微子和标量场，(20)式与文献[22]的(33)式一致.

此外，我们的计算还表明，黑洞熵与粒子自旋简并度成正比. 在取相同的截断因子时，费米场的熵为玻色场的熵的 7/8 倍.

[1] 't Hooft G 1985 *Nucl*. *Phys*. B **256** 727
[2] Solodukhin S N 1995 *Phys*. *Rev*. D **51** 609
[3] Li Z H 2000 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **17** 396
[4] Lu M W and Jing J L 2000 *Int*. *J*. *Theor*. *Phys*. **39** 1331
[5] Li G Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1346 (in Chinese) [李固强 2003 **物理学报 52** 1346]
[6] Jing J L and Yan M L 2001 *Phy*. *Rev*. D **64** 064015
[7] Li G Q 2005 *Chin Phys* **14** 468
[8] Li X and Zhao Z 2000 *J*. *Beijing Normal Univ*. (*Natur*. *Sci*.) **36** 69 (in Chinese) [李 翔、赵 峥 2000 **北京师范大学学报(自然科学版) 36** 69]
[9] Li X and Zhao Z 2000 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **15** 1739
[10] Li C A, Wei X Q, Meng Q M and Liu J L 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2173 (in Chinese) [李传安、魏显起、孟庆苗、刘景伦 2002 **物理学报 51** 2173]
[11] Song T P, Hou C X and Huang J S 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 1901 (in Chinese) [宋太平、侯晨霞、黄金书 2002 **物理学报 51** 1901]
[12] Zhao R and Zhang L C 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 1167 (in Chinese) [赵 仁、张丽春 2002 **物理学报 51** 1167]
[13] Li C A, Meng Q M and Su J Q 2002 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **51** 1897 (in Chinese) [李传安、孟庆苗、苏九清 2002 **物理学报 51** 1897]
[14] Sun M C 2003 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **52** 1350 (in Chinese) [孙鸣超 2003 **物理学报 52** 1350]
[15] Li G Q 2004 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **53** 3673 (in Chinese) [李固强 2004 **物理学报 53** 3673]
[16] Zhang L C, Wu L Q and Zhao R 2004 *Chin Phys*. **13** 974
[17] Zhao R, Zhang J F and Zhang L C 2001 *Nucl*. *Phys*. B **609** 247
[18] Wang Y J 1999 *Black holes Physics* 324 (in Chinese) [王永久 1999 **黑洞物理学(长沙 湖南师范大学出版社) 第** 324 **页**]
[19] Zhao Z and Liu L 1991 *Acta*. *Phys*. *Sin*. **40** 1546 (in Chinese) [赵 峥、刘 辽 1991 **物理学报 40** 1546]
[20] Lee M H and Kim J K 1996 *Phys*. *Rev*. D **54** 3904
[21] Bekenstein J D 1973 *Phys*. *Rev*. D **7** 2333.
[22] Li Z H 2002 *Mod*. *Phys*. *Lett*. A **17** 887

Statistical entropy of Kerr-Newman-de Sitter black hole*

Li Gu-Qiang
(*Information Technology and Science School*, *Zhanjiang Normal College*, *Zhanjiang* 524048, *China*)
(Received 15 July 2004; revised manuscript received 25 October 2004)

Abstract

The partition functions of bosonic and fermionic field in Kerr-Newman-de Sitter black hole are derived directly by using the method of quantum statistics. Then the entropy of the Kerr-Newman-de Sitter black hole is calculated by using the improved brick-wall method with the membrane model.

Keywords: quantum statistics, brick-wall membrane model, Kerr-Newman-de Sitter black hole, statistical entropy
PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhanjiang Normal College.