

利用线性可逆变换增强延迟反馈方法 控制混沌的有效性*

张晓明¹⁾²⁾ 彭建华¹⁾²⁾† 张入元³⁾

¹⁾ 深圳大学理学院, 深圳 518060)

²⁾ 东北师范大学物理系, 长春 130024)

³⁾ 东北师范大学数学系, 长春 130024)

(2004 年 9 月 16 日收到, 2004 年 11 月 18 日收到修改稿)

基于线性可逆变换方法, 提出一种有效提高延迟反馈法控制混沌的方案. 通过将系统的部分状态变量在相应的子空间作变换, 实现用单路反馈控制信号替代变换前多路信号对原系统的控制作用, 并且还从理论上确定出满足系统可控的条件. 通过数值计算几个控制实例, 其结果很好地说明这种控制混沌的方案是有效和实用的.

关键词: 线性可逆变换, 延迟反馈, 控制混沌

PACC: 0545

1. 引 言

变量延迟反馈法是控制混沌的重要方法^[1]之一, 它在实际控制混沌的应用问题中已得到了较为普遍地使用^[2-5]. 在采用线性延迟反馈信号控制的情况下, 研究结果^[6,7]表明, 一个混沌系统能否被有效地控制与所选择的自反馈信号有着直接的关系. 例如, 在三维自治系统的混沌控制中, 并不是在三个输出变量中任选其一所构造的自反馈信号都能够有效控制混沌, 即便在已经实现可控制的情况下, 选用不同的输出信号(任意一个输出信号)对系统施加自反馈控制也会使控制参数的范围有明显差异. 在使用单一线性反馈信号无法达到控制效果的情况下, 解决的办法通常有两种: 其一, 仍利用单一控制信号, 采用增强型的反馈控制方案^[7], 即将单一反馈控制信号回送到系统的某几个输入端; 其二, 用多路(即多分量)控制信号自反馈于系统实施控制. 虽然从实验设计上后者较前者的实现方案略复杂些, 但从控制的实效性来讲, 后者的控制效果会更好. 然而, 采用多路信号的自反馈控制将使得对系统可控性的理论分析变得极为复杂, 甚至得不到解析结果.

例如, 在变量延迟线性反馈控制下, 受控制的一般 n 维非线性混沌系统可以写成

$$\dot{x} = G(x(t)) + K' \cdot [x(t - \tau) - x(t)], \quad (1)$$

其中 $\dot{x} = dx/dt$, $x \in R^n$, $G: R^n \rightarrow R^n$. 在自反馈控制的情况下, 控制参量 K' 应选择 $K' = \text{diag}(k'_1, k'_2, \dots, k'_n)$ 形式. 在某些情况下, 使得系统可控其参数 K' 和 τ 的取值范围可通过分析系统(1)产生 Hopf 分支的条件确定出. 需要指出的是, 在确定系统(1)是否会发生 Hopf 分支的过程中, 将会遇到求解对应(1)式的线性化特征方程的问题, 其形式为

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\lambda\tau} + \alpha_3 e^{-2\lambda\tau} + \dots + \alpha_n e^{-n\lambda\tau} = 0, \quad (2)$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 分别为关于 λ 和 k'_1, k'_2, \dots, k'_n 的多项式. 实际上, 即便在 $n=3$ 的情况下, 选择任意两个 k' 不为零(相当于只有两路输出信号的自反馈作用), 讨论(2)式的特征根问题也是十分困难的. 如果系统的维数再高(即 $n>3$)且反馈信号的数目再多的话, 理论分析就更加困难. 实际问题中往往需要用到多路信号的控制, 而在这种情况下试图从理论上给出对实验有指导意义的结果将是十分困难的, 因此寻求解决这个问题无疑是十分重要而又有实际意义的.

* 教育部高等学校骨干教师资助计划项目(批准号[2000]65), 教育部科学技术研究重点项目(批准号[2000]00042), 国家自然科学基金(批准号:10405018)资助的课题.

† 通讯作者

其中 r, θ 分别为变换的可调参数.对 (10) 式变换,并用 y_2 构造反馈信号,为讨论方便,不妨令 $r = 1.0$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -z_1 - z_2, \\ \dot{y}_2 &= (y_1 + 0.2z_1)\cos\theta + [0.2 + z_2(y_1 \end{aligned}$$

$$- 4.5)]\sin\theta + k[y_2(t - \tau) - y_2(t)], \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 &= -(y_1 + 0.2z_1)\sin\theta \\ &+ [0.2 + z_2(y_1 - 4.5)]\cos\theta, \end{aligned}$$

这里 $z_1 = r[y_2\cos\theta - y_3\sin\theta], z_2 = r[y_2\sin\theta + y_3\cos\theta]$.系统 (12) 的平衡点为

$$\begin{aligned} x_{10} &= \left(-4.5089, \frac{-23.544\sin(2\theta) + 23.544 + 21.544\cos(2\theta)}{-0.088714\sin\theta + 2\cos\theta}, \frac{-23.544\cos\theta - 22.544\cos(3\theta) + \sin(3\theta) - \sin\theta}{1.044 + 0.9556\cos(2\theta) - 1.044\sin(2\theta)} \right)^T, \\ x_{20} &= \left(0.008871, \frac{-0.9556\sin(2\theta) + 0.9556 - 1.044\cos(2\theta)}{45.09\sin\theta + 2\cos\theta}, \frac{0.04436\cos\theta + 0.04436\cos(3\theta) + \sin(3\theta) - \sin\theta}{-21.54 + 23.54\cos(2\theta) + 21.54\sin(2\theta)} \right)^T. \end{aligned}$$

我们将讨论 θ 和 k 分别被固定其一而另一个为可调参量两种情况下,系统 (12) 有可能发生 Hopf 分支的条件.

先固定 $\theta = \pi/3$, 而以 k 作为可调参量,在 x_{10} 处对系统 (12) 按照文献 [6][7] 的方法和步骤作分析,其结果是当 $k \in (-\infty, -3.24) \cup (0.324, +\infty)$ 时,系统 (12) 发生 Hopf 分支,参量 k 与延迟时间 τ 的解析函数关系(即对应于系统 (12) 出现 Hopf 分支的临界线^[6])

$$\tau_m(k) = \{\cos^{-1}(\Delta_1/\Delta_2) + 2(m-1)\pi\}\omega_0^{-1}, \quad (13)$$

其中 $m \in N, \omega_0$ 为 k 的函数.这里 $\Delta_1 = (5.87 + 2.0k)\omega_0^4 + (11.4 - 24.0k)\omega_0^2 + 97.0k - 629; \Delta_2 = k(2.0\omega_0^4 - 24.0\omega_0^2 + 97.0)$.

再固定 $k = 1.2$, 而以 θ 作为可调参量,结果是,当 $\theta \in (\frac{l\pi}{2} - \frac{2}{5}\pi, \frac{l\pi}{2} + \frac{2}{5}\pi)$, 且 $l \in Z$ 时,系统 (12)

发生 Hopf 分支,相应地 θ 与 τ 的函数关系是

$$\tau_m(\theta) = \{\cos^{-1}(\Delta_3/\Delta_4) + 2(m-1)\pi\}\omega_0^{-1}, \quad (14)$$

其中 $m \in N$ 而 ω_0 为 θ 的函数,且

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= (0.316\sin 8\theta - 0.242\cos 8\theta + \dots)\omega_0^4 \\ &+ (-0.444\sin 10\theta + 0.242\cos 10\theta + \dots)\omega_0^2 \\ &+ 0.0272\sin 10\theta + 0.0429\cos 10\theta + \dots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (-0.323\sin 6\theta + 0.247\cos 6\theta + \dots)\omega_0^4 \\ &+ (-0.444\sin 10\theta + 0.342\cos 10\theta + \dots)\omega_0^2 \\ &+ 0.0272\sin 10\theta + 0.0430\cos 10\theta + \dots \end{aligned}$$

可见 Δ_3 和 Δ_4 均为以 ω_0 降幂排列的多项式, ω_0 前的各项系数与 θ 有关.图 1(a) 和 (b) 分别给出:当 $m = 1, 2, 3$ 时,由计算 (13) 和 (14) 式得到 $k-\tau$ ($\theta = \pi/6$) 和 $\theta-\tau$ ($k = 1.2$) 关系曲线.(14) 式表明 θ 和 τ 之间有较为复杂的周期关系,实际上图 1(b) 中明显反映出它们之间所具有的周期性特征关系.

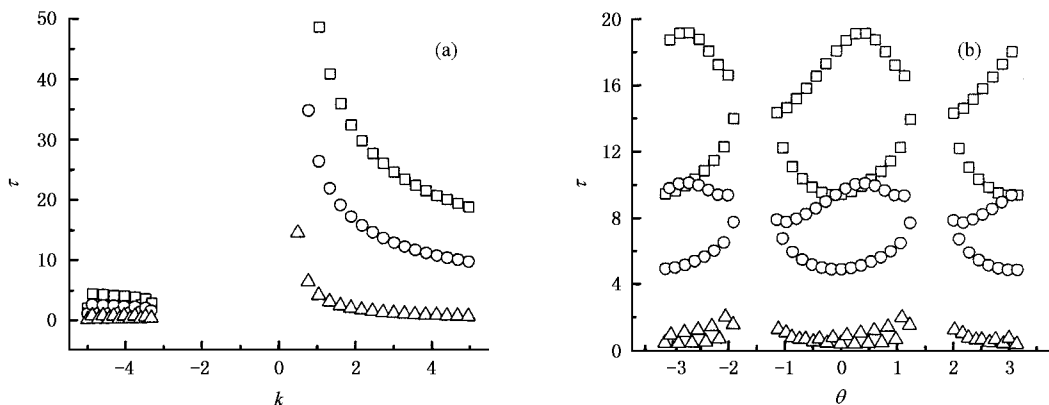


图 1 计算式 (13)(14) 所得的 $k-\tau, \theta-\tau$ 关系曲线(图中的符号分别表示 $\Delta m = 1, \circ m = 2, \square m = 3$) (a) 当 $\theta = \pi/6$ 时的 $k-\tau$ 关系曲线 (b) 当 $k = 1.2$ 时的 $\theta-\tau$ 关系曲线

由于没有涉及对时间的变换,所以变换前后系统的时间尺度不变.在实际控制过程中, τ 的大小仍可以按照变换前计算原系统得到的基本周期的平均

值或它的倍数来选定^[11].一旦 τ 被确定,则在 $k-\tau$ (或 $\theta-\tau$) 曲线上就可以找到与这个 τ 值相对应的 k (或 θ) 的临界值,此临界值的邻域就是欲达到控制

混沌目的所要求的参量 k (或 θ) 的取值范围.

由理论上确定的可控制参量区域中选择两组值 $\tau = 5.691, k = 1.2, \theta = \pi/6$ 和 $\tau = 11.542, k = 0.3, \theta = \pi/6$, 经数值计算得到系统(12)被控制到一周期

(1P)和二周期(2P)状态,如图2所示.

取 $\tau = 5.691$,再分别选定 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/6$,数值计算并绘制 k - x_1 和 k - y_1 分岔图(取随时间演化状态量的极大值),如图3(a)所示.

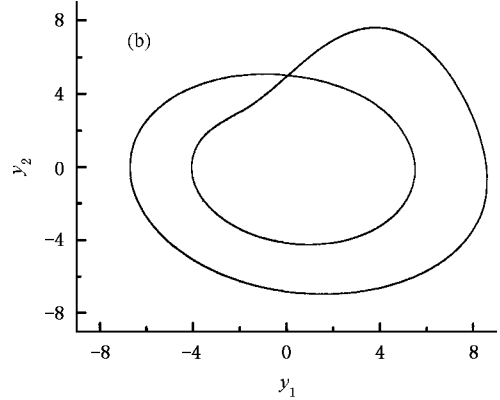
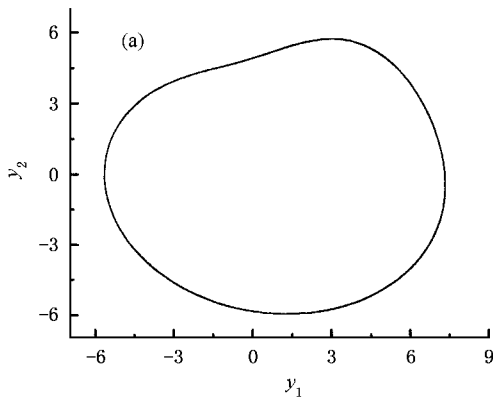


图2 计算系统(12)所得到的周期吸引子 (a)当 $k = 1.2, \tau = 5.691, \theta = \pi/6$ 时,被控制住的1P吸引子 (b)当 $k = 0.3, \tau = 11.542, \theta = \pi/6$ 时,被控制住的2P吸引子

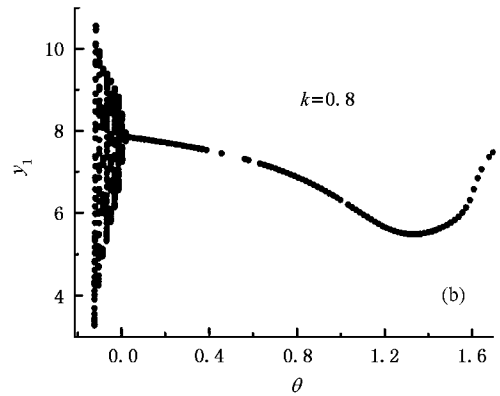
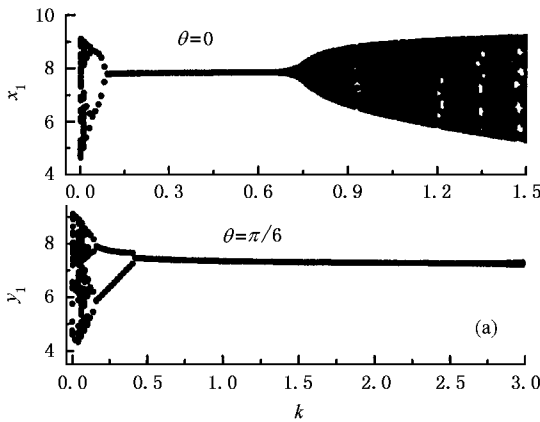


图3 数值计算系统(12)所得的 k - x_1, k - y_1 和 θ - y_1 分岔图 (a)当 $\tau = 5.691$,并分别取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/6$ 时,得到的 k - x_1 和 k - y_1 分岔图 (b)当 $\tau = 5.691$,并且取 $k = 0.8$ 时,得到的 θ - y_1 分岔图

从图3(a)可见,变换前($\theta = 0$),系统(12)仅在 $k \in (0.021, 0.67)$ 这样小的区间内才可控,而变换后($\theta = \pi/6$)系统(12)的可控区间为 $k \in (0.09, 3.0)$,显然较之变换前,控制参数的选择范围扩大了数倍.图3(b)是固定 $k = 0.8$,数值计算得到的 θ - y_1 分岔图.图3表明系统(12)能够被稳定控制的参数范围与前面理论分析得到的结果(如图1所示)基本相符.

考虑 Sprott-J 混沌系统^[12]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_3, \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + x_3, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + x_2^2. \quad (15)$$

选择变换矩阵 A 的形式为

$$A = r \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

并用 y_1 构造反馈信号,则有

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 2y_3 \cos\theta + (-2z_1 + y_3) \sin\theta \\ &\quad + k[y_1(t - \tau) - y_1(t)], \\ \dot{y}_2 &= -2y_3 \sin\theta + (-2z_1 + y_3) \cos\theta, \\ \dot{y}_3 &= -z_2 + z_1 + z_1^2, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $z_1 = y_1 \cos\theta - y_2 \sin\theta, z_2 = y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta$. 类似

上述分析,分别以 k, θ 作为控制参量,可以得到关于系统(17)发生 Hopf 分支的 $k-\tau$ 和 $\theta-\tau$ 关系曲线,如图 4 所示.若选定 $\tau = 4.9$,数值计算并分别绘制系统(17)的 $k-x_1(\theta = 0), k-y_1(\theta = \frac{\pi}{6})$ 分岔图,结果如图 5(a)所示.从图可知,变换前,系统(17)的可控区间仅为 $k \in (0.026, 0.37) \cup (0.7, 0.8)$ 而变换后,可控区域为 $k \in (0.28, 3.0)$,其范围也明显扩大.选取 $k = 0.6$,该点在系统(17)的可控区外,以 θ 作为可调参量绘制系统(17)的分岔图($\theta-y_1$),如图 5(b)

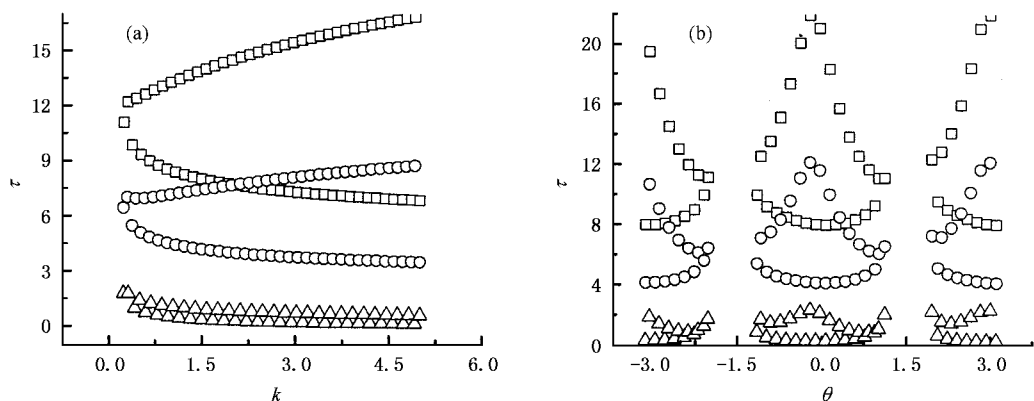


图 4 由系统(17)所得的(a) $k-\tau$ 和 (b) $\theta-\tau$ 关系曲线 (a) $\theta = \pi/6$; (b) $k = 0.4$

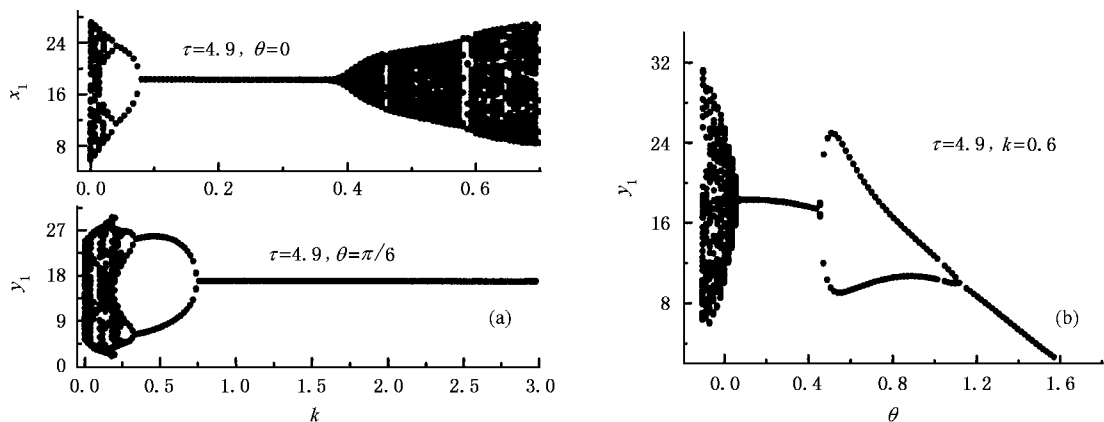


图 5 数值计算系统(17)所得的 $k-x_1, k-y_1$ 和 $\theta-y_1$ 分岔图 (a)当 $\tau = 4.9$,并分别取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi/6$ 时,得到的 $k-x_1$ 和 $k-y_1$ 分岔图;(b)当 $\tau = 4.9$,并且取 $k = 0.6$ 时,得到的 $\theta-y_1$ 分岔图

电路系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{R}{R_1}u_3 + \frac{R}{R_5}s_1 + \frac{R}{R_4}s_2, \\ \dot{u}_2 &= -\frac{R}{R_2}u_2 + \frac{R}{R}u_3 + \frac{R}{R_4}s_1 + \frac{R}{R_6}s_2, \quad (18) \\ \dot{u}_3 &= -\frac{R}{R}u_1 + \frac{R}{R}u_2 + 0.2\frac{R}{R_3}u_2^2, \end{aligned}$$

所示,其结果表明,恰当地选取 θ 也可以将系统稳定住,如当 $\theta \in (0.08, 0.44) \cup (1.15, 1.57)$ 时,系统被控制到 1P 态;而当 $\theta \in (0.45, 1.10)$ 时,系统被控制到 2P 态.

为了说明上述理论及分析结果对实验的指导作用,我们设计了实现 Sprott-J 系统及其延迟反馈控制的实验电路,并通过 Pspice 仿真平台观察其实验系统的结果.实验电路如图 6 所示,图中虚线框内的电路为延迟反馈控制部分,除此以外的部分是 Sprott-J 系统的实现电路.

其中

$$s_1 = u_1(t - \tau) - u_1(t), s_2 = u_2(t - \tau) - u_2(t).$$

实际上,只要取

$$\begin{aligned} R/R_1 &= R/R_2 = 2, \quad 0.2R/R_3 = 10, \\ R/R_5 &= k\cos^2\theta, \quad R/R_4 = k\cos\theta\sin\theta, \\ R/R_6 &= k\sin^2\theta, \end{aligned} \quad (19)$$

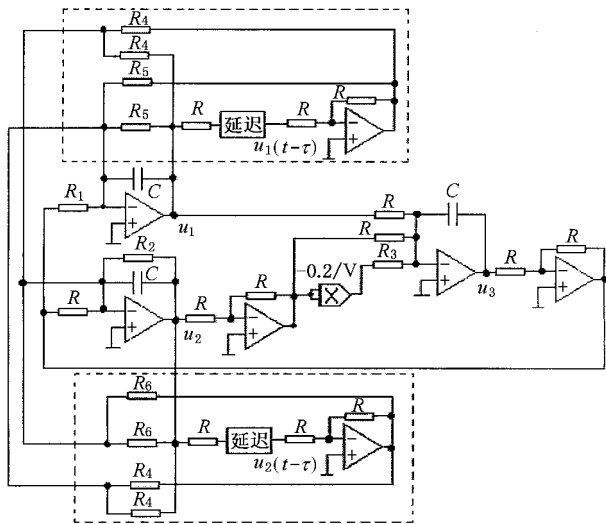


图 6 延迟反馈控制 Sprott-J 系统的电路实现

及令 $x_i = \epsilon u_i, i = 1, 2, 3$ 就可以将(18)式按(8)式的形式表示出来. 这里 $\epsilon = 10$, 它的作用是限制实验电路中的电流或电压, 以防过大而影响电路器件的正常工作. 构造 Sprott-J 电路系统要求 $R = 100\text{k}\Omega, C = 330\text{pF}, R_1 = R_2 = 50\text{k}\Omega, R_3 = 2\text{k}\Omega, R_4 = 20\Omega$. 另外, 再根据上述已由理论分析确定的可控制参量范围, 若要具体选择 $\tau = 4.9, k = 1.0, \theta = \pi/6$ 和 $\tau = 4.9, k = 0.6, \theta = \pi/6$ 这两组值, 则应该选择实验电路中的 R_4, R_5 和 R_6 各阻值为 (1) $R_4 = 230.9\text{k}\Omega, R_5 = 133.3\text{k}\Omega, R_6 = 400\text{k}\Omega$ (2) $R_4 = 384.9\text{k}\Omega, R_5 = 222.2\text{k}\Omega, R_6 = 666.7\text{k}\Omega$.

电路仿真的结果表明, 当取第一组电阻值时, 系统被控制到 1P 状态, 如图 7(a) 所示, 而当取第二组电阻值时, 系统被控制到 2P 状态, 如图 7(b) 所示. 显然, 电路仿真实验结果与理论分析的结果是一致的.

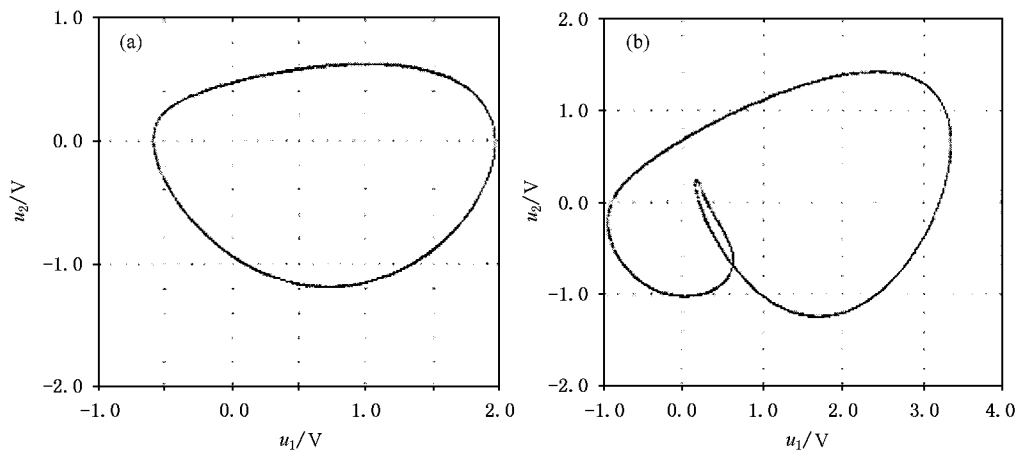


图 7 Sprott-J 电路系统被控制的仿真结果 (a) 1P 态 (b) 2P 态

4. 结 论

通过上述的理论分析、数值计算和仿真实验的结果都说明, 利用本文提出的可逆线性变换方案可以有效地解决 (1) 在需要使用多个延迟控制变量的情况下如何从理论上得到可控的解析条件问题 (2) 用单一信号不能控制的问题或扩大控制参数的选择范围问题. 尤其是在电路实验中的验证结果, 也会为其他实验系统的混沌控制提供切实可行的方法.

我们在上述两个例子选择变量变换组的构成中分别考虑了两种情况: 至少包含一个原系统中含有非线性项的分量 (如在 Rossler 系统(10)中选择的 (x_2, x_3) 组合, 即 $p = 2, q = 3$); 只包含原系统线性项

的分量 (如在 Sprott-J 系统(15)中选择的 (x_1, x_2) 组合, 即 $p = 1, q = 2$). 理论分析和数值计算结果都表明, 无论采用哪一种变换组都可以提高实现混沌控制的有效性. 这说明变换组的构成 (即 p, q 的选择) 具有较大的灵活性, 只是对一个具体的系统而言, 变换组 (p, q) 的选择不同, 对控制效率的影响略有不同. 此外, 控制矩阵 K 中对角线上非零元素的位置应按 p 或 q 值确定, 例如, 若 $p = 2$ 和 $q = 3$, 则 K 只能取 $\text{diag}(0, k, 0)$ 或 $\text{diag}(0, 0, k)$, 否则由(9)式可知, 变换前后控制结果相同, 即所做的可逆线性变换未能达到改善控制效果的目的.

利用可逆线性变换可以提高连续系统变量延迟反馈控制的有效性, 实际上, 这种方法用于其他一些控制混沌方案也是可行的. 作为一般性的讨论, 设

F 为某种控制形式的信号,考虑对经过可逆线性变换的新系统(6)进行控制,其系统状态方程一般地可写成

$$\dot{y} = H(y(t)) + F, \quad (20)$$

由(4)可得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot \dot{y} = A \cdot H(y(t)) + A \cdot F \\ &= G(x(t)) + A \cdot F, \end{aligned} \quad (21)$$

显然,当控制信号 F 以加(法)性的方式注入系统时,对变换后新系统实施的单变量控制等同于对原系统进行多变量控制.

这一方法的使用也可以推广到对离散混沌系统的控制问题,这就为提高混沌控制的有效性提供了一种具有普遍意义而又实用的方案.

-
- [1] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421
- [2] Fang J Q 2002 *Mastering Chaos and Developing High Technology* (Beijing the Atomic Energy Publishing House)(in Chinese)[方锦清 2002 驾驭混沌与发展高新技术(北京:原子能出版社)]
- [3] Pyragas K 1995 *Phys. Lett. A* **206** 323
- [4] Wolfram Just, Hartmut Benner and Ekkehard Reibold 2003 *Chaos* **13** 259
- [5] Hiroyuki Nakajima, Yoshisuke Ueda 1998 *Phys. Rev. E* **58** 1757
- [6] Chen Y Y, Peng J H, Shen Q H and Wei J J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1871 (in Chinese)[陈艳艳、彭建华、沈启宏、魏俊杰 2001 物理学报 **50** 1871]
- [7] Chen Y Y, Peng J H, Liu B Z and Wei J J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1489 (in Chinese)[陈艳艳、彭建华、刘秉正、魏俊杰 2002 物理学报 **51** 1489]
- [8] Zhang X M, Peng J H and Chen G R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2864 (in Chinese)[张晓明、彭建华、陈关荣 2004 物理学报 **53** 2864]
- [9] Cheng L, Zhang R Y and Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 536 (in Chinese)[程 丽、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 536]
- [10] Rossler O E 1976 *Phys. Letts. A* **57** 397
- [11] Zhang X M, Peng J H and Zhang R Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2467 (in Chinese)[张晓明、彭建华、张入元 2002 物理学报 **51** 2467]
- [12] Sprott J C 1994 *Phys. Rev. E* **50** 647

Improving the efficiency of time-delayed feedback control of chaos through linear invertible transform^{*}

Zhang Xiao-Ming^{1,2)} Peng Jian-Hua^{1,2)†} Zhang Ru-Yuan³⁾

¹⁾(School of Science ,Shenzhen University ,Shenzhen 518060 ,China)

²⁾(Department of Physics ,Northeast Normal University ,Changchun 130024 ,China)

³⁾(Department of Mathematics ,Northeast Normal University ,Changchun 130024 ,China)

(Received 16 September 2004 ; revised manuscript received 18 November 2004)

Abstract

A scheme ,which can be used to effectively improve the quality of time-delayed feedback control of chaos ,was proposed based on linear invertible transform. Through transforming parts of state variables of the system in the corresponding sub-space ,we can successfully control chaos by a single time-delayed feedback signal instead of multi-signals in the original system before the transformation. Therefore ,the conditions for stabilizing the system can be found theoretically. The numerical simulation results show that this chaos control method is commendably effective and feasible.

Keywords : linear invertible transform , time-delayed feedback , control chaos

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Foundation for University Key Teacher by the Ministry of Education (Grant No. [2000] 65) ,and by the Key Program of the Science and Technology Research from the Chinese Ministry of Education (Grant No. [2000] 00042) ,and by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 104505018).

[†] Corresponding author