

关于动力学互相关因子指数的注记*

武连文 程乾生

(北京大学数学科学学院和数学与应用数学实验室 北京 100871)

(2004 年 10 月 10 日收到 2004 年 10 月 25 日收到修改稿)

通过反例讨论了动力学互相关因子指数定义的错误所在,同时给出了正确的定义.

关键词:动力学互相关因子指数

PACC: 0545

混沌信号的时间序列分析研究是非线性科学研究中的一个课题,找到对不同的动力学有较高区分和比较能力的检验量,对识别混沌时间序列之间相近性具有很好的帮助.

对时间序列 $\{x(t_i)\}_{i=1}^N$,可在嵌入空间上进行其动力学轨线的重构^[1].表示式为

$$X(t_i) = \{x(t_i), x(t_i + \tau), \dots, x(t_i + (m-1)\tau)\}, \quad (1)$$

其中时间延迟 $\tau = a \cdot \Delta t$, Δt 为采样时间, a 为延迟参数, m 是嵌入空间的维数.它的自相关和^[2]定义为

$$C_{XX}(\epsilon) = P(\|x(t_i) - x(t_j)\| < \epsilon) \\ = \frac{2}{(N-m)(N-m+1)} \\ \times \sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j=i+1}^{N-m+1} \Theta(\epsilon - \|x(t_i) - x(t_j)\|), \quad (2)$$

表示在重构空间中距离 ϵ 内找到向量 $x(t_i)$ 的邻近点的概率. Θ 是 Heaviside 阶跃函数.

对集 X 和 Y 进行有效的比较,还可计算互相关和^[3]定义如下:

$$C_{XY}(\epsilon) = P(\|x(t_i) - y(t_j)\| < \epsilon) \\ = \frac{2}{(N-m)(N-m+1)} \\ \times \sum_{i=1}^{N-m} \sum_{j=i+1}^{N-m+1} \Theta(\epsilon - \|x(t_i) - y(t_j)\|), \quad (3)$$

其中 $C_{XY}(\epsilon)$ 关于 X 和 Y 是对称的.互相关和表示在 x 的 ϵ 邻域内找到点 y 的概率.

设 $x(i)$ 和 $x(j)$ 是时间序列 $x(n)$ (n 为样本长度)上的两点,当 $|x(i) - x(j)| \leq \epsilon$ 时, $|x(i+1) - x(j+1)| \leq \epsilon$ 的概率为 $S_m = C_{XX}^{m+1}(\epsilon) / C_{XX}^m(\epsilon)$,其也可用于混沌时间序列动力学异同性的识别^[4,5].

动力学自相关因子指数^[1]定义为

$$Q_{XY} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \ln \frac{C_{YX}(\epsilon)}{C_{XX}(\epsilon)} \right|, \quad (4)$$

其物理意义是当 Q 统计上足够小时,那么集 X 和 Y 具有相近的动力学,反之则不具有.文献 6 又进一步定义了动力学互相关因子指数

$$R_{XY} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \ln \frac{C_{XY}(\epsilon)}{C_{XX}(\epsilon) \cdot C_{YY}(\epsilon)} \right|, \quad (5)$$

文献 6 指出“ R 代表的意义是:当 Q 是统计上足够小的前提下,如果 R 也是统计上足够小的,那么集 X 和集 Y 具有完全相同的动力学;反之,如果 R 不是统计上足够小的,则集 X 和集 Y 的动力学仅仅相近.”(5)式这样定义 R 有错误,因为分子和分母具有不同的量级.正确定义应为

$$R_{XY} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left| \ln \frac{C_{XY}(\epsilon)}{\sqrt{C_{XX}(\epsilon)} \cdot \sqrt{C_{YY}(\epsilon)}} \right|. \quad (6)$$

试举一反例:当集 X 和集 Y 为任意定义的一个混沌时间序列时,即 $X = Y$ 时,根据(5)式算出的 R 值如下:

$$R_{XY} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\ln C_{XX}(\epsilon)|. \quad (7)$$

由于集 X 和集 Y 为同一个序列,根据 R 的定义,应满足 $R_{XX} = 0$,可是由(7)式,要达到此结果,应有 $C_{XX}(\epsilon)$ 近似于 1,而由文献 6 要求的 R 的意义知,当 $X = Y$ 时,两者动力学完全相同,无需 $C_{XX}(\epsilon)$ 是否接近于 1.这个矛盾是由(5)式定义不当所造成

* 国家自然科学基金(批准号:40035010)资助的课题.

的.然而通过(6)式,可看出 R 值自然为 0.通过此反例可知,按照(5)式中的定义,将使得 R 失去实际物

理意义,不能作为一个有效的混沌时间序列动力学异同性的检验量,其正确的定义应为(6)式.

[1] Sauer T 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3811

[2] Grassberger P and Procaccia I 1983 *Phys. D* **9** 189

[3] Kanta H 1994 *Phys. Rev. E* **49** 5901

[4] Savit R and Green M 1991 *Phys. D* **50** 95

[5] Manuca R and Savit R 1996 *Phys. D* **99** 134

[6] Li C G *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2114 (in Chinese] 李春贵等 2003 物理学报 **52** 2114]

A note on the exponent of dynamical cross-correlation factor^{*}

Wu Lian-Wen Cheng Qian-Sheng

(LMAM , School of Mathematical Sciences , Peking University , Beijing 100871 , China)

(Received 10 October 2004 ; revised manuscript received 25 October 2004)

Abstract

This paper argues with a counter example that the exponent of dynamical cross-correlation factor used in a paper published in *Acta Phys. Sin.* vol 52 p2114 is ill defined and gives the correct definition.

Keywords : exponent of dynamical cross-correlation factor

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.40035010).