

# 基于多光束干涉原理的相移算法研究\*

罗志勇 杨丽峰 陈允昌

(中国计量科学研究院, 北京 100013)

(2004 年 11 月 5 日收到, 2004 年 12 月 13 日收到修改稿)

针对多光束干涉原理的相移算法包括算法误差及步长优化等问题, 以菲索干涉仪精密测长为应用背景进行了研究. 利用干涉光学的基本原理导出了在多束光干涉(经光学面多次反射、透射)的情况下干涉光强随相位分布的精确公式, 在此基础上, 通过数值分析的方法得出了利用菲索干涉仪精密测长的相移步长的优化取值范围和干涉光束最佳初相位差的范围, 对余弦依赖算法所引起的光强误差分别就四步法、五步法得出了不同的依赖关系, 并对多光束干涉算法中几种主要的误差来源进行了不确定度评估.

关键词: 相移算法, 多光束干涉, 精密测长, 不确定度

PACC: 0630E, 0760, 0620

## 1. 引 言

相移技术已在表面形貌测量和精密测长技术中得到了广泛的应用. 它是通过对多幅干涉图像提取光强信息, 利用相移算法计算得到被测对象的相位信息. 由于计算机及图像处理技术的发展, 使它成为比较容易实现和推广的一种高精度测量方法<sup>[1,2]</sup>.

相移算法是相移技术中决定形貌或位移测量精度的关键技术. 借助于两束光的相移产生的相位干涉图, 基于干涉光强信号的余弦分布依赖产生了一系列的标准算法<sup>[2]</sup>, 如三步算法、四步算法、五步算法、最小二乘法<sup>[3,4]</sup>和 Fourier 算法<sup>[5]</sup>等. 但是, 在实际应用中大多数情况下干涉光强分布并不是严格的余弦依赖, 如法布里-伯罗干涉仪、菲索干涉仪等, 由于其中一束光经过光学表面的多次反射, 因此其干涉光强分布不严格随相位变化余弦分布<sup>[4,5]</sup>. 在这种情况下, 如果再按标准算法进行相位处理, 必然会引入较大的算法误差. 国外一些研究人员对该问题进行过深入研究, 通过数值分析得出结论: 对于精度较低的应用场合 ( $> \lambda/100$ ), 当其两个光学反射面或者至少其中一个光学面的反射率较低时, 如低于 4%, 则由于光强分布非余弦依赖所引起的算法误差是可以忽略的<sup>[6]</sup>. 但对高精度应用如精密测长干涉

仪, 特别是在反射面反射率较高时, 算法误差的影响将是十分严重的; 其次在相移技术中步长、干涉光束初项差的选取对于减小相位测量误差也是十分关键的, 目前国内外尚无作者对此问题进行深入研究. 本文将针对上述问题, 以菲索干涉仪精密测长为应用背景, 利用波动光学的基本原理推导出了在多束光干涉(经光学面多次反射、透射)的情况下干涉光强随相位分布的精确公式, 在此基础上, 通过数值分析的方法得出了利用菲索干涉仪精密测长的相移步长的最佳取值范围, 特别是干涉光束初相位差范围的选取对提高相位测量准确度是十分关键的; 此外本文还就几种主要的误差来源包括余弦依赖算法误差进行了不确定度评估. 本文结果对于利用菲索干涉仪、法布里-伯罗干涉仪进行精密测长具有十分重要的指导意义.

## 2. 多光束干涉公式的导出

与单纯双光束干涉仪如迈克耳孙干涉仪等不同, 菲索干涉仪是利用多光束干涉进行表面形貌测量或进行精密测长. 其基本原理如图 1 所示.

如图所示,  $P_1, P_2$  为未涂增透膜或反射膜的菲索标准板和待测平面, 包括标准板和待测平面之间的环境介质均为空气, 今有一入射角为  $i$  (显然, 折

\* 科学技术部项目(批准号 2002DEA20014)资助的课题.

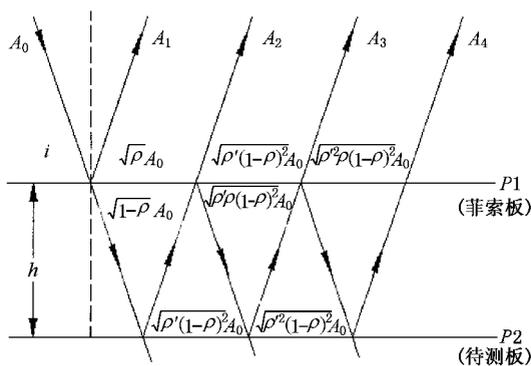


图 1 菲索干涉仪光路原理示意图

射角也为  $i$ ) 的光束经菲索标准板和待测面的多次反射和透射, 设菲索标准板  $P_1$ , 待测面  $P_2$  的反射率分别为  $\rho$  和  $\rho'$ , 则有  $\rho = \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2$ ,  $\rho' = \left(\frac{A'_1}{A'_0}\right)^2$ , 其中  $A_0$  为入射光射到菲索标准板  $P_1$  时的振幅,  $A_1$  为在  $P_1$  表面初次反射的振幅,  $A'_0$  为经  $P_1$  的透射光入射到待测面  $P_2$  时的振幅,  $A'_1$  为经待测表面  $P_2$  反射后光的振幅. 从图 1 中可以看出, 入射光在菲索标准板  $P_1$  的反射, 及经菲索标准板  $P_1$  透射、待测面  $P_2$  反射、再经菲索标准板透射, 等等. 光线的振幅依次为  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , 分别表示为

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\rho} A_0, \\ A_2 &= \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} A_0, \\ A_3 &= (\rho'\rho)^{1/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} A_0, \\ A_4 &= \rho'\rho \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} A_0, \\ &\dots \end{aligned}$$

在实际使用中光束近似垂直入射, 菲索标准板  $P_1$  的初次反射光和经  $P_1, P_2$  多次反射的透射光彼此平行, 且相邻光束的相位差均为  $\delta = 2nh \cos(i)$ , 其中  $n$  为空气的折射率,  $h$  为两个反射板之间的距离 (见图 1). 由此引起的相位差为  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{4\pi}{\lambda} nh \cos(i)$ , 若取此反射光的初相位为 0, 则各透射光的相位依次为  $\varphi, 2\varphi, 3\varphi, 4\varphi, \dots$ . 除初次反射光外, 各透射光振幅以公比为  $\sqrt{\rho\rho'}$  的等比级数依次减小 ( $\sqrt{\rho\rho'} < 1$ ) 相位则以公差为  $\varphi$  的等差级数依次增加. 在光近似垂直入射时, 需要考虑光从光疏媒质到光密媒质的半波损失,  $P_1$  的初次反射光是从菲索反射板的内表面反射, 即从光密媒质到光疏媒质, 并

无半波损失, 因此反射振幅用复数表示为  $\sqrt{\rho} A_0 e^{i\omega t}$ , 第一束透射光将因待测面 (光疏媒质到光密媒质) 而产生半波损失, 此后其他透射光每再经 (菲索板和待测面) 两次半波损失正好一个周期, 因此各透射光振幅复数表示形式依次为

$$\begin{aligned} &\sqrt{\rho'(1-\rho)^2} A_0 e^{i(\omega t - \varphi - \pi)}, \\ &(\rho'\rho)^{1/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} A_0 e^{i(\omega t - 2\varphi - \pi)}, \\ &\rho'\rho \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} A_0 e^{i(\omega t - 3\varphi - \pi)}, \\ &\dots \\ &(\rho'\rho)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} A_0 e^{i(\omega t - n\varphi - \pi)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

以上  $n$  项直接叠加, 各相干光束的合振幅  $A$  可表示为

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{i\omega t} \{ \sqrt{\rho} - [\sqrt{\rho'(1-\rho)^2} e^{-i\varphi} \\ &+ (\rho'\rho)^{1/2} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} e^{-i2\varphi} \\ &+ \rho'\rho \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} e^{-i3\varphi} + \dots \\ &+ (\rho'\rho)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} A_0 e^{i(\omega t - n\varphi - \pi)} \} \end{aligned} \quad (1)$$

(1) 式括号中从第二项起是公比为  $\sqrt{\rho\rho'} e^{-i\varphi}$  的等比数列, 应用等比数列求和公式, 等比数列前  $n$  项之和可表示为

$$\begin{aligned} A &= A_0 e^{i\omega t} \left\{ \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{e^{-i\varphi} - \sqrt{\rho\rho'}} [1 - (\rho\rho')^{n/2} e^{-in\varphi}] \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

合振幅的强度为其振幅复数表达式与其共轭复数 ( $A^*$ ) 的乘积, 因此

$$\begin{aligned} A^2 &= AA^* = A_0^2 \left\{ \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \right. \\ &\times [1 - (\rho\rho')^{n/2} e^{-in\varphi}] \left. \right\} \left\{ \sqrt{\rho} - \sqrt{\rho'(1-\rho)^2} \right. \\ &\times \left. \frac{1}{e^{-i\varphi} - \sqrt{\rho\rho'}} [1 - (\rho\rho')^{n/2} e^{in\varphi}] \right\}. \end{aligned}$$

为便于分析, 将干涉信号强度  $A^2$  用  $I$  表示, 利用欧拉公式  $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ , 略去繁琐的推导过程, 可得

$$\begin{aligned} I &= A_0^2 \{ \rho + [\rho'(1-\rho)] [1 + (\rho\rho')^n \\ &- 2(\rho\rho')^{n/2} \cos(n\varphi)] - 2\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho) \\ &\times [\cos(\varphi) - \sqrt{\rho\rho'} - (\rho\rho')^{n/2} (\cos(n+1)\varphi) \\ &- \sqrt{\rho\rho'} \cos(n\varphi)] \} [1 + \rho\rho' \\ &- 2\sqrt{\rho\rho'} \cos(\varphi) \} \end{aligned}$$

上式是菲索干涉法光强分布的精确公式,当  $n$  趋于无穷大也就是考虑所有的反射光束时,可简化成下式,即著名的 Airy 函数表示

$$I = A_0^2 \left[ 1 - \frac{(1 - \rho)(1 - \rho')}{1 + \rho\rho' - 2\sqrt{\rho\rho'}\cos\varphi} \right]. \quad (3)$$

### 3. 余弦依赖算法及其光强、相位误差

对于较低准确度的相位测量,当反射面的反射率较低时,通常忽略多次反射对干涉光强的影响,近似认为干涉光强分布为余弦依赖,从而采用四步或五步标准算法求解相位.但对于高精度测量,多次反射是不能忽略的.从图 1 可知,当忽略多次反射光影响时,干涉光强振幅  $A_b$  可表示成

$$A_b = \sqrt{\rho}A_0e^{i\omega t} + \sqrt{\rho'}(1 - \rho)A_0e^{(i\omega t - \varphi - \pi)}. \quad (4)$$

通过共轭复数求得光强  $I_b$  为

$$I_b = A_b A_b^* = A_0^2 [\rho + \rho'(1 - \rho)^2 - 2\sqrt{\rho\rho'}(1 - \rho)\cos\varphi]. \quad (5)$$

显然 (5) 式表示了干涉光强随相位变化呈严格的余弦依赖关系.(3) 式和 (5) 式所表示的光强是不相等的,其中 (3) 式包括了多次反射光对干涉光强的贡献,将多次反射光对干涉光强的影响用  $\Delta I$  表示,则有

$$\frac{\Delta I}{A_0^2} = \frac{I - I_b}{A_0^2}. \quad (6)$$

将 (3) 式和 (5) 式代入 (6) 式即可求得多次反射光对干涉光强的相对影响量.现以中国计量科学研究院正在建立的精密菲索干涉仪的基本参数研究多次反射光对干涉光强的相对影响量随相位的变化关系.该干涉仪菲索反射板单面增透,由光学石英材料制成,即反射率  $\rho = 0.035$ ,待测面为单晶硅面,即有  $\rho' = 0.35$ .图 2 为根据 (6) 式得出的多次反射光对干涉光强的相对影响量随相位的变化曲线.

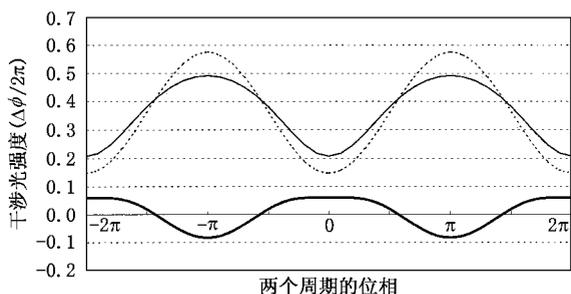


图 2  $\frac{\Delta I}{A_0^2}$  随相位  $\varphi$  的变化曲线

图 2 中细实线和细虚线分别为根据 (3) 式和 (5) 式算出的结果.可以看出,由于忽略了多次反射的作用,图 2 中细虚线的波峰高于细实线的波峰,波谷低于细实线的波谷,其差值如图中的粗实线所示,最大光强误差达到了 14.4%,而干涉光相位差的测量是通过光强的测量来实现的,可见其影响是十分严重的.下面分别就传统的四步和五步算法分析其影响.

#### 3.1. 四步算法及其算法误差

根据 (5) 式,设四步干涉信号分别为  $I_1, I_2, I_3, I_4$ , 对应的相位分别为  $\varphi - 3\epsilon, \varphi - \epsilon, \varphi + \epsilon, \varphi + 3\epsilon$ , 其中  $\epsilon$  为相移步长,通常取  $\pi/4$ , 将其分别代入 (5) 式,列解方程组可得

$$\tan^2 \varphi = \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2}, \quad (7)$$

(7) 式显示了相位与光强的依赖关系,为使研究结论更为直观,在此不考虑光强测量误差,仅考虑算法误差所引起的光强变化对相位的影响.根据 (7) 式,相位变化  $\Delta\varphi$  与光强度误差  $\Delta I_i$  的关系为

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial\varphi}{\partial I_i} \Delta I_i, \quad (8)$$

其中,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial I_1} &= \frac{-\cot\varphi\cos^2\varphi}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \\ &\times \left[ \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)} \right. \\ &\left. + (I_1 - I_2 + I_3 - I_4) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial I_2} &= \frac{\cot\varphi\cos^2\varphi}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \\ &\times \left[ \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)} \right. \\ &\left. + (I_1 + 3I_2 - 3I_3 - I_4) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial I_3} &= \frac{\cot\varphi\cos^2\varphi}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \\ &\times \left[ \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)} \right. \\ &\left. - (I_1 + 3I_2 - 3I_3 - I_4) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial I_4} &= \frac{-\cot\varphi\cos^2\varphi}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)^2} \\ &\times \left[ \frac{(3I_2 - 3I_3 - I_1 + I_4)(I_1 + I_2 - I_3 - I_4)}{(I_1 - I_2 - I_3 + I_4)} \right] \end{aligned}$$

$$-(I_1 - I_2 + I_3 - I_4) \Big].$$

注意到  $\varepsilon = \pi/4$ , 以上各式可简化为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I_1} = -\frac{\sin \varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)A_0^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I_2} = \frac{\sin \varphi + 2\cos \varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)A_0^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I_3} = \frac{\sin \varphi - 2\cos \varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)A_0^2};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I_4} = -\frac{\sin \varphi}{4\sqrt{2}\sqrt{\rho\rho'}(1-\rho)A_0^2}.$$

(8)式中  $\Delta I_i$  由(6)式给出.图3根据(8)式给出了相位测量误差随相位的变化关系.

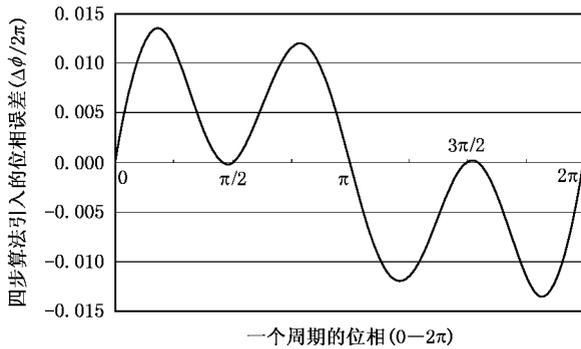


图3 相位测量误差随相位的变化关系

图3可见,四步算法导致的最大相位误差超过一个周期相位的1%,这在高准确度测量中是不允许的.

### 3.2. 五步算法及其算法误差

根据(5)式,设五步干涉信号分别为  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  对应的相位分别为  $\varphi - 2\varepsilon, \varphi - \varepsilon, \varphi, \varphi + \varepsilon, \varphi + 2\varepsilon$ ,其中  $\varepsilon$  为相移步长,通常取  $\pi/2$ ,将其分别代入(5)式,列解方程组可得

$$\tan \varphi = \frac{2(I_2 - I_4)}{2I_3 - I_5 - I_1}. \quad (9)$$

根据(9)式,分别对光强求偏导,可得

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \varphi}{\partial I_i} \Delta I_i = \frac{2\cos^2 \varphi}{2I_3 - I_5 - I_1} \\ &\times \left[ \frac{I_2 - I_4}{2I_3 - I_5 - I_1} (\Delta I_1 - 2\Delta I_3 + \Delta I_5) \right. \\ &\left. + \Delta I_2 - \Delta I_4 \right]. \quad (10) \end{aligned}$$

考虑到  $\varepsilon = \pi/2$ , 则有

$$\Delta \varphi = \frac{\sin \varphi}{4} (\Delta I_1 - 2\Delta I_3 + \Delta I_5)$$

$$+ \frac{\cos \varphi}{2} (\Delta I_2 - \Delta I_4), \quad (11)$$

式中  $\Delta I_i$  仍由(6)式给出.根据(11)式可得五步法的相位误差与相位的关系如图4所示.

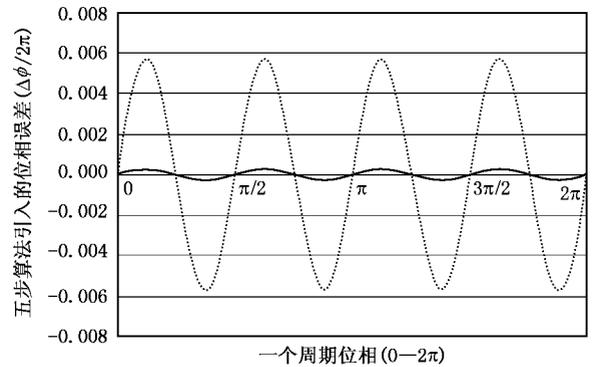


图4 五步法相位误差随相位的变化曲线

图4中的两条曲线分别对应菲索反射板不同的反射率,其中实线对应  $\rho = 0.035$ ,虚线对应  $\rho = 0.35$ .可以看出,五步算法极大地降低了由于光强误差所引起的相位误差,这也从另一个方面说明五步算法优于四步算法,但当反射系数增加时,相位误差以较快的速度增加.如图中所示,当  $\rho = 0.35$  时最大相位误差已超过0.5%个周期相位,这在精密测量中是需要避免的.事实上,干涉仪反射率越高,干涉条纹能量对比度越强.根据(3)式,图5给出了反射率与光强对比度的关系,

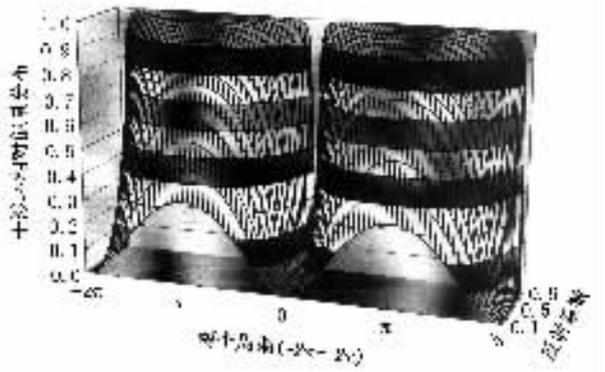


图5 反射率与光强对比度的关系图

为说明问题,图中假设菲索面和待测面反射系数相同,取值范围从0.1—0.9,可以看出,干涉条纹对比度随反射系数的增加而显著增加,高对比度将大大减小光强测量误差的影响从而提高相位测量的准确度.在兼顾算法误差的情况下,该结论对于菲索板或待测对象材质的选择具有重要的指导意义.需

要指出的是上面的结果只是由于余弦算法所引起的误差,不包含相位测量的主要误差源:步长控制误差和光强测量误差所引起的相位误差。

#### 4. 相移步长、初相位差及其优化

为了便于研究(3)式可简化为

$$I = A_0^2 \left[ 1 - \frac{B}{1 - C \cos \varphi} \right], \quad (12)$$

式中  $B = \frac{(1 - \rho)(1 - \rho')}{1 + \rho\rho'}$ ,  $C = \frac{2\sqrt{\rho\rho'}}{1 + \rho\rho'}$ , 显然  $B$  和  $C$  总是小于 1 的正数。

由于方程(12)含有四个未知数,分别是与入射光强度有关常数  $A_0$  和与反射面  $P1, P2$  反射率有关的常数  $B, C$  及反射面  $P1$  上初次反射光与透射光相位差  $\varphi$ , 多光束干涉相位的求解一般是基于四步长相移法<sup>[7,8]</sup>。该方法是记录下初始状态的干涉信号,将待测面按相同的相位差  $2\epsilon$  平移三次,分别记录下相应的干涉信号,则干涉信号  $I_1, I_2, I_3, I_4$  对应的相位分别为  $\varphi - 3\epsilon, \varphi - \epsilon, \varphi + \epsilon, \varphi + 3\epsilon$ 。将这四组数带入方程(12),消去常数  $A_0, B, C$ , 则有方程

$$\tan^2 \varphi = \frac{Q}{Q - P} \tan^2 \epsilon, \quad (13)$$

其中

$$P = \frac{4\cos^2 \epsilon - 1}{4\cos^4 \epsilon}, \quad Q = \frac{(I_1 - I_4)(I_2 I_3)}{(I_1 - I_3)(I_2 - I_4)}.$$

方程(10)表示相位  $\varphi$  严格依赖相移步长  $\epsilon$  和干涉信号  $I$ , 因此相移步长  $\epsilon$  和干涉信号  $I$  的控制和测量误差将直接影响到相位  $\varphi$  的测量准确度。从方程(12)可见,干涉信号  $I$  也取决于相移步长  $\epsilon$ , 在对相移步长  $\epsilon$  和干涉信号  $I$  相同的控制和测量准确度下,如何选择相移步长  $\epsilon$  是提高相位  $\varphi$  测量准确度的关键。根据误差理论(13)式中相位测量误差  $\Delta\varphi$  可表示为

$$(\Delta\varphi)^2 = \sum_{i=1}^4 \left( \frac{\partial\varphi}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial I_i} \Delta I_i \right)^2 + \left( \frac{\partial\varphi}{\partial\epsilon} \Delta\epsilon \right)^2, \quad (14)$$

其中  $\Delta I_i$  为第  $i$  次干涉光强信号的测量误差,  $\Delta\epsilon$  为相移步长的控制误差。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial Q} = \frac{1}{2Q} \tan \varphi \left[ 1 - \left( \frac{\sin \varphi}{\sin \epsilon} \right)^2 \right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I_1} = Q \left[ \frac{1}{I_1 - I_4} - \frac{1}{(I_1 - I_3)} \right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I_2} = Q \left[ \frac{1}{I_2 - I_3} - \frac{1}{(I_2 - I_4)} \right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I_3} = Q \left[ \frac{1}{I_1 - I_3} - \frac{1}{(I_2 - I_3)} \right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I_4} = Q \left[ \frac{1}{I_2 - I_4} - \frac{1}{(I_1 - I_4)} \right],$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\epsilon} = \cot \varphi \frac{Q \cos^2 \varphi}{2(Q - P) \cos^2 \epsilon} \times \left[ \frac{1}{Q - P} \tan^3 \epsilon (2 - \sec^2 \epsilon) + 2 \sin \epsilon \right]. \quad (15)$$

仍以中国计量科学研究院精密菲索干涉仪的设计参数研究相位测量误差  $\Delta\varphi$  与步长  $\epsilon$  的关系。设入射光波长为 632.8 nm, 步长控制误差  $\Delta\epsilon = 0.3$  nm, 为了分析方便,假设干涉信号测量误差均相同且为最大信号  $I_{\max} = A_0^2 \left[ 1 - \frac{B}{1 + C} \right]$  的 0.5%, 即  $\frac{\Delta I_i}{I_{\max}} = 0.005$ 。图 6 给出了相位在一个干涉周期 ( $0 < \varphi < 2\pi$ ) 内, 相位测量误差  $\Delta\varphi$  随步长  $\epsilon$  的变化关系。

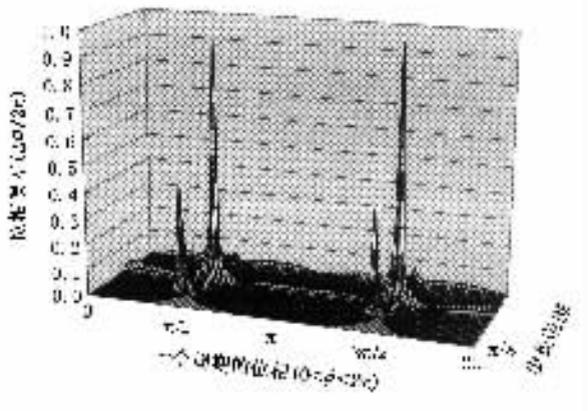


图 6 相位测量误差  $\Delta\varphi/2\pi$  随相位  $\varphi$  和步长  $\epsilon$  的变化关系

$$\left( \rho = 0.035, \rho' = 0.35, \Delta\epsilon = 0.3 \text{ nm}, \frac{\Delta I_i}{I_{\max}} = 0.005 \right)$$

从图 6 可见,相位误差明显依赖干涉光的初相差,当干涉光相差等于或接近  $\pi/2$  和  $3\pi/2$  时相位误差达到峰值,此时相位误差同时还依赖于相移步长。图中可见,只有当相移步长  $\epsilon$  等于或接近  $\pi/4$  时相位误差最小。从图 6 可以得出结论:1)为减小相移误差需要使相移步长  $\epsilon$  等于或尽可能接近  $\pi/4$ ;2)对于某些特殊应用场合,如精确测长等,当采用其他步长(范围在  $3\pi/16 < \epsilon < 5\pi/16$ )时,可通过调整菲索反射面或待测面位置控制干涉光的初始相位,避免干涉光初始相差等于或接近  $\pi/2$  ( $\pi/4 < \varphi < 3\pi/4$ ) 和  $3\pi/2$  ( $5\pi/4 < \varphi < 7\pi/4$ ),同样可以实现较高的相位测量准确度;3)从图中可见,为降低相位测量的不确定度,调整干涉光的初相位差是一种比控制相移步长更为必要、更为有效的方法。

### 5. 相位测量的不确定度评估

由于本文的推导不包含任何形式的近似,因此不存在任何因算法引起的光强误差.从(14)式可见,当优化步长确定以后,相位测量误差只取决于步长的控制误差和光强信号的测量误差.为了研究步长控制误差对相位的影响,取  $\epsilon = \pi/4$ ,将(13)式对  $\epsilon$  求导,可得

$$\Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\epsilon}\Delta\epsilon. \tag{16}$$

将(15)式代入,即可求得相位误差与步长控制误差的关系.图7显示了相位测量误差在  $0 < \varphi < 2\pi$  范围内,随步长控制误差的变化关系.

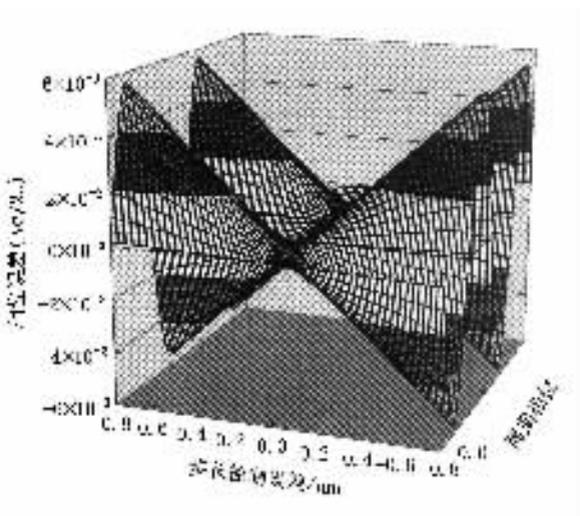


图7 相位测量误差与  $\varphi$  和  $\Delta\epsilon$  的关系

图7可见相位误差随步长控制误差的增加而增加.为了提高相位的测量准确度必须尽可能准确地控制相移步长.再看另一个影响相位测量准确度的误差源——光强测量误差,利用(14)式,不考虑步长控制误差,研究相位测量误差  $\Delta\varphi$  在  $0 < \varphi < 2\pi$  范围内随光强测量误差的变化关系.

图8显示了相位测量误差与光强测量误差的线性依赖关系.为提高菲索干涉仪相位测量的准确度,不仅需要最大限度的提高相移步长的控制准确度,也需提高光强信号测量准确度.图9是根据(11)式评估的文中提及的菲索干涉仪总标准测量不确定度随初相位的变化关系.

图9正是图5中  $\epsilon = \pi/4$  时的截面图,图中给出了约0.002个干涉级次,相当于测量不确定度为0.7 nm.

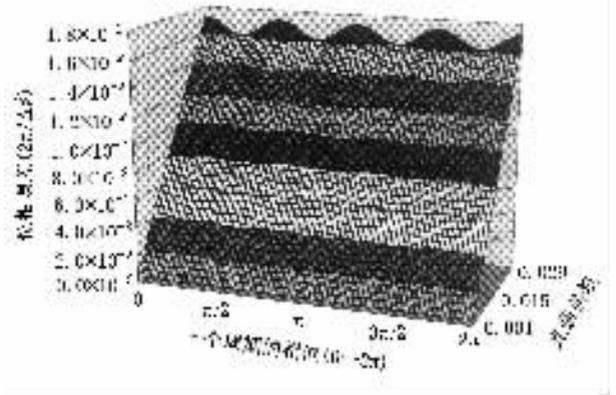


图8 相位测量误差与  $\varphi$  和  $\Delta I/I_{max}$  的关系

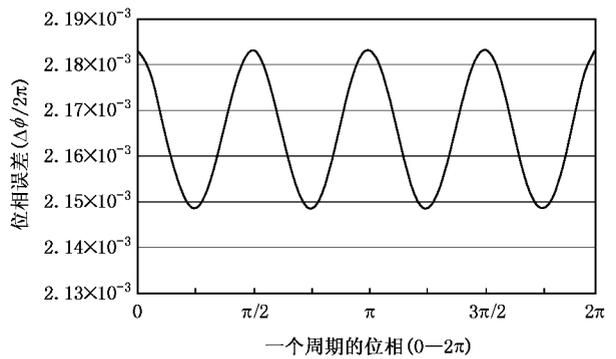


图9 本文干涉仪标准不确定度随相位的变化关系

### 6. 结 论

对于菲索、法布里-伯罗等干涉仪由于在标准板和待测面之间产生了光束的多次反射,导致了传统的四步、五步算法不再精确成立.本文的研究结论表明,对于算法引起的相同的光强误差,五步算法具有比四步算法高得多的相位准确度,这与传统结论是一致的.其次,由于考虑了多光束干涉,从而避免了由于算法引起的光强误差;一个极其重要的发现是,对于四步算法而言,为了提高相位测量的准确度,一方面要尽可能提高相移控制准确度和光强测量准确度,另一方面相移步长的选择特别是干涉光初相位的选择对于减小相位测量误差是至关重要的;从本文的研究结论上看,似乎传统的五步算法对光强误差并不十分敏感,但这仅仅局限在低反射率的基础上,对于高反射率本文研究的多光束算法的优势是十分明显的.从理论上来说,无论是双光束干涉或者多光束干涉五步法均优于四步法,但是由于多光束干涉五步法所产生的算法过于复杂,因此国内外

学者在这一领域尚无新的研究成果. 目前笔者正在 致力于该问题的研究, 希望能取得新的进展.

- 
- [ 1 ] Dong X M *et al* 2002 *Chin. J. Scientific Instrumen* **23** 843 ( in Chinese ) [ 董小满等 2002 仪器仪表学报 **23** 843 ]
- [ 2 ] Li Y Q *et al* 2003 *Chin. J. Scientific Instrumen* **24** 498 ( in Chinese ) [ 黎永前等 2003 仪器仪表学报 **24** 498 ]
- [ 3 ] Guanming Lai and Toyohiko Yatagai. 1991 *J. Opt. Soc. Am.* **A 8** 822
- [ 4 ] Dorrio B V *et al* 1996 *Applied Optics* **35** 61
- [ 5 ] Yves Surrel 1996 *Applied Optics* **35** 51
- [ 6 ] Hariharan P 1987 *Applied Optics* **26** 258
- [ 7 ] Bonsch G and Bohme H 1989 *Optik* **82**( 4 ) 161
- [ 8 ] Vikram C S 2000 *Optik* **111** 563

## Phase-shift algorithm research based on multiple-beam interference principle \*

Luo Zhi-Yong Yang Li-Feng Chen Yun-Chang

( *National Institute of Metrology ,Beijing 100013 , China* )

( Received 5 November 2004 ; revised manuscript received 13 December 2004 )

### Abstract

Aiming at the application of precision measurement of length , the phase-shift algorithm including algorithm error and optimum range of the phase-shift step was studied by using the multiple-beam interference principle in this paper. We have derived an accurate formula for the intensity distribution of multiple-beam interference ( multiple reflection by and transmission through the optical surface ) in the basic principle of interference optics. Based on this formula and the numerical analysis technique , we have found the optimum value of the phase-shift step and the applicable range of the initial phase difference between interference beams by using the precision measurement of length with Fizeau interferometer. We also found the respective relationships between the original phase error and the phase of four-step algorithm ( and of the five-step algorithm ) due to the intensity error from cosine dependence. We have assessed the uncertainty from several main error sources of the multiple-beam interference.

**Keywords** : phase-shifting algorithm , multiple-beam interference , precision length measurement , uncertainty

**PACC** : 0630E , 0760 , 0620

---

\* Project supported by the Ministry of Science and Technology of China ( Grant No.2002DEA20014 ).