第 54 卷 第 7 期 2005 年 7 月
1000-3290/2005/54(07)/3123-09

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.7,July,2005

间歇性大气湍流中光传播问题的近 Gauss 极限分析*

陈京元[1)†] 陈式刚[2)] 王光瑞[2)]

[1)](中国工程物理研究院北京研究生部,北京 100088)

[2)](北京应用物理与计算数学研究所,北京 100088)

(2004 年 11 月 10 日收到;2004 年 12 月 9 日收到修改稿)

间歇性是湍流的重要特征,多年来一直是湍流研究的核心内容之一.考虑大气湍流中的光传播问题,一般回避其间歇性,假设大气介电起伏满足 Gauss 统计.考虑大气湍流(内)间歇性对光波传播的影响.考虑到大气介电起伏方差较小的事实,将光场统计矩方程在 Gauss 场附近展开到四阶累计量,分析其近似解.进一步,以层次结构模型为基础,着重研究了光场二阶统计矩的间歇性效应.研究表明,大气湍流间歇性对光场的影响很小.

关键词:光波传播,大气湍流,间歇性

PACC:4220,4725,9265

1.引　　言

当光波在大气中传播时,由于大气湍流的作用,其光束质量将会极大地恶化.上世纪五六十年代,Tatarskii 等人通过求解光学基本方程,最先建立起光场的统计性质与湍流介质折射率随机起伏统计性质之间的关系[1].这一工作是大多数后续工作的基础,将它们应用到各种具体场合,已结出了丰硕的果实.

Tatarski 等人的理论是建立在 Kolmogorov 湍流理论(K41)基础之上的.Kolmogorov 在 1941 年建立的局地均匀各向同性湍流理论[2],是湍流漫长研究历史中一个重要里程碑,它给出小尺度湍流一种普适的定量关系.而且,小尺度湍流规律的普适性从此成为湍流理论界根深蒂固的核心观念,至今仍然影响着湍流理论研究的方方面面.K41 湍流理论在其建立初期受到大量的实验支持,但随着实验技术的提高和理论研究的进一步深入,K41 湍流理论乃至小尺度湍流的普适性受到越来越广泛的怀疑.Kolmogorov 在 1962 年改进了 K41 的结果,得到著名的 K62 理论.这次改进的影响深远,至今余波尚存,目前人们仍然热衷于对 K41 进行各种形式的改造[3].现在人们普遍认为,尽管对 K41 的偏离只是一个经验事实,其存在性亦由于不同程度实验的含糊性而未得到充分证实,但我们似乎已经不可能回到 K41 意义上的普适性了.实际上,甚至小尺度湍流本身也依赖于不同流的性质,即小尺度湍流的普适性要比 K62 意义上的普适性更为弱化,乃至根本就不具备什么普适性[4].

问题的核心集中在湍流的阵发性或间歇性上[5].粗言之,间歇性指对 Gauss 分布的偏离.更明确地说,小概率事件比 Gauss 平庸分布所预期的更有可能出现,而且随着尺度的逐渐减小,这种偏离越来越大.湍流界长期的研究结果表明,湍流场具有间歇性,表现在非平庸(非 Gauss)的统计特性,大尺度相干结构的出现,以及反常标度性质(偏离 K41 理论)等方面.标量场同样表现出间歇性.研究表明,标量场具有比速度场更大的间歇性,而且即使是 Gauss 型速度场,其上标量场也具有反常标度性质并出现相干结构.间歇性反映了湍流结构在时空中的不均匀出现或涨落的反常性质,可以用多重分形结构唯象地描述[6].

本文考虑湍流间歇性对光波的影响.湍流是多尺度现象,其间歇性也表现在多个尺度,我们考虑的是小尺度间歇性或内间歇性对光波的影响.关于湍流大尺度间歇性对光传播的影响,Tartaskii 等人在上

* 国家重点基础研究专项经费,国家自然科学基金(批准号:10147201,10247003),激光技术创新基金(批准号:20030512),国家自然科学基金重点项目(批准号:10335010),中国工程物理研究院科学技术基金(批准号:200404430)资助的课题.

†E-mail:jingyuan_chen@yahoo.com.cn

世纪八九十年代进行过考虑[7~9]，他们的分析仍然建立在小尺度湍流 Gauss 统计假设基础之上.最近，我们以一种非 Gauss 场简化模型为基础考虑湍流间歇性的光学效应[10].这种非 Gauss 场简化模型(Poission 场模型)的特征泛函可以解析确定，因此可以像处理 Gauss 性随机介质一样(对 Gauss 场，同样可以解析确定其特征泛函)研究在其中传播的光场的统计性质.然而，大气湍流及其介电起伏状况远非如此一个简单模型即可描述，其真实性质的复杂程度令人望而生畏.当前湍流理论界也无法给出湍流特征泛函的任何可资利用的结果.实际上，湍流百多年历史基本集中于其低阶统计性质的研究，即便如此，当前理论界对湍流的各低阶性质也尚未取得完全一致的认识.本文将以另一种方式研究大气湍流间歇性对光波的影响，这种方法基于如下考虑，认为大气介电常数的随机起伏性质接近 Gauss 统计.在这种条件下，可以将特征泛函在某一阶累积函数截断，而忽略其更高阶部分的贡献.原则上，这种求解方式对于近 Gauss 的弱非 Gauss 场情形是适用的(幸运的是，大气介电起伏一般较弱，属于这种场合)，对于强非 Gauss 性场合就不再适用了.通过分析这种级数形式的解，研究介质非 Gauss 性对光场性质的影响，可以获得处理真实大气湍流中光传播问题的进一步的启发.

本文给出非 Gauss 型随机介质中光场统计矩方程，将统计方程中的湍流量展开到四阶累积函数项，得到间歇性大气湍流条件下的近似方程，并讨论了其求解问题，进一步讨论在实际应用中特别重要的光场二阶统计矩，以层次结构模型[11](对数 Poission 模型)为基础求出二阶矩展开到四阶累积函数项的解.

2. 非 Gauss 随机介质中光场统计矩方程

首先给出 Markov 性假设仍然成立时非 Gauss 随机介质中光场统计矩方程.记空间位置 $\boldsymbol{r}$ 处的光波场为 $u(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{\rho}, z)\exp(\mathrm{i}k_0 z)$，其中 z 为传播方向坐标，$\boldsymbol{\rho}$ 表横截方向坐标，k_0 为波数，容易推出一般统计矩(以$\langle\cdots\rangle$表统计平均)

$$\Gamma_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z) = \langle u(\boldsymbol{\rho}_1,z)\cdots u(\boldsymbol{\rho}_n,z) \times u^*(\boldsymbol{\rho}'_1,z)\cdots u^*(\boldsymbol{\rho}'_m,z)\rangle, \tag{1}$$

所满足的方程为

$$2\mathrm{i}k_0\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\Gamma_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z)}{p_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z,0)}\right] + \frac{\hat{L}_{nm}\Gamma_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z)}{P_{nm}(\boldsymbol{\rho}'_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z,0)} = 0, \tag{2}$$

或

$$\left[2\mathrm{i}k_0\frac{\partial}{\partial z} + \hat{L} + 2\mathrm{i}k_0\Omega_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z)\right] \times \Gamma_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z) = 0, \tag{3}$$

其中，算符

$$\hat{L}_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\Delta_T(\boldsymbol{\rho}_I) - \sum_{j=1}^{m}\Delta_T(\boldsymbol{\rho}'_j), \tag{4}$$

$$\Omega_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z) \equiv -\frac{\partial}{\partial z}[\ln P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z,0)], \tag{5}$$

$$\begin{aligned}P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z,z') &= \Phi\left\{\frac{k_0}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\delta(\cdot-\boldsymbol{\rho}_i) - \sum_{j=1}^{m}\delta(\cdot-\boldsymbol{\rho}'_j)\right];z,z'\right\}\\ &= \left\langle\exp = \left\{\frac{\mathrm{i}k_0}{2}\int_{z'}^{z}\left[\sum_{i=1}^{n}\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_i,\xi) - \sum_{j=1}^{m}\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}'_j,\xi)\right]\mathrm{d}\xi\right\}\right\rangle,\end{aligned} \tag{6}$$

其中(6)式中函数 Φ 表示随机场特征泛函.例如，对于一般随机场 $f(x)$，其特征泛函定义为

$$\Phi[u(\cdot)] = \langle\exp[\mathrm{i}\int f(x)u(x)\mathrm{d}x]\rangle,$$

这里 $u(\cdot)$表示任意函数.

下面着重分析平均场、二阶矩及四阶矩方程.平均场方程为

$$\frac{\partial\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle}{\partial z} - \frac{\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle}{P(\boldsymbol{\rho},z,0)}\frac{\partial}{\partial}ZP(\boldsymbol{\rho};z,0) + \frac{1}{2\mathrm{i}k_0}\Delta\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle = 0. \tag{7}$$

对统计均匀媒质，$P(\boldsymbol{\rho};z,0) = P(z)$，即此函数不依赖于 $\boldsymbol{\rho}$，可进一步将方程化简为

$$2\mathrm{i}k_0\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle}{P(z)}\right] + \Delta\left[\frac{\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle}{P(z)}\right] = 0, \tag{8}$$

可以看出，$\frac{\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle}{P(z)}$的方程与均匀介质中光场 $u_0(z,\boldsymbol{\rho})$的方程相同，这样，容易求出此方程的解为

$$\langle u(\boldsymbol{\rho},z)\rangle = P(z)u_0(\boldsymbol{\rho},z). \tag{9}$$

取 $n = m = 1$，即得二阶矩 $\Gamma_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z) = \langle u(\boldsymbol{\rho},z)u^*(\boldsymbol{\rho}',z)\rangle$满足的方程如下：

$$2\mathrm{i}k_0\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\Gamma_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z)}{\Gamma_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z,0)}\right]$$

$$+\frac{\Delta_1-\Delta'_1}{P_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z,0)}\Gamma_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z)=0,\tag{10}$$

或

$$\left[2\mathrm{i}k_0\frac{\partial}{\partial z}+(\Delta_1-\Delta'_1)+2\mathrm{i}k_0\Omega_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z)\right]\times\Gamma_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z)=0.\tag{11}$$

如果媒质是统计均匀的,此时 $P_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z,0)$ 仅依赖于观察点距离,引入新的变量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}'_1$ 及 $\boldsymbol{R}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\rho}_1+\boldsymbol{\rho}'_1)$,则方程可改写为

$$\mathrm{i}k_0\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{R};z)}{P_{11}(\boldsymbol{s},z)}\right]+\frac{1}{P_{11}(\boldsymbol{s},z)}\frac{\partial^2\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{R};z)}{\partial\boldsymbol{s}\partial\boldsymbol{R}}=0,\tag{12}$$

或

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+\Omega_{11}(\boldsymbol{s},z)-\frac{\mathrm{i}}{k_0}\frac{\partial^2}{\partial\boldsymbol{s}\partial\boldsymbol{R}}\right]\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{R};z)=0.\tag{13}$$

如果光源为统计均匀完全相干光,初始条件 $\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{R};0)=\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},0)$,显然二阶矩 $\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{R};z)=\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},z)$ 也不依赖于 $\boldsymbol{R}$,于是上式最后一项消失,此时容易求出解为

$$\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},z)=P_{11}(\boldsymbol{s},z)\times\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},0).\tag{14}$$

对于一般初始条件,二阶矩方程的解可以表示为

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{R};z)=&\left(\frac{k_0}{2\pi z}\right)\iint\mathrm{d}\boldsymbol{s}_0\mathrm{d}\boldsymbol{R}_0\Gamma_{11}(\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{R}_0;0)\\&\times\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_0}{z}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0)\right.\\&\left.+\int_0^z\Omega_{11}\left[\boldsymbol{s}_0+\frac{\xi}{z}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0),z\right]\mathrm{d}\xi\right\}.\end{aligned}\tag{15}$$

四阶矩 $\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2;z)=\langle u(\boldsymbol{\rho}_1,z)u^*(\boldsymbol{\rho}'_1,z)u(\boldsymbol{\rho}'_2,z)u^*(\boldsymbol{\rho}'_2,z)\rangle$满足的方程为

$$2\mathrm{i}k_0\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2;z)}{P_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2;z,0)}\right]+\frac{\hat{L}_{22}\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2;z)}{P_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2;z,0)}=0,\tag{16}$$

或

$$\left[2\mathrm{i}k_0\frac{\partial}{\partial z}+\hat{L}+2\mathrm{i}k_0\Omega_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2;z)\right]\times\Gamma_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2;z)=0,\tag{17}$$

其中算符 $\hat{L}=\Delta_{T_1}+\Delta_{T_2}-\Delta_{T'_1}-\Delta_{T'_2}$.

四阶矩方程一般无法解析积出.

3. 按各阶累积函数的级数展开

由方程(2)及(3)可见,非 Gauss 介质中光传播问题的关键在于求解函数

$$\begin{aligned}&P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z,z')\\&=\Phi\left\{\frac{k_0}{2}\left[\sum_{i=1}^n\delta(\cdot-\boldsymbol{\rho}_i)-\sum_{j=1}^m\delta(\cdot-\boldsymbol{\rho}'_j)\right];z,z'\right\}\\&=\left\langle\exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_0}{2}\int_{z'}^zQ(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\right\rangle,\end{aligned}\tag{18}$$

或求解函数

$$\Omega_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z)=-\frac{\partial}{\partial z}[\ln P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z,0)],\tag{19}$$

其中

$$Q(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_m;z)=\sum_{i=1}^n\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_i,z)-\sum_{j=1}^m\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}'_j,z).$$

假设随机介质沿传播方向具有 Markov 性质,对累积函数有

$$\begin{aligned}K_n(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n)&=\left\langle\prod_{i=1}^k\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}_i)\right\rangle_C=\left\langle\prod_{i=1}^k\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}_i,z_i)\right\rangle_C\\&=\delta(z_1-z_2)\delta(z_2-z_3)\cdots\delta(z_{k-1}-z_k)\\&\quad\times A_k(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}_k),\end{aligned}\tag{20}$$

其中 $A_k(\boldsymbol{\rho}_1,\cdots,\boldsymbol{\rho}'_k)=\int\mathrm{d}z_1\cdots\int\mathrm{d}z_{k-1}K_n(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n)$,对于均匀介质,它与具体 z 值无关.一般地,累积函数可由关联函数 $B_n(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_n)=\left\langle\prod_{i=1}^k\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{r}_i)\right\rangle$ 求得,二者前几阶间的关系为

$$K_1(\boldsymbol{r})=B_1(\boldsymbol{r}),\tag{21}$$

$$K_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=B_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)-B_1(\boldsymbol{r}_1)B_1(\boldsymbol{r}_2),\tag{22}$$

$$\begin{aligned}K_3(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)=&B_3(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)\\&-3\times\{B_1(\boldsymbol{r}_1)B_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)\}_{(1,2,3)}\\&+2\times B_1(\boldsymbol{r}_1)B_2(\boldsymbol{r}_2)B_1(\boldsymbol{r}_3),\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}&K_4(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)\\&=B_4(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)-4\times\{B_1(\boldsymbol{r}_1)B_3(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)\}_{(1,2,3,4)}\\&\quad-3\times\{B_2(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)B_2(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)\}_{(1,2,3,4)}\\&\quad+12\times\{B_1(\boldsymbol{r}_1)B_1(\boldsymbol{r}_2)B_2(\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4)\}_{(1,2,3,4)}\\&\quad-6\times B_1(\boldsymbol{r}_1)B_1(\boldsymbol{r}_2)B_1(\boldsymbol{r}_3)B_1(\boldsymbol{r}_4),\end{aligned}\tag{24}$$

其中,记号 $\{\}_{(1,2,\cdots,n)}$ 表示在变量集合 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_n$ 上的所有可能置换的平均值.例如

$$\{B_1(\boldsymbol{r}_1)B_2(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)\}_{(1,2,3)}$$

$$= \frac{1}{3} \times [B_1(\boldsymbol{r}_1) B_2(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3) B_1(\boldsymbol{r}_2) B_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_3) + B_1(\boldsymbol{r}_3) B_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)]. \tag{25}$$

将 $P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z, z')$ 按各阶累积函数以级数形式展开,有

$$P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z, z') = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\mathrm{i}k_0}{2} \right)^k \int_{z'}^{z} \mathrm{d}z_1 \int_{z'}^{z} \mathrm{d}z_2 \cdots \int_{z'}^{z} \mathrm{d}z_k C_k(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots \boldsymbol{\rho}'_m; z_1, \cdots, z_k) \right\}, \tag{26}$$

其中 $C_k(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z_1, \cdots, z_k)$ 为 $Q(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z)$ 的 k 阶累积函数,即

$$C_k(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z_1, \cdots, z_k) \equiv \left\langle \prod_{i=1}^{k} Q(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z_k) \right\rangle_c . \tag{27}$$

利用 Markov 性可进一步将 $P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z, z')$ 简化.我们只保留到四阶累积函数项,结果为

$$\begin{aligned} &P_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z, z') \\ &= \exp\left[-\frac{k_0^2}{8}(z - z') F_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m) \right] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k_0^3}{48}(z - z') M_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m) \right] \\ &\quad \times \exp\left[\frac{k_0^4}{384}(z - z') N_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m) \right]. \end{aligned} \tag{28}$$

对于 $\Omega_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m; z)$,则为

$$\begin{aligned} \Omega_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m) &= \frac{k_0^2}{8} F_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m) \\ &\quad + \mathrm{i}\frac{k_0^3}{48} M_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m) \\ &\quad - \frac{k_0^4}{384} N_{nm}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m), \end{aligned} \tag{29}$$

它与 z 无关.上两式中

$$\begin{aligned} &F_{n,m}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}_m) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_2(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j) - 2 \times \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} A_2(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}'_l) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} A_2(\boldsymbol{\rho}'_k, \boldsymbol{\rho}'_l), \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &M_{n,m}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_3(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_k) \\ &\quad - 3 \times \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} A_3(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}'_k) \\ &\quad + 3 \times \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} A_3(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}'_j, \boldsymbol{\rho}'_k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} A_3(\boldsymbol{\rho}'_i, \boldsymbol{\rho}'_j, \boldsymbol{\rho}'_k), \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} &N_{n,m}(\boldsymbol{\rho}_1, \cdots, \boldsymbol{\rho}'_m) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} A_4(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\rho}_l) \\ &\quad - 4 \times \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} A_4(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}_k, \boldsymbol{\rho}'_l) \\ &\quad + 6 \times \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} A_4(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}_j, \boldsymbol{\rho}'_k, \boldsymbol{\rho}'_l) \\ &\quad - 4 \times \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} A_4(\boldsymbol{\rho}_i, \boldsymbol{\rho}'_j, \boldsymbol{\rho}'_k, \boldsymbol{\rho}'_l) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} A_4(\boldsymbol{\rho}'_i, \boldsymbol{\rho}'_j, \boldsymbol{\rho}'_k, \boldsymbol{\rho}'_l). \end{aligned} \tag{32}$$

下面我们分别考虑平均场,二阶矩,及四阶矩方程.

3.1. 平均场方程

展开到四阶累积量的平均场方程为

$$2\mathrm{i}k_0 \frac{\partial \langle u(\boldsymbol{\rho}, z) \rangle}{\partial z} + \Delta \langle u(\boldsymbol{\rho}, z) \rangle + 2\mathrm{i}k_0 \Omega_{10}(\boldsymbol{\rho}) \langle u(\boldsymbol{\rho}, z) \rangle = 0, \tag{33}$$

这里

$$\Omega_{10}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{k_0^2}{8} F_{10}(\boldsymbol{\rho}) + \mathrm{i}\frac{k_0^3}{48} M_{10}(\boldsymbol{\rho}) - \frac{k_0^4}{384} N_{10}(\boldsymbol{\rho}), \tag{34}$$

其中

$$F_{10}(\boldsymbol{\rho}) = \int B_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) \mathrm{d}z = \sigma^2 L_0, \tag{35}$$

$$M_{10}(\boldsymbol{\rho}) = \iint B_3(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) \mathrm{d}^2 z = \sigma^3 L_0^2, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} N_{10}(\boldsymbol{\rho}) &= \iiint \{B_4(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) - 3 \times [B_2(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})]^2\} \mathrm{d}^3 z \\ &= -2\sigma^4 L_0^3 \end{aligned} \tag{37}$$

为与 $\boldsymbol{\rho}$ 及 z 无关的常数(对统计均匀湍流介质).上面几式中,σ 为湍介质介电起伏均方根方差,L_0 表湍流关联长度,即为外尺度.

上面方程容易解出,结果为

$$\begin{aligned} \langle u(\boldsymbol{\rho}, z) \rangle &= u_0(\boldsymbol{\rho}, z) \exp[-\Omega_{10}(\boldsymbol{\rho}) z] \\ &= u_0(\boldsymbol{\rho}, z) \exp\left(-\frac{k_0^2}{8} \sigma^2 L_0 z \right) \\ &\quad \times \exp\left[-\left(\mathrm{i}\frac{k_0^3}{48} \sigma^3 L_0^2 + \frac{k_0^4}{192} \sigma^4 L_0^3 \right) z \right], \end{aligned} \tag{38}$$

其中,$u_0(\boldsymbol{\rho}, z)$ 为真空中传播方程的解.可以发现,当随机介质不再具有 Gauss 型统计性质时,结果将

多出后一个指数因子. 一般而言，这个因子是复值的；但当介电常数起伏单点分布函数对称时，则为实数. 显然，湍流场非 Gauss 部分贡献的大小由两个指数衰减因子大小之比 $\alpha = \frac{1}{6}\mathrm{i}\sigma k_0 L_0 + \frac{1}{24}\sigma^2 k_0^2 L_0^2$ 决定：湍流越强（σ 越大），光波长越短（k_0 越大），湍流场关联长度 L_0 越大，则非 Gauss 部分的贡献也越大. 对于大气湍流中可见光传播问题（$k_0 \sim 10^6\mathrm{m}$，$L_0 \sim 10^2\mathrm{m}$），通常情况下湍流都比较弱（$\sigma \sim 10^{-9}$），非 Gauss 部分（高阶矩）的贡献相对于 Gauss 部分（二阶矩）是很小的（$|\alpha| \ll 1$），因而可以忽略不计.

3.2. 二阶矩方程

与平均场类似，统计均匀介质中传播的光场二阶矩

$$\Gamma_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z) = \langle u(\boldsymbol{\rho},z)u^*(\boldsymbol{\rho}',z)\rangle = \Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\rho};z) \tag{39}$$

的方程现在可写为

$$\frac{\partial \Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\rho};z)}{\partial z} - \frac{\mathrm{i}}{k_0}\frac{\partial^2 \Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{\rho};z)}{\partial \boldsymbol{s}\partial \boldsymbol{R}} + \Omega_{11}(\boldsymbol{s})\Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{R};z) = 0, \tag{40}$$

式中

$$\Omega_{11}(\boldsymbol{s}) = \frac{k_0^2}{8}F_{11}(\boldsymbol{s}) + \mathrm{i}\frac{k_0^3}{48}M_{11}(\boldsymbol{s}) - \frac{k_0^4}{384}N_{11}(\boldsymbol{s}), \tag{41}$$

它是只与观察点间距离 $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'$ 有关的湍流特征量，其中

$$\begin{aligned} F_{11}(\boldsymbol{s}) &= A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}) - 2\times A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') + A(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}') \\ &= D_2(\boldsymbol{s})L_0, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} M_{11}(\boldsymbol{s}) &= A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}) - 3\times A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') \\ &\quad + 3\times A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}') - A(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}') \\ &= D_3(\boldsymbol{s})L_0^2, \end{aligned} \tag{43}$$

$$\begin{aligned} N_{11}(\boldsymbol{s}) &= A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}) - 4\times A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') \\ &\quad + 6\times A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}') \\ &\quad - 4\times A(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}') \\ &\quad + A(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\rho}') \\ &= \{D_4(\boldsymbol{s}) - 3\times[D_2(\boldsymbol{s})]^2\}L_0^3. \end{aligned} \tag{44}$$

这里 $D_n(\boldsymbol{s}) = \langle[\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}) - \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}')]^n\rangle$ 即为随机介质介电起伏的 n 阶结构函数.

容易求出方程的解. 对于一般初始条件，其解可以表示为

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{R};z) &= \left(\frac{k_0}{2\pi z}\right)\iint \mathrm{d}\boldsymbol{s}_0\mathrm{d}\boldsymbol{R}_0\Gamma_{11}(\boldsymbol{s}_0,\boldsymbol{R}_0;0) \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_0}{z}(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}_0)(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^z \Omega_{11}\left[\boldsymbol{s}_0 + \frac{\xi}{z}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}_0)\right]\mathrm{d}\xi\right\}. \end{aligned} \tag{45}$$

可以发现，随机介质高于二阶的结构函数 $D_4(\boldsymbol{s})$，$D_3(\boldsymbol{s})$ 等进入到光场统计性质之中. 这是与 Gauss 随机介质场中传播光场不同的特点，对于后者，只需要二阶结构函数即可完全确定随机介质以及其间传播的光场的统计性质.

利用各种唯象模型或实验结果可以将二阶矩方程的解表达为完全显式的形式. 鉴于光场二阶矩的重要性，下一节将以层次结构模型为基础进一步考虑这个问题.

3.3. 四阶矩方程

容易写出光场四阶统计矩所满足的展开到四阶累积量的方程为

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\mathrm{i}}{2k_0}[\Delta_{T_1} + \Delta_{T_2} - \Delta_{T_1}' - \Delta_{T_2}'] + \Omega_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2)\right\}\Gamma_{22} = 0, \tag{46}$$

这里

$$\begin{aligned} \Omega_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2) &= \frac{k_0^2}{8}F_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2) \\ &\quad + \mathrm{i}\frac{k_0^3}{48}M_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2) \\ &\quad - \frac{k_0^4}{384}N_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2), \end{aligned} \tag{47}$$

它是由 $\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2$ 四点确定的与湍流有关的函数.

下面进一步写出 $\Omega_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2)$ 的具体表达式，将其与随机介质有关统计物理量联系起来.

$F_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2)$ 即为 Gauss 场部分，其表达式容易写出为

$$\begin{aligned} &F_{22}(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1;\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2) \\ &= A(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_1) + 2\times A(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2) \\ &\quad + A(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}_2) - 2\times[A(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_1) \\ &\quad + A(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}'_2) + A(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_1) \\ &\quad + A(\boldsymbol{\rho}_2,\boldsymbol{\rho}'_2)] + A(\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}'_1) \\ &\quad + 2\times A(\boldsymbol{\rho}'_1,\boldsymbol{\rho}'_2) + A(\boldsymbol{\rho}'_2,\boldsymbol{\rho}'_2) \\ &= [D_2(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}'_1) + D_2(\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}'_2) \\ &\quad + D_2(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}'_1) + D_2(\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}'_2) \end{aligned}$$

$$- D_2(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) - D_2(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2)] L_0, \tag{48}$$

与 Gauss 场的已知结果一致.

M_{22}形式比较复杂,最后结果如下:

$$\begin{aligned} & M_{22}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1; \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2) \\ = & L_0^2 [D_3(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_1) + D_3(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}'_2) \\ & + 3 \times B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) + 3 \times B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_2) \\ & - 3 \times B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_2) - 3 \times B(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_2) \\ & + 3 \times B(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}_2) + 3 \times B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_2, \boldsymbol{\rho}'_2) \\ & - 3 \times B(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) - 3 \times B(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, \boldsymbol{\rho}'_2) \\ & + 6 \times B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) + 6 \times B(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2) \\ & - 6 \times B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) - 6 \times B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2)]. \end{aligned} \tag{49}$$

可见,当将级数展开到三阶累积量时,湍流三阶结构函数将出现在光场统计之中.除此之外,类似$B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$的两点三阶关联函数,以及类似$B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}_2)$的三点三阶关联函数也将决定光场的具体统计性质.

$N_{22}(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1; \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2)$的具体形式也易求出,但繁琐异常,这里不再继续写出.但很容易知道如下事实:当将级数展开到四阶累积量时,除了随机介质的四阶结构函数以外,类似于$B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2)$与$B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_2)$的两点四阶关联函数、类似于$B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_1)$的三点四阶关联函数、以及四点四阶关联函数$B(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2)$将进入光场四阶统计矩方程之中,从而它们也将对光场性质产生影响.

显然,当研究光场四阶矩等高于二阶的统计性质时,传统的基于两点统计的湍流经典理论已经远远无法满足需要.我们需要湍流场的更完全的统计性质.关于湍流多点关联函数理论,人们只有在极其理想的 Kraichnan 模型[12]取得一些初步的结论,然而这些结论与真实湍流的具体性质有相当大的差距.另一方面,光场四阶矩方程本身非常复杂,即使在介质涨落满足 Gauss 性质的条件下,其理论求解也是随机介质中光传播领域中尚未解决的难题(一般都是以数值模拟方式研究).所以,理论上求解上面非 Gauss 性媒质中光场四阶矩方程有相当大难度,我们将不再涉及光场四阶矩方程.

4. 唯象模型在二阶矩方程中的应用

容易发现,光场二阶统计矩仅仅通过湍流两点统计性质即可完全确定.因此,如果具备两点概率分布函数,原则上可以得到二阶矩方程的严格解.实际上,传统的湍流理论很少涉及两点以上的统计而基本上都是以两点统计(尤其是结构函数)为研究对象,在其长期的研究历史中建立了许多关于两点统计的理论和实验结果.我们可以进一步应用湍流两点统计的这些结果,考虑光场二阶统计性质.这一部分我们以层次结构(对数 Poission)模型[11]为例,讨论湍流间歇性对光场二阶统计矩的影响.

4.1. 折射率起伏增量差统计分布

为了简化问题的考虑,我们直接将大气折射率起伏 $\tilde{n}$ 或介电常数起伏 $\tilde{\varepsilon}$ 看作被动标量.对于被动标量,目前文献中出现过两种层次结构模型:Ruiz-Chavarria[13]给出的结构函数在惯性区标度律为

$$\xi_p = \gamma p + C(1 - \beta^p), \tag{50}$$

其中 $\gamma = 0.06 \pm 0.02$, $C = 0.8 \pm 0.1$, $\beta = 0.63$. Cao-Chen 给出的标量标度律为[14]

$$\xi_p = -\frac{1}{36}p + 2\left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{p/6}\right] + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p/2}\right], \tag{51}$$

两者都可看作多重(这里为二重)层次结构标度律

$$\xi_p = \gamma p + C_1(1 - \beta_1^p) + C_2(1 - \beta_2^p) \tag{52}$$

的如下特例:对于 Ruiz-Chavarria 模型, $\gamma = 0.06 \pm 0.02$, $C_1 = 0.8 \pm 0.1$, $\beta_1 = 0.63$, $C_2 = 0$, $\beta_2 = 1$;对于 Cao-Chen 模型, $\gamma = -1/36$, $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, $\beta_1 = (3/4)^{1/6}$, $\beta_2 = (1/2)^{1/2}$.需要指出,两个标度指数在低阶时相差不大(这是自然的,它们的待定系数即是根据低阶标度指数的实验结果确定的),但在高阶时相差很大;其中 Cao-Chen 的标度指数在足够高的阶次后变为负数,似乎不太合理.因此,一般而言,唯象模型也只能较好地描述湍流低阶统计性质.另外,可以认为 K41 标度律对应于 $\gamma = 1/3$, $\beta_1 = 1$, $C_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $C_2 = 0$,这样 K41 线性标度律也可以包含在模型中,下面的所有结果对 Kolmogorov 湍流也适用.

容易证明满足上面二重层次结构标度律时,脉动级串的随机映射 $W_{L_0 l}$ 为联合 Poisson 分布,而且各单变量的分布互不相关.

特征函数为

$$\Psi(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda_1^j \lambda_2^k}{j!k!} \exp\left[\mathrm{i}t\left(\frac{1}{L_0}\right)^{\gamma} \beta_1^j \beta_2^k\right], \tag{53}$$

其中 $\lambda_1 = -C_1 \ln\left(\frac{l}{L_0}\right)$, $\lambda_2 = -C_2 \ln\left(\frac{l}{L_0}\right)$.

于是概率密度函数

$$P(W_{L_0 l}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t)\exp(-\mathrm{i}tW_{L_0 l})\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_1^j\lambda_2^k}{j!k!} \times \delta\left[W_{L_0 l} - \left(\frac{l}{L_0}\right)^{\gamma}\beta_1^j\beta_2^k\right], \quad (54)$$

所以 $W_{L_0 l}$ 满足联合 Poisson 分布,且各变量分布互不相关.

根据随机映射的定义,小尺度(l)增量差概率密度函数可由大尺度(L_0)增量差的概率密度函数表出为

$$P_l(\delta\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_1^j\lambda_2^k}{j!k!}\left(\frac{l}{L_0}\right)^{-\gamma} \times \beta_1^{-j}\beta_2^{-k}P_{L_0}\left[\left(\frac{l}{L_0}\right)^{-\gamma}\beta_1^{-j}\beta_2^{-k}\delta\theta\right], \quad (55)$$

若大尺度(L_0)增量差满足 Gauss 分布(设均值为 0,方差为 σ^2),则有

$$P_l(\delta\theta) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_1^j\lambda_2^k}{j!k!}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\frac{l}{L_0}\right)^{-\gamma}\beta_1^{-j}\beta_2^{-k} \times \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{l}{L_0}\right)^{-2\gamma}\beta_1^{-2j}\beta_2^{-2k}(\delta\theta)^2\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_1^j\lambda_2^k}{j!k!}P_{jk}(l,\delta\theta), \quad (56)$$

其中

$$P_{jk}(l,\delta\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(\frac{l}{L_0}\right)^{-\gamma}\beta_1^{-j}\beta_2^{-k}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{1}{L_0}\right)^{-2\gamma} \times \beta_1^{-2j}\beta_2^{-2k}(\delta\theta)^2\right] \quad (57)$$

为 Gauss 分布.

严格说来,折射率(或介电常数)起伏与被动标量的统计性质并不完全相同.折射率增量差涨落 δn 由位温 $\delta\theta$ 及比湿 δq 两个加性被动标量增量差涨落具有如下关系[15]:

$$\delta n = \frac{\partial n}{\partial\theta}\delta\theta + \frac{\partial n}{\partial q}\delta q = A\delta\theta + B\delta q, \quad (58)$$

其中常数 A,B 分别为

$$A = \frac{\partial n}{\partial\theta} = \frac{-77.6\langle P\rangle}{(v-1)\langle T\rangle^2}\left(1 + \frac{15466\langle q\rangle}{\langle T\rangle}\right)\times 10^{-6},$$

$$B = \frac{\partial n}{\partial q} = \frac{77.6\times 7733}{\langle T\rangle^2}\times 10^{-6}.$$

于是折射率增量差的概率密度函数为

$$P_l(\delta n) = \{P_l(A\delta\theta)\}\otimes\{P_l(B\delta q)\} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j'=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_1^j\lambda_2^k}{j!k!}\mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2} \times \frac{\lambda_1^{j'}\lambda_2^{k'}}{j'!k'!}P_{jkj'k'}(l,\delta n), \quad (59)$$

其中 $\otimes$ 表卷积积分,而

$$P_{jkj'k'}(l,\delta n) = [(A\beta_1^j\beta_2^k)^2 + (B\beta_1^{j'}\beta_2^{k'})^2]^{-1/2}\left(\frac{l}{L_0}\right)^{-\gamma} \times \exp\left\{-\frac{(\delta n)^2}{2\sigma^2}[(A\beta_1^j\beta_2^k)^2 + (B\beta_1^{j'}\beta_2^{k'})^2]^{-1}\left(\frac{l}{L_0}\right)^{-2\gamma}\right\} \quad (60)$$

为 Gauss 分布.可见折射率增量差的概率密度函数仍可表为一系列 Gauss 函数的线性组合,各个 Gauss 分布的权重即为复合 Possion 分布.

利用上述分布,容易知道折射率结构函数具有与被动标量相同的惯性区标度关系,且各阶标度指数仍与被动标量的相同.可求出折射率 2p 阶结构函数为

$$D_{2p}(\delta n) \sim \sum_{m=0}^{p} C_p^m A^{2m}B^{2(p-m)}\left(\frac{l}{L_0}\right)^{\xi_{2m}+\xi_{2(p-m)}} \sim \left(\frac{l}{L_0}\right)^{\xi_{2p}}, \quad (61)$$

上式最后一步是由于标度指数一般具有性质

$$\xi_{2m} + \xi_{2(p-m)} \geqslant \xi_{2p}. \quad (62)$$

4.2. 光场二阶矩方程中的湍流特征量

利用增量差分布函数(56)式,容易知道,$P_{11}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}';z,0) = P_{11}(l = |\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|, z)$ 可以表示为线性组合

$$P_{11}(l,Z) = \left\langle \exp\left\{\frac{\mathrm{i}k_0}{2}\int_0^z[\tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho},\xi) - \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\rho}',\xi)]\,\mathrm{d}\xi\right\}\right\rangle = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_1-\lambda_2}\frac{\lambda_1^j\lambda_2^k}{j!k!}\exp\left[-\frac{k_0^2 z}{8}L_0 D_{jk}(l)\right], \quad (63)$$

其中 $D_{jk}(l)$ 即为介电常数起伏增量差满足 Gauss 分布 $P_{jk}(l,\delta\tilde{\varepsilon})$ 时的二阶矩.

进一步可求得

$$P_{11}(l,z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{k_0^2 zL_0}{8}\right)^m\sigma^{2m}\left(\frac{l}{L_0}\right)^{\xi_{2m}}. \quad (64)$$

根据标度指数的一般性质及 d 'Alembert 判据,容易知道上述交错级数绝对收敛.显然,当结构函数满足 K41 线性标度时,可将上式进一步简化为

$$P_{11}(l,z) = \exp\left[-\frac{k_0^2 z}{8}L_0 D_2(l)\right], \quad (65)$$

与已知结果一致,它仅由二阶结构函数即可确定.

4.3. 光波场二阶统计矩与间歇性

现在,可以根据(64)式写出光场二阶统计矩.当初始条件为统计均匀完全相干光场时,结果为

$$\Gamma_{11}(s,z) = P_{11}(s,z)\times\Gamma_{11}(s,0) = \Gamma_{11}(s,0)\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\frac{k_0^2 zL_0}{8}\right)^m\sigma^{2m}\left(\frac{s}{L_0}\right)^{\xi_2 m}, \quad (66)$$

这个解包含湍流介质的任意(偶数)阶标度指数,完整地描述了大气湍流间歇性对光场二阶矩的影响.

但当标度异常时,上面结果无法进一步写为较简单的封闭形式,因为在这种条件下,高阶与二阶结构函数标度指数之间并无简单关系.所以,一般求解中还需将级数截断.可以根据求解精度要求在适当阶次将无穷级数截断,从而求得足够精度的光场二阶矩.

需要注意,这种截断级数方式与按累积量截断级数是不同的.显然,按累积量截断级数更有效率,也更为合理.我们这里按累积量截断级数,以方程(40)为基础求解光场二阶矩.根据分布函数(56)式,容易求出

$$\begin{aligned}\Omega_{11}(s) &= \frac{k_0^2}{8}F_{11}(s) + \mathrm{i}\frac{k_0^3}{48}M_{11}(s) - \frac{k_0^4}{384}N_{11}(s)\\ &= \frac{k_0^2\sigma^2 L_0}{8}\left(\frac{s}{L_0}\right)^{\xi_2} - \frac{k_0^4\sigma^4 L_0^3}{128}\left(\frac{s}{L_0}\right)^{\xi_4}\\ &\quad\times\left[1-\left(\frac{s}{L_0}\right)^{2\xi_2-\xi_4}\right].\end{aligned} \quad (67)$$

这样,二阶矩可以表示为

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}(s,z) &= P_{11}(s,z)\times\Gamma_{11}(s,0)\\ &= \Gamma_{11}(s,0)\times\exp\left[-\frac{k_0^2\sigma^2 L_0 z}{8}\left(\frac{s}{L_0}\right)^{\xi_0}\right]\\ &\quad\times\exp\left\{\frac{k_0^4\sigma^4 L_0^3 z}{128}\left(\frac{s}{L_0}\right)^{\xi_4}\left[1-\left(\frac{s}{L_0}\right)^{2\xi_2-\xi_4}\right]\right\},\end{aligned} \quad (68)$$

结果比 Gauss 场中相应结果多出后一个指数因子.容易发现,当满足 K41 线性标度关系时,后一因子消失.由于这个指数因子一般是正的(由于 $2\xi_2\geqslant\xi_4$),所以内间歇性一般也会导致光场相干性的增加(这和 Tartaskii 的关于外间歇性效应的分析结果是一致的).由于四阶标度指数偏离 K41 标度指数很小,也由于大气湍流一般很弱($\sigma^2\sim C_n^2\sim10^{-18}$),所以这个指数因子很小,可以忽略不计.这样我们得到如下最后结果:

$$\Gamma_{11}(s,z) = \Gamma_{11}(s,0)\exp\left[-\frac{k_0^2\sigma^2 L_0 z}{8}\left(\frac{s}{L_0}\right)^{\xi_2}\right], \quad (69)$$

这里只留下湍流二阶矩间歇性的影响.

可以进一步将二阶矩方程在更高阶次的累积量处截断,以同样的方法容易求出更准确的光场二阶矩.容易想到,起主要作用的仍然是二阶矩的间歇性.虽然高阶标度指数偏离 K41 标度指数较大,但它们对光场二阶矩的影响更小.所以,大气湍流间歇性(这里考虑的是小尺度间歇性)对光场统计矩的影响总是很小(因为二阶矩间歇性效应很小),在实际应用问题中完全可以忽略不计.这是考虑间歇性对光场影响后可以得到的基本结论,至少,它对于平均场和二阶矩方程是正确的.

[1] Rytov S M, Kravtsov Y A and Tatarskii V L 1989 *Principles of Statistical Radiophysics* (Springer-Verlag, Heidelberg) Vol. 3 and Vol. 4

[2] Monin A S and Yagolom A M 1975 *Statistical Fluid Mechanics* (MIT Press, Cambridge, MA) Vol. 2

[3] Sreenivasan K R 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 383

[4] Celani A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2385

[5] Frisch U 1995 *Turbulence* (Cambridge University Press)

[6] Benzi R, Paladin G, Parisi G and Vulpiani A 1984 *J. Phys.* A **17**, 3521

[7] Tatarskii V I and Zavorotnyi V U 1985 *J. Opt. Soc. Am.* A **2** 2069

[8] Frehlich R 1988 *Appl. Opt.* **27** 2111

[9] Gozani J 1992 *Opt. Lett.* **17** 559

[10] Chen J Y, Chen S G and Wang G R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 161 (in Chinese) [陈京元、陈式刚、王光瑞 2005 物理学报 **54** 161]

[11] She Z S and Leveque E 1994 *Phys. Rev. Lett* **72** 336

[12] Kraichnan R H 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1016

[13] Ruiz-Chavarria G, Baudet C and Ciliberto S 1996 *Physica* D **99** 369

[14] Cao N Z and Chen S Y 1997 *Phys. Fluids* **9** 1203

[15] Ishimaru A 1978 *Wave Propagation and Scaterring in Rondom Media* (Academic Press, New York) Vol. 2 Appendix C.

Near Gaussian approximation for light propagation in the intermittent atmospheric turbulence*

Chen Jing-Yuan[1)] Chen Shi-Gang[2)] Wang Guang-Rui[2)]

[1)] (*Graduate School*, *Chinese Academy of Engineering Physics*, *Beijing* 100088, *China*)

[2)] (*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics*, *Beijing* 100088, *China*)

(Received 10 November 2004; revised manuscript received 9 December 2004)

Abstract

Intermittency is an essential property of turbulent atmosphere, and is one of the core content in modern turbulence theory. But, when we consider the problem of wave propagation in turbulent atmosphere, we always evade this property and use the assumption of a Gaussian probability distribution of dielectric permittivity fluctuation. In this paper, we discussed the intermittent effects on light propagation in turbulent atmosphere. According to the fact that the variance of dielectric permittivity fluctuation is very small, we explicitly expanded the equations of optical statistical moments to the fourth-order cumulant functions and considered their solutions. As for the second-order moment which is important in optical applications, we have analyzed it emphatically by the hierarchical structures model. Our results indicate that the optical effects of turbulent intermittency are negligible and the conventional Gaussian assumption is rational.

Keywords: wave propagation, atmospheric turbulence, intermittency

PACC: 4220, 4725, 9265

* Project supported by the Special Foundation for State Major Basic Research Program of China, by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10147201, 10247003), the Innovation Funds for Laser Technology (Grant No. 20030512). the Major Program of National Natural Science Foundation (Grant No. 10335010), the Science Foundation of Chinese Academy of Engineering Physics (Grant 20040430).