

# 强非局域非线性介质中光束传输的厄米高斯解<sup>\*</sup>

张霞萍 郭 旗<sup>†</sup>

(华南师范大学信息光电子科技学院激光传输实验室 广州 510631)

(2004 年 9 月 3 日收到 2004 年 10 月 18 日收到修改稿)

利用强非局域非线性介质中空间对称实响应函数的泰勒展开简化了非局域非线性薛定谔方程,文章基于强非局域非线性空间中的线性模型得到了矩空间  $(1+D)$  维的厄米高斯型解,得到了高阶孤子波的解析式,高斯解是最低阶孤子,即基模光孤子,并得到了入射光束的临界功率.图示展现了几个低阶光孤子解,并发现了强非局域非线性介质中存在非对称光孤子.

关键词:高阶孤子,强非局域介质,厄米高斯

PACC: 4265S

## 1. 引 言

在非线性科学中最吸引人的研究对象就是孤子,最近几年这种研究热潮更加高涨<sup>[1,2]</sup>,原因之一就是全光开关的可能性以及由光来控制光实现逻辑门.层出不穷的理论得到了实验的支持更助长了这种研究热潮<sup>[3,4]</sup>.目前大部分文献都集中在最低阶孤子及其相互作用的研究,相比而言,高阶孤子方面的研究却不多.

众所周知,光束在空间传输时由于衍射效应光束将展宽.当光束在非线性介质中传输时,光波与介质之间发生很强的非线性作用,诱导介质折射率发生变化,一方面,这种变化补偿了光束的衍射效应,可以实现光束宽度不变,即形成空间光孤子.空间孤子,从直观上讲,呈现的是衍射效应和由自聚焦引起的非线性效应的完美平衡<sup>[5]</sup>.另一方面,光束诱导的折射率变化等效于波导结构,在均匀介质中,光束利用这种非线性效应可以实现自导,因此,空间光孤子又称为自导光束.这种诱导孤子波导可以用来引导信号光,从而进行光控制光,实现光子开关和光子逻辑门.高斯型孤子在传输方向的正交截面上强度分布只有一个峰值,被认为是在传输介质中最能有效自导的光束,高斯型孤子为最低阶孤子,也即基模孤子.高阶模孤子在其强度截面上有两个或者两个以

上的峰值,它在介质中诱导的折射率变化就相当复杂.高阶模孤子有潜在的应用价值,例如,以足够强度的入射光入射到非线性介质中最终将演化为一些相应的本征模,可以产生纯净的光束,多峰结构也为全光控制方面提供了更多的研究价值<sup>[6]</sup>.

非局域空间孤子无论是在理论上还是实验上最近几年都得到了广泛地研究<sup>[5]</sup>.非局域孤子存在于非局域非线性介质中,它由非局域非线性薛定谔方程描述,其中非线性项反映的是对称实响应函数情况下介质的非局域形式<sup>[7,8]</sup>.Snyder 和 Mitchell 提出的非局域线性模型(被称为 Snyder-Mitchell 模型),是在光束束宽远远小于材料相关长度的强非局域条件下,描述非线性光束在非局域非线性介质中传输的线性方程.将非线性问题巧妙地转化为线性问题处理,这是一个革命性的创举<sup>[7]</sup>.此举引发了沈元壤所预期的“新一轮的光孤子研究热潮”.文献[9]对 2003 年底前的非局域空间孤子研究状况进行了综述评论.最近,谢逸群和郭旗讨论了从强非局域非线性模型到 Snyder-Mitchell 模型的转化过程<sup>[10]</sup>.郭旗等对这样的方程作了进一步研究,得到了更简洁的非线性模型,并得到了精确的高斯型稳定解<sup>[10,11]</sup>.但他们都没有对强非局域非线性介质中的高阶孤子进行研究.

本文从光场满足的一般非局域非线性薛定谔方程出发,根据强非局域介质中响应函数的特点,在对

\* 国家自然科学基金(批准号:10474023),广东省自然科学基金面上项目(批准号:031516,04105804)资助的课题.

<sup>†</sup>E-mail: guoq@scnu.edu.cn

称实响应空间对响应函数进行泰勒展开,得到了强非局域非线性介质中的线性模型,基于该线性模型得到了矩空间里  $1 + D$  ( $D = 1, 2$ ) 维高阶光孤子解. 发现了强非局域非线性介质中存在不对称光孤子, 填补了这项空白. 文章用图示展现了  $1 + D$  维 ( $D = 1, 2$ ) 空间的几个低阶孤子. McLaughlin 等已经预测, 由于非局域非线性效应, 高阶模光孤子尽管在其强度截面上有多个峰值, 也能够强非局域非线性介质中引起折射率变化, 起到很好的自导作用<sup>[12]</sup>.

## 2. 强非局域非线性介质的模型演化

描述传输光束的波动场  $u$  遵循 Maxwell 方程. 对于非线性均匀介质, 光场满足下面一般非局域非线性方程<sup>[8,9]</sup>:

$$i \frac{\partial u}{\partial z} + \mu \nabla_{\perp}^2 u + \rho N(I)u = 0. \quad (1)$$

这里  $u = u(\mathbf{r}, z)$  是傍轴光束,  $\mu = 1/2k$ ,  $\rho = k\eta$ ,  $k$  为介质中不包含非线性的波数(由于  $k = \omega n_0/c$ ,  $n_0$  为介质中线性折射率),  $\eta$  为材料常数,  $\eta > 0$ ,  $\eta < 0$  分别相应于聚焦介质和散焦介质.  $I = I(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}, z) = |u|^2$ ,  $z$  为沿传输方向的纵向坐标,  $\mathbf{r} = (r, r')$  为  $D$  维 ( $D = 1$ , 或者  $2$ ) 横向坐标向量,  $\nabla_{\perp}^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , 为横向拉普拉斯算符. 非线性项  $N = N(I)$  由一般非局域形式表示

$$N(I) = \int R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |u(\mathbf{r}', z)|^2 d^D r'. \quad (2)$$

积分限为  $-\infty$  到  $+\infty$ . 这里只考虑响应函数  $R(\mathbf{r})$  为实数(即没有非线性的损耗和吸收, 功率  $P = \int I d^D r'$ ), 且均匀对称(即排除了非对称的诺曼响应等). 类似于一般的物理响应函数的处理方法, 将响应函数归一化, 有  $\int R(\mathbf{r}') d^D r' = 1$ . 材料的响应函数可以设为高斯型  $R(\mathbf{r}) = \exp(-r^2/2w_m^2)$  ( $\sqrt{2\pi}w_m$ )<sup>[8]</sup>,  $w$  为传输光束的束宽,  $w_m$  为材料的响应宽度, 即材料的特征长度. 对于强非局域介质有  $w_m/w \gg 1$ .

在  $r' = 0$  处对  $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  进行泰勒展开, 近似取到  $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  的二阶. 由于在  $r' = 0$  处, 其对  $r$  的一阶导数为零, 下式成立:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}) &= R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|_{r'=0} \\ &= R(0) + \frac{1}{2} R''(0)r^2, \end{aligned} \quad (3)$$

由方程 (3) 可知

$$R''(\mathbf{r}) = R''(0). \quad (4)$$

对响应函数  $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  在  $r$  位置处进行泰勒展开并保留最低阶

$$R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = R(\mathbf{r}) - R'(\mathbf{r})r' + \frac{1}{2} R''(\mathbf{r})r'^2, \quad (5)$$

利用奇函数在  $-\infty$  到  $+\infty$  整个区间积分, 其值为零的性质, 对方程 (2) 做代换, 有

$$\begin{aligned} N(I) &= \left( R(0) + \frac{1}{2} R''(0)r^2 \right) \int |u(\mathbf{r}', z)|^2 d^D r' \\ &\quad + \frac{1}{2} R''(0) \int r'^2 |u(\mathbf{r}', z)|^2 d^D r'. \end{aligned} \quad (6)$$

不计光束传输时能量损失, 有  $P_0 = P =$

$\int |u(\mathbf{r}', z)|^2 d^D r'$  其中  $P_0$  为  $r = 0$  处的入射光功率,  $R_0 = R(\mathbf{r})|_{r=0}$ ,  $R''(0) = -\gamma$  反映光场沿截面的变化快慢, (由于  $R_0$  为  $R(\mathbf{r})$  在  $r = 0$  处的最大值, 有  $R'_0 < 0$ ,  $\gamma > 0$ ), 方程 (6) 可简化为

$$N(I) = R_0 P_0 - \frac{1}{2} \gamma P_0 r^2 - \frac{1}{2} \gamma \int r'^2 |u(\mathbf{r}', z)|^2 d^D r'. \quad (7)$$

将方程 (7) 代入方程 (1) 并令

$$u(\mathbf{r}, z) = \psi(\mathbf{r}, z) \exp(i\rho R_0 P_0 z),$$

对方程作变换, 可以得到强非局域非线性介质中沿  $z$  轴传输对称解  $u(\mathbf{r}, z)$  的线性模型<sup>[5,9]</sup>

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\mu}{r^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{D-1} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} \gamma P_0 r^2 \psi = 0. \quad (8)$$

## 3. 傍轴条件下传输光束的高阶孤子解

### 3.1. $1 + 1$ 维空间的厄米高斯解

$1 + 1$  维情况下方程 (8) 可以写为

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \rho \gamma P_0 x^2 \psi = 0. \quad (9)$$

用复数指数函数表示准单色波, 方程 (9) 解如下:

$$\psi = A \psi(x, z) \exp(-i\beta z), \quad (10)$$

其中被分离的快变部分是一个均匀平面波,  $A$  为归一化常数, 有  $\int \psi \psi^* dx = P_0$ . 将方程 (10) 代入方程 (9), 有

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (11a)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta \psi - \frac{1}{2} \rho \gamma P_0 x^2 \psi = 0. \quad (11b)$$

由方程(11a)知,函数  $\psi$  与传输距离  $z$  无关,即光束在传输过程中始终保持原来的形状,由方程(11b)所求得的光场的解为孤子解.

令  $\xi = \sqrt{\rho\gamma P_0(2\mu)}x$ ,对方程(11b)进行变量代换,则有

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left( \frac{\beta}{\mu} \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\gamma P_0}} - \xi^2 \right) \psi = 0. \quad (12)$$

方程(12)的解为<sup>[13]</sup>

$$\psi_n = H_n(\xi) \exp(-\xi^2/2), \quad (13)$$

这里  $H_n$  为厄米多项式.

方程(12)等效于量子力学中质量为  $(1/2)\hbar^2$  的线性谐振子<sup>[13]</sup>,总能量为  $E = \beta/\mu$ ,势能  $V(x) = \rho\gamma P_0(2\mu)x^2$ ,能量势阱如图1,  $x_m = \sqrt{2\mu E/\rho\gamma P_0}$ .相应的波函数见图2.

本征值满足方程<sup>[14]</sup>

$$\frac{\beta}{\mu} \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\gamma P_0}} = 2n + 1, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (14)$$

即

$$\beta = \beta_n = (2n + 1) \sqrt{\frac{\mu\rho\gamma P_0}{2}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (15)$$

可知,在强非局域非线性介质中传输常数随阶数的变化而变化,阶数越高,传输常数越大.

将方程(13)(15)代入方程(10),得场分布

$$\phi_n = A_n H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w_0}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) e^{-i\beta_n z}. \quad (16)$$

方程(16)给出了强非局域非线性介质中传输光束的高阶孤子解,图2给出了几个低阶孤子解的图示.其中高斯解为最低阶孤子<sup>[5]</sup>.  $w_0 = (\sqrt{2}/\xi)x = \sqrt{2\sqrt{2\mu}/\rho\gamma P_0}$ 为孤子传输时基模高斯波束半径,入射光束的临界功率  $P_c = P_0 = 8\mu/\rho\gamma w_0^4$ .  $A_n = \sqrt{(\sqrt{2}/w_0 N_n)P_0}$ ,  $N_n = \sqrt{\xi/\sqrt{\pi}2^n n!}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

### 3.2. 1+2 维空间的厄米高斯解

矩坐标系中 1+2 维空间( $D = 2$ )光束传输满足方程

$$i \frac{\partial \phi}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi - \frac{1}{2} \rho\gamma P_0 (x^2 + y^2) \phi = 0. \quad (17)$$

采用上节相似的处理方法,写出函数解,形式为

$$\phi = A\psi(x, y, z) \exp(-i\beta z), \quad (18)$$

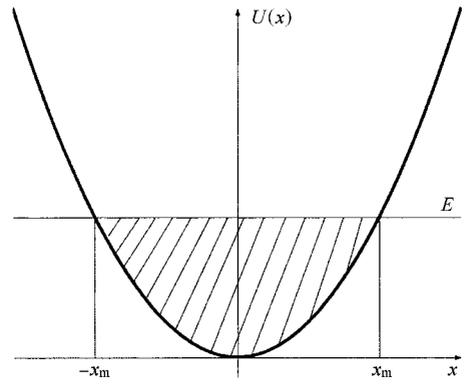


图1  $D = 1$  时等效势阱

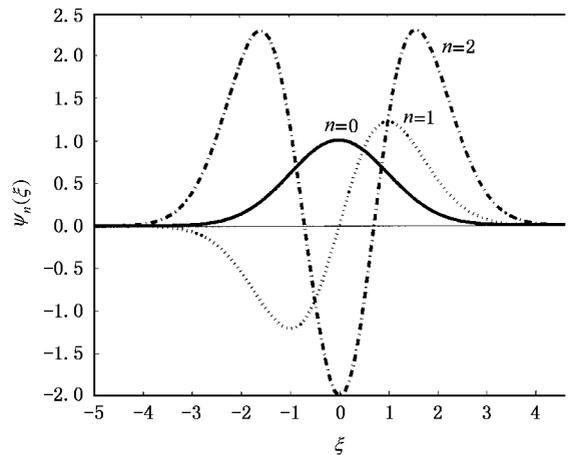


图2  $D = 1$  时强非局域非线性介质中几个低阶孤子解

其中分离出的快变部分仍然为均匀平面波,  $A$  为归一化常数,保证传输光束的总功率守恒,即有  $\iint \phi\phi^* dx dy = P_0$ ,  $\beta$  为复传播系数.

将方程(18)代入方程(17),有

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (19a)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \beta\psi - \frac{1}{2} \rho\gamma P_0 (x^2 + y^2) \psi = 0. \quad (19b)$$

由方程(19a)知,函数  $\psi$  只是变量  $x, y$  的函数,与变量  $z$  无关,即光束沿传输方向波形保持不变,方程(19b)描述的解为孤子解.

方程(19b)可分离变量,令  $\psi = \Theta(x)\Omega(y)$  并代入有<sup>[14]</sup>

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\beta}{\mu} - \frac{1}{2\mu} \rho\gamma P_0 (x^2 + y^2) = 0. \quad (20)$$

方程 (20) 可分离成下列两方程:

$$\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\beta}{\mu} - \sigma - \frac{1}{2\mu} \rho \gamma P_0 x^2 = 0, \quad (21a)$$

$$\frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} - \frac{1}{2\mu} \rho \gamma P_0 y^2 + \sigma = 0, \quad (21b)$$

其中  $\sigma$  为常数, 反映截面上两个正交方向光场的关联情况. 上面两式描述的情况等效于总能量为  $E = E_x + E_y$  的谐振子, 其中  $E_x = \beta/\mu - \sigma$ ,  $E_y = \sigma$ , 等效势能为

$$V(x) = (1/2\mu) \rho \gamma P_0 x^2, \quad W(y) = (1/2\mu) \rho \gamma P_0 y^2.$$

令  $\xi = \sqrt[4]{\rho \gamma P_0} (2\mu)^{1/4} x$ ,  $\eta = \sqrt[4]{\rho \gamma P_0} (2\mu)^{1/4} y$ , 分别对 (21a) 和 (21b) 进行变量代换

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \left[ \left( \frac{\beta}{\mu} - \sigma \right) \sqrt{\frac{2\mu}{\rho \gamma P_0}} - \xi^2 \right] \Theta = 0, \quad (22a)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \left( \sigma \sqrt{\frac{2\mu}{\rho \gamma P_0}} - \eta^2 \right) \Omega = 0. \quad (22b)$$

方程 (22a) 和方程 (22b) 的解为<sup>[13,14]</sup>

$$\Theta_n = H_m(\xi) \exp(-\xi^2/2), \quad (23a)$$

$$\Omega_n = H_n(\eta) \exp(-\eta^2/2), \quad (23b)$$

其中  $H_m, H_n$  为厄米多项式. 本征值满足方程

$$\left( \frac{\beta}{\mu} - \sigma \right) \sqrt{\frac{2\mu}{\rho \gamma P_0}} = 2m + 1, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad (24)$$

$$\sigma \sqrt{\frac{2\mu}{\rho \gamma P_0}} = 2n + 1, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (25)$$

方程 (24) 和方程 (25) 中消去  $\sigma$ , 有

$$\beta = \beta_{mn} = \chi(m+n+1) \sqrt{\frac{\mu \rho \gamma P_0}{2}}. \quad (26)$$

方程 (26) 反映了  $D=2$  情况下传输常数与阶数的关系,  $m+n$  值越高, 传输常数越大.

将方程 (23a), 方程 (23b) 和方程 (26) 代入方程 (18), 得场分布

$$\phi = AH_m \left( \frac{\sqrt{2}x}{w_0} \right) H_n \left( \frac{\sqrt{2}y}{w_0} \right) e^{-i\beta_{mn}z} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w_0^2} \right). \quad (27)$$

由此得到了  $1+2$  维空间强非局域非线性介质中传输光束的高阶孤子解.

图 3 至图 6 给出了  $D=2$  时垂直于传输轴线的场截面图, 图形的中心点位于传输轴线上. 图 3 为最低阶模孤子; 图 4 和图 5 为沿两个不同正交方向的较高阶模孤子. 由图 4 和图 5 可知在强非局域非线性介质中存在非对称的光孤子.

当  $m=n=0$  时, 光场  $\phi = Ae^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}}$  为最低阶的

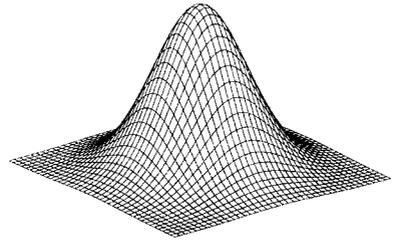


图 3  $n=0, m=0$

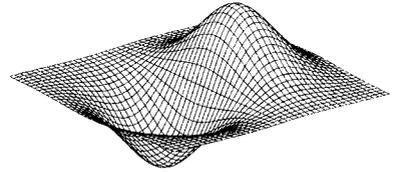


图 4  $n=1, m=0$

基模光孤子, 为高斯型, 波束半径  $w_0$  和临界功率  $P_c$  与  $1+1$  维结论相同.  $A = A_{mn} = \sqrt{2P_0/w_0^2 N_m N_n}$ ,  $N_m = \sqrt{\xi/\sqrt{\pi} 2^m m!} x$ ,  $N_n = \sqrt{\eta/\sqrt{\pi} 2^n n!} y$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ .

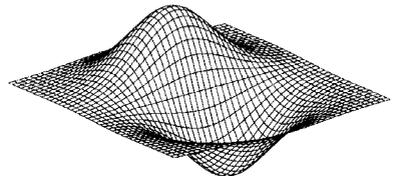


图 5  $n=0, m=1$



图 6  $n=1, m=1$

## 4. 结 论

本文利用强非局域非线性介质中光束传输所满足的线性薛定谔方程得到了  $1+D$  ( $D=1, 2$ ) 维传输光束的稳态解, 给出了基模高斯解 (即最低阶光孤子) 和厄米高斯解 (即高阶光孤子), 并由此得到了入

射光束的临界功率. 提出了该介质中存在非对称光孤子. 2002 年, Hutsebaut 等用实验在液晶中得到了

高阶孤子波, 这为高阶模光孤子的应用展现了广阔的前景<sup>[15]</sup>.

- [ 1 ] Snyder A W and Kivshar J 1997 *Opt. Soc. Am. B* **11** 3025
- [ 2 ] Abe S and Ogura A 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6066
- [ 3 ] Poccianti M, Brzdakiewicz K A and Assanto G 2002 *Appl. Phys. Lett.* **81** 3335
- [ 4 ] Poccianti M, Brzdakiewicz K A and Assanto G 2002 *Opt. Lett.* **27** 1460
- [ 5 ] Snyder A W and Mitcher D J 1997 *Science* **276** 1538
- [ 6 ] Yuri S Kivshar and George I Stegeman 2002 *Opt. Photonics News* **2** 59
- [ 7 ] Shen Y R 1997 *Science* **276** 1520
- [ 8 ] Guo Q, Luo B, Yi F, Chi S and Xie Y 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016602
- [ 9 ] Guo Q 2003 *Proceedings of APOC 2003* ( Asia-Pacific Optical and Wireless Communications Conference ) Edited by C F Lam, C Fan, N Hanik, and K Oguchi *Optical Transmission, Switching, and Subsystems Proc. SPIE* **5281** ( SPIE-The International Society for Optical Engineering, Washington, USA, 2004 ) p.581
- [ 10 ] Xie Y Q and Guo Q 2004 *Acta Phys Sin.* **53** 3020 ( in Chinese ) [ 谢逸群、郭旗 2004 物理学报 **53** 3020 ]
- [ 11 ] Guo Q and Xiu C B 2004 *Acta Phys Sin.* **53** 3025 ( in Chinese ) [ 郭旗、许超彬 2004 物理学报 **53** 3025 ]
- [ 12 ] McLaughlin D W, Muraki D J, and Shelley M J 1996 *Physica D* **97** 471
- [ 13 ] Ying H J 1999 *Quantum mechanics* ( Anhui :Publishing Company of Science and Technology University China ) p65 ( in Chinese ) [ 尹鸿钧 1999 量子电子学( 安徽 :中国科学技术大学出版社 )第 65 页 ]
- [ 14 ] Zhang K Q and Li D J 2001 *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics* ( Beijing :Publishing company of Electronics Industry ) p572 ( in Chinese ) [ 张克潜、李德杰 2001 微波与光子学中的电磁理论( 北京 :电子工业出版社 )第 587 页 ]
- [ 15 ] Hutsebaut X, Haelterman M, Adamski A and Neyts K 2004 *Optics Communications* **233** 211

## Analytical solution in the Hermite-Gaussian form of the beam propagating in the strong nonlocal media \*

Zhang Xia-Ping Guo Qi<sup>†</sup>

( Laboratory of Light Transmission Optics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China )

( Received 3 September 2004 ; revised manuscript received 18 October 2004 )

### Abstract

In this paper, it is discussed that the optical beam with a suitable input power propagates in the nonlocal nonlinear media, which is governed by the nonlocal nonlinear Schrödinger equation (NNLSE). A new approximate linear model for the NNLSE is presented for the strong nonlocal media with the spatially symmetrical real response functions by use of Taylor expansion. An exact analytical solution with the Hermite-Gaussian form is obtained. It is shown that the solution in the Gaussian form is the lowest-order mode. It is found that the anisotropic spatial soliton exists in the strong nonlocal media.

**Keywords :** high-order mode solitons, strong nonlocal media, Hermite-Gaussian

**PACC :** 4265S

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10474023 ), and the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China ( Grant Nos. 031516 and 04105804 ).

<sup>†</sup>E-mail : guoq@scnu.edu.cn