第 54 卷 第 8 期 2005 年 8 月
1000-3290/2005/54(08)/3473-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.8, August, 2005

不同积分变分原理的统一*

黄永畅[1)3)†] 李希国[2)4)]

1) (北京工业大学应用数理学院, 北京 100022)

2) (中国科学院近代物理研究所, 兰州 730000)

3) (中国高等科学技术中心(世界实验室), 北京 100080)

4) (兰州重离子加速器国家实验室, 兰州 730000)

(2005 年 1 月 4 日收到; 2005 年 3 月 8 日收到修改稿)

依据定量因果原理的数学表示,统一地导出了 Lagrange 量中含坐标关于时间一阶、二阶导数的积分型的 Hamilton 原理、Voss 原理、Hölder 原理和 Maupertuis-Lagrange 原理等,给出了这些原理的本质联系和统一描述.得出 $f_0=0$ 并不是通常的保持 Euler-Lagrange 方程不变的结果,而是满足定量因果原理的结果.还得出 Lagrange 量的所有的积分型变分原理等价地对应于两类满足定量因果原理的不变形式.同时发现所有积分型变分原理的运动方程都是 Euler-Lagrange 方程,但不同条件的变分原理所对应的不同群 G 作用下的守恒量是不同的.从而可对过去众多零散的积分型变分原理有一个系统和深入的理解,并使这些变分原理自然地成为定量因果原理的推论.

关键词:变分原理, 因果原理, 运动方程, 对称性

PACC:0330

1. 引 言

数学和物理学中大量存在着泛函极值的变分原理[1—3],这从一个侧面反映了客观世界的统一性[2—4],也体现了人们对建立统一物理规律的渴望[4—6].

变分原理是以泛函的变分形式表述的一种物理原理[1—6].在所有满足一定条件的物质运动状态中,真实的运动状态应对某物理量取极值,以使对应体系的作用量满足定量因果原理[7—9].而且,被公认的不满足因果原理的物理规律尚未发现.

在物理学的许多原理中,可不用微分形式而以变分形式来表示,它们描述某些量可取极值的条件,这些原理统称为变分原理.事实上,微分描述可从变分描述中导出,亦即 Euler-Lagrange 方程与变分方程等价,故现在通常是以这一原理为主来给一般理论建立基础.因此,变分原理被认为是物理学诸多定律中的最高形式[4].由文献[7—10]和下面的研究可见变分原理只是宇宙中得失相等的定量因果原理的推论.

由作用量泛函为 S 的变分原理可推导出各种物理规律.比如在弹性力学、电磁理论、相对论、量子理论、场论中都有相应的变分原理,从而可导出各自的科学理论体系.

文献[7—9]阐明了任一体系物质转化过程中的得失相等的定量因果原理,文献[7]给出了定量因果原理对变分原理和相互作用的局域性因果原理的统一.文献[10]利用满足定量因果原理的不失不得的同胚映射,得到了一般的物质流形,给出了理想态、参考态和变形态的统一描述,获得了弯曲空间中应变张量的一般表示,并且克服了欧氏空间和弯曲空间中晶体缺陷理论的统一和对应的困难.从定量因果原理出发,可导出不同积分型变分原理.

2. 定量因果原理对一般积分型变分原理的推导应用

由于宇宙中的任一系统在演化过程中必满足得失相等的定量因果原理,故文献[7, 9]按照数理逻辑和物理学的方法严格地导出了定量因果原理的数

* 中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KJCX2-SW-N02)、国家自然科学基金(批准号:10435080)和北京市教育委员会科技发展基金(批准号:Km200310005018)资助的课题.

† E-mail: ychuang@bjut.edu.cn

学表示，

$$GA - CA = 0, \tag{1}$$

式中，A 为一个表征体系特征量的集合，如 A 可以是依赖于 n 个变量的泛函，G，C 为不同算子的集合，如可以是不同微分算子的集合．(1)式的物理意义是任一类算子 G 对集合 A 作用，其所能出现的真实结果必导致某一类算子集 C 对 A 的作用，使 CA 与 GA 在定量上相等，整个过程满足任意一些量的定量作用(因)必导致相应等量作用(果)，即满足得失相等的定量因果原理．如表征物理学中基本相互作用规律的规范场正是主纤维丛的联络，由(1)式中 $G = D$ 算子，$A = S$ 为截面矢量，可自然地导出 $C = \omega$ 联络[11]．

由定量因果原理，文献[7，9]利用(1)式系统地给出了对所有不同微分型的变分原理的统一描述及它们的本质联系．

现我们利用定量因果原理，导出一般的积分型变分原理，然后应用所得一般的积分型变分原理的表示，给出各种积分型变分原理及它们的关系和统一的描述．

由宇宙中得失相等的定量因果原理知，真实的物理过程应是在群 G (在(1)式中 $C = 1$，$GA = A'$)作变换后，定量因果原理使整个系统的作用量确保下列方程等号右端保持不失不得[7]：

$$\Delta A = A' - A = \int_{t_1'}^{t_2'} L'(q', \dot{q}', \ddot{q}', t')\mathrm{d}t' - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)\mathrm{d}t = 0, \tag{2}$$

其中一般的无穷小变换为[12]

$$t' = t'(q, \dot{q}, \ddot{q}, t, \alpha) \doteq t + \Delta(t) = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma, \tag{3}$$

$$q'^{(r)}_i = q'^{(r)}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t, \alpha) \doteq q_i^{(r)} + \Delta q_i^{(r)} = q_i^{(r)} + \varepsilon_\sigma (\xi_i^\sigma)^{(r)} \quad (r = 1, 2). \tag{4}$$

(3)，(4)两式中 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ 为 Lie 群 G 独立的连续变参数，τ^σ 和 $(\xi_i^\sigma)^{(r)}$ 为

$$\tau^\sigma = \frac{\partial t'(q, \dot{q}, \ddot{q}, t, \alpha)}{\partial \alpha_\sigma}\bigg|_{\alpha = 0} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, m), \tag{5}$$

$$(\xi_i^\sigma)^{(r)} = \frac{\partial q'^{(r)}_i(q, \dot{q}, \ddot{q}, t, \alpha)}{\partial \alpha_\sigma}\bigg|_{\alpha = 0} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, m; r = 0, 1, 2). \tag{6}$$

(5)，(6)式被称为群 G 作用下的无穷小生成函数，$\varepsilon_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, m)$ 为与 α_σ 相对应的无穷小参量．

不失一般性，令

$$L'(q', \dot{q}', \ddot{q}', t') = L(q', \dot{q}', \ddot{q}', t') + f(q', \dot{q}', \ddot{q}', t'), \tag{7}$$

式中 f 为任意光滑函数．将(7)式代入(2)式，整理后得

$$\Delta A = \int_{t_1}^{t_2} \Big[f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + \Delta(f + L) + (f + L)\frac{\mathrm{d}\Delta(t)}{\mathrm{d}t} \Big]\mathrm{d}t, \tag{8}$$

其中已经用到

$$f(q', \dot{q}', \ddot{q}', t') = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + \Delta f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t).$$

整理(8)式得

$$\begin{aligned}\Delta A = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{ & f(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + \sum_i \Big[\frac{\partial(L+f)}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(L+f)}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial(L+f)}{\partial \ddot{q}_i}\Big]\delta q_i \\ & + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_i\Big(\frac{\partial(L+f)}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial(L+f)}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(L+f)}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\delta q_i\Big) + (L+f)\delta(t)\Big]\Big\}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{9}$$

由于(7)式是一个极限过程，不失一般性，略去二阶无穷小量，则有

$$f = f_0 + \varepsilon_\sigma \frac{\mathrm{d}g^\sigma}{\mathrm{d}t} \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, m). \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式，略去高阶无穷小量，则(9)式简化为

$$\begin{aligned}\Delta A = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{ & f_0(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + \sum_i \Big[\frac{\partial(L+f_0)}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(L+f_0)}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial(L+f_0)}{\partial \ddot{q}_i}\Big]\delta q_i \\ & + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_i\Big(\frac{\partial(L+f_0)}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i + \frac{\partial(L+f_0)}{\partial \ddot{q}_i}\delta \dot{q}_i - \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(L+f_0)}{\partial \ddot{q}_i}\Big)\delta q_i\Big) + (L+f_0)\Delta t + g\Big]\Big\}\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{11}$$

式中 $g=\varepsilon_\sigma g^\sigma(\sigma=1,2,\cdots,m)$. 对(11)式等号右端积分第三部分取端点条件使其积分为零,由于 δq_i 和 f_0 都独立,又(11)式等于零,则得 $f_0=0$. 故有

$$\Delta A=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\sum_i\Big[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big]\delta q_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_i\Big[\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\delta\dot q_i\Big]+L\Delta t+g\Big]\Big\}\mathrm{d}t=\Delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t. \quad (12)$$

可见在(10)式条件下 $f_0=0$ 并不是通常一些文献所说的是保持 Euler-Lagrange 方程不变的结果,而是满足定量因果原理的结果.

利用(12)式可给出各种积分型变分原理的推导和统一描述.

3. 定量因果原理对各种积分型变分原理的推导和统一描述

下面具体给出各种积分型变分原理的推导和统一描述.

当求广义坐标的等时变分时,有 $\Delta t=0$,则由(12)式可得含坐标二阶导数的 Hamilton 变分原理,

$$\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_i\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\delta\dot q_i-\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big)\delta q_i\Big)+g\Big]+\sum_i\Big[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big]\delta q_i\Big\}\mathrm{d}t. \quad (13)$$

由(13)式中关于对时间的全导数积分为零的要求,得 Lagrange 量含坐标关于时间的二阶导数(以下简称二阶 L)的 Hamilton 变分原理的条件是 t_1,t_2 固定,$\delta q_i|_{t=t_1}=\delta q_i|_{t=t_2}=\delta\dot q_i|_{t=t_1}=\delta\dot q_i|_{t=t_2}=0$ 和 $g(t_1)=g(t_2)$,即在 E^q 空间看是定端点变分. 由 δq 的任意性,得二阶 L 的 Euler-Lagrange 方程,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}=0. \quad (14)$$

当 Lagrange 量不含 $\ddot q_i$ 时,得通常(一阶 L)的 Hamilton 变分原理,

$$\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\sum_i\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\Big)\delta q_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\delta q_i+g\Big)\Big\}\mathrm{d}t. \quad (15)$$

其相应的条件简化为 t_1,t_2 固定,$\delta q_i|_{t=t_1}=\delta q_i|_{t=t_2}=0$ 和 $g(t_1)=g(t_2)$.

由于

$$\Delta q_i^{(r)}=\delta q_i^{(r)}(t)+q_i^{(r+1)}\Delta t\quad(r=0,1,2), \quad (16)$$

则(12)式可化为

$$\Delta A=\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\sum_i\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big)(\Delta_p q_i-\dot q_i\Delta t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_i\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big)(\Delta_p q_i-\dot q_i\Delta t)+\sum_i\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}(\Delta_p\dot q_i-\ddot q_i\Delta t)+L\Delta t+g\Big]\Big\}\mathrm{d}t. \quad (17)$$

由(17)式中关于对时间全导数的积分为零的要求,可得二阶 L 的 Voss 变分原理的条件. 由于 $\Delta_p q_i-\dot q_i\Delta t(i=1,\cdots,n)$ 构成系统的虚变分,则同样可得二阶 L 的 Euler-Lagrange 方程(14).

当 Lagrange 量不含 $\ddot q_i$ 时,得通常(一阶 L)的 Voss 变分原理[9] 和相应的 Euler-Lagrange 方程,其条件为在二阶 L 的 Voss 变分原理条件中除去 $\Delta_p\dot q_i|_{t=t_1}=\Delta_p\dot q_i|_{t=t_2}=0$ 即可.

将(16)式代入(12)式,并利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_i\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\dot q_i-L-\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\dot q_i\Big)=-\sum_i\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big)\dot q_i+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\ddot q_i\Big)-\frac{\partial L}{\partial t} \quad (18)$$

和易证的关系式

$$\Delta A=\int_{t_1}^{t_2}\Big(\Delta L+L\frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\Big)\mathrm{d}t, \quad (19)$$

整理(12)式得

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big\{\Delta L-\sum_i\Big(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big)\Delta q_i+\sum_i\Big[\frac{\partial L}{\partial\dot q_i}\dot q_i+\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\ddot q_i-\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot q_i}\Big)\dot q_i\Big]\frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}-\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t\Big\}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_q}^{t_2} \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \Delta \dot{q}_i \right] \mathrm{d}t. \tag{20}$$

在(20)式中,由等号右端满足定量因果原理的不失不得地等于零的要求,得二阶 L 的 Hölder 作用量变分原理的条件为

$$\Delta q_i |_{t=t_1} = \Delta q_i |_{t=t_2} = \Delta \dot{q}_i |_{t=t_1} = \Delta \dot{q}_i |_{t=t_2} = 0, \tag{21}$$

(20)式中 Δt 在任意时刻可不为零,Δq_i 为任意,可得 Euler-Lagrange 方程(14). 二阶 Hölder 变分原理的数学表达式(20)可简化表示为

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \Delta L + \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q}_i - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \dot{q}_i \right] \frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t \right\} \mathrm{d}t = 0. \tag{22}$$

可见 Hölder 变分原理亦是由(12)式导出的,且在 E^q 空间里看是沿 t 轴方向的变端点变分. 故不管端点条件如何,只要满足定量因果原理,就可以得出或再定义相应新的变分原理.

当 L 不含 $\ddot{q}_i$ 时,由(22)式得通常(一阶)的 Hölder 变分原理[4]

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \Delta L + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t \right\} \mathrm{d}t = 0. \tag{23}$$

其条件为在(21)式中取消条件 $\Delta \dot{q}_i \mid_{t=t_1} = \Delta \dot{q}_i \mid_{t=t_2} = 0$,其他保持有效即可.

当对(22)或(23)式取等时变分时,则它们都简化为 Hamilton 变分原理,

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \mathrm{d}t = 0. \tag{24}$$

可见不含 g 的 Hamilton 变分原理也是 Hölder 变分原理在等时变分下的简化表示.

在 Hölder 变分原理表达式(22)中,当 $L = L(q, \dot{q}, \ddot{q})$ 时,有

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, \ddot{q})}{\partial t} = 0, \tag{25}$$

当存在二阶 L 的运动轨道积分,

$$\begin{aligned} H &= T + V \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \dot{q} \right] - L \\ &= \mathrm{const}. \end{aligned} \tag{26}$$

故

$$\Delta H = \Delta \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \dot{q} \right] - \Delta L = 0. \tag{27}$$

将(25),(27)式代入(22)式得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\Delta(2T) + 2T \frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \Delta \int_{t_1}^{t_2} (2T) \mathrm{d}t = 0, \tag{28}$$

其中已利用

$$\sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \ddot{q} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_i} \right) \dot{q} \right] = 2T_1 + 2T_2 - 2T_{20} = 2T. \tag{29}$$

(28)式正是新的二阶 L 的 Maupertuis-Lagrange 原理的表达式,可见该原理一般情况是有条件的,即端点是可动的.

当 Lagrange 量不含 $\ddot{q}_i$,则(28)式简化为

$$\Delta W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} (2T_1) \mathrm{d}t. \tag{30}$$

(30)式正是通常(一阶 L)的 Maupertuis-Lagrange 变分原理的表达式[14].

在一般的位形空间,有

$$2T = g_{ij} \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}, \tag{31}$$

故

$$\mathrm{d}t = (2T)^{-1/2} (g_{ij} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_j)^{1/2}. \tag{32}$$

由于有方程

$$2T = 2(H - V), \tag{33}$$

故可利用(31)—(33)式整理(30)式得

$$\Delta W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(H - V(q_1, \cdots, q_n))} (g_{ij} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_j)^{1/2}. \tag{34}$$

(34)式正是 Jacobi 形式的几何变分形式[4,13].

当 g_{ij} 为广义坐标位形空间的 Riemann 度规时,有 $\mathrm{d}s^2 = g_{ij} \mathrm{d}q_i \mathrm{d}q_j$,则(34)式可表示为 Riemann 空间的 Jacobi 变分

$$\Delta W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2(H - V(q_1, q_2, \cdots, q_n))} \mathrm{d}s. \tag{35}$$

当

$$g_{ij} = m_{il} \delta_{lj} \tag{36}$$

为笛卡尔位形空间的度规,则有 $2T = g_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = m_{il} \dot{q}_l \dot{q}_i = m_i \boldsymbol{v}^2$,其中已取质量矩阵 $[m_{ij}]$ 是对角的,$\boldsymbol{v}_i$ 为第 i 个质点的速度,则 Moupertuis-Lagrange 变分原理简化为 Moupertuis 变分原理,

$$\Delta W = \Delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i^2 \mathrm{d}t = \Delta \sum_i \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{p}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i, \tag{37}$$

故其作用量仍是系统各质点动量沿路径积分之和.

综上所述,我们利用定量因果原理导出了不同的积分型变分原理,并具体利用定量因果原理获得了不同积分型的一阶、二阶 L 的普遍变分原理,以及它们之间的本质关系和它们的统一描述,从而对过去众多且零散的变分原理有了一个系统而深入的理解.

4. 讨 论

由于宇宙中得失相等的定量因果原理是一般的,所以对上述所有变分原理都有满足得失相等的定量因果原理的守恒量.

由于(12)式任意时刻都应成立及由变量的任意性和(19)式得

$$\begin{aligned}&\sum_i\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\right]\delta q_i\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big\{\sum_i\Big[\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\Big)\delta q_i\\&+\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\delta\dot{q}_i\Big]+g+L\Delta t\Big\}\\&=\Delta L+L\frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=0.\end{aligned}\tag{38}$$

由(38)式和 δq_i 及时间的任意性,得二阶 L 的 Euler-Lagrange 方程(14)和

$$\begin{aligned}&\sum_i\Big[\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\Big)\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\delta\dot{q}_i\Big]\\&+L\Delta t+g=\mathrm{const}.\end{aligned}\tag{39}$$

利用(3)—(6)式代入(39)式,并利用 ε_σ 的任意性得

$$\begin{aligned}&\sum_i\Big[\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\Big)(\xi_i^\sigma-\dot{q}_i\tau^\sigma)\\&+\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}(\dot{\xi}_i^\sigma-\ddot{q}_i\tau^\sigma)\Big]+L\tau^\sigma+g^\sigma=\mathrm{const}.\\&(\sigma=1,2,\cdots,m).\end{aligned}\tag{40}$$

(40)式即为一般二阶 L 系统在一般 Lie 群 G 作用下一般变分(12)式中的保持不失不得的 m 个守恒量.其对应的二阶 L 的 Euler-Lagrange 方程(14)正是文献[7,9]和本文所揭示的系统量变化所满足的定量因果原理的数学表示,即对于积分型变分原理,不但有任一时刻的动态定量因果原理的表达式(14)(即方程中一些量变化(因)时,必定导致方程中其他量动态瞬时变化(果),以使方程右端保持不失不得,即右端为零),而且有全过程的(2),(39)式的定量不变的结果.定义微分型的变分原理表示为[4,7]

$$\Delta L=L'(q',\dot{q}',\ddot{q}',t')-L(q,\dot{q},\ddot{q},t)=0,\tag{41}$$

以及由(38)式可确定$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$,即

$$L\frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}+\Delta L=-\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}.\tag{42}$$

(42)式表征积分变量的变化$\left(\mathrm{d}t'=\left(1+\frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\right)$所引起的部分与微分型变化部分的和等于负的$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$.并且(38)式中 $L\frac{\mathrm{d}\Delta t}{\mathrm{d}t}$项与 ΔL 中的$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}\Delta t$ 相加成为$\frac{\mathrm{d}(L\Delta t)}{\mathrm{d}t}$可形成更大的守恒量,从而使体系有不同量随时间而变的全过程(变分的积分区间 $t\in[t_1,t_2]$)的定量表示.故积分型变分一般情况下有两类不失不得守恒量,即(39)式和体系量的动态瞬时定量因果守恒量(14)式.可见 Euler-Lagrange 方程,必须加上守恒量方程(39)才与积分型变分(2)式等价.

由(2)式导出的(14)式可知,对体系不同量变化关系有任一时刻必须满足的动态瞬时定量因果关联方程(14),也有整个时间总过程中满足的体系不同量变化的定量因果关联(2)式,即有体系不同量的动态瞬时定量因果关联,也有体系不同量的全过程的定量因果关联,它们都是宇宙中得失相等的定量因果原理的自然推论.

当取等时变分时,由一般守恒量表达式(40),得 Hamilton 变分原理下的 m 个守恒量,

$$\begin{aligned}&\sum_i\Big[\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\Big)\xi_i^\sigma+\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\dot{\xi}_i^\sigma+g^\sigma=\mathrm{const}.\\&(\sigma=1,2,\cdots,m).\end{aligned}\tag{43}$$

其对应表征系统的运动方程仍是(14)式.

类似于获得(40)式的讨论,由(17)式可得 Voss 变分原理的守恒量也是(40)式,其相应的运动方程也是(14)式.

同理由(20)式可得 Hölder 变分原理的 m 个守恒量,

$$\begin{aligned}&\sum_i\Big[\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\Big)\xi_i^\sigma+\frac{\partial L}{\partial\ddot{q}_i}\dot{\xi}_i^\sigma\Big]=\mathrm{const}.\\&(\sigma=1,2,\cdots,m).\end{aligned}\tag{44}$$

由(20)式仍得表征系统量变化的 Euler-Lagrange 方程(14).

由于 Maupertuis-Lagrange 变分原理(28)式正是 Hölder 变分原理(22)式在有约束条件(25)和(26)式

下的结果，故相应的守恒量仍是(44)式. 其相应的运动方程仍为(14)式.

由(26)和(28)式得

$$L = 2T - \text{const}. \tag{45}$$

故用(45)式代入(44)和(14)式得 Maupertuis-Lagrange 变分原理下守恒量和运动方程为

$$\sum_i \left[\left(\frac{\partial 2Y}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial 2T}{\partial \ddot{q}_i} \right) \xi_i^\sigma + \frac{\partial 2T}{\partial \ddot{q}_i} \dot{\xi}_i^\sigma \right] = \text{const}.$$

$$(\sigma = 1, 2, \cdots, m). \tag{46}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \frac{\partial T}{\partial \ddot{q}_i} = 0. \tag{47}$$

由以上讨论可知，不同变分原理的表征体系量动态定量因果变化的守恒方程都是(14)式，而不同条件的变分原理所对应的在群 G 作用下的守恒量可以是不同的. 前者表征物理规律不依赖于不同的条件，后者表征物理表现形式可以多种多样，因为 Noether 的不变守恒量总是与物理可观察量相对应. 可见具有得失相等特性的定量因果原理是很一般的. 限于篇幅，向高阶 L 和场论中的推广等将另文讨论.

5. 总 结

本文利用宇宙中得失相等的定量因果原理，统一地导出了 Lagrange 量中含坐标关于时间一阶、二阶导数的积分型 Hamilton 原理、Voss 原理、Hölder 原理、Maupertuis-Lagrange 原理等，给出了所有这些原理的相关联系和统一描述. 得出依据定量因果原理还可以有多种不同条件的高阶 L 的新作用原理可以定义和导出，并统一地导出了一阶、二阶 L 的所有这些变分原理.

由于宇宙中各种事物的演化发展应满足因果原理，所以因果原理是宇宙中各种事物演化发展关联的纽带. 故得出所有这些适合于不同系统的原理之所以能成立，是因为任一系统的任一演化过程必须满足宇宙中得失相等的定量因果原理，进而导出了满足定量因果原理的相应守恒律等一些重要的结论. 如导出了二阶 L 的 Voss，Hölder 等原理所对应的守恒量和相关原理成立的条件，得出 $f_0 = 0$ 并不是通常一些文献所说的是保持 Euler-Lagrange 方程不变的结果，而是满足定量因果原理的结果. 并且发现所有变分原理的运动方程都是(14)式，而不同条件的变分原理其所对应的在不同群 G 作用下的守恒量可以是不同的. 前者表征物理规律不依赖于不同的条件，后者表征物理表现形式可以多种多样. 这对过去众多且零散的变分原理有了一个系统而深入其本质的理解，并自然地使这些变分原理成为定量因果原理的推论.

感谢李子平教授和梅凤翔教授的讨论并提出有益的意见.

[1] Jeffreys H S，Swirles B 2002 *Methods of Mathematical Physics* (Singapore：World Scientific)

[2] Moore E N 1983 *Theoretical Mechanics* (New York：Wiley)

[3] Fetter A L，Walecka J D 1980 *Theoretical Mechanics of Particles and Continua* (New York：McGraw-Hill)

[4] Chen B 1987 *Analytical Dynamics* (Beijing：Peking University Press) (in Chinese) [陈 滨 1987 分析动力学 (北京：北京大学出版社)]

[5] Mei F X 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing：Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 1991 高等分析力学 (北京：北京理工大学出版社)]

[6] Chetaev N G 1989 *Theoretical Mechanics* (Moscow：Mir Publishers)

[7] Huang Y C，Li X G 2001 *J. Nature* **23** 227 (in Chinese) [黄永畅、李希国 2001 自然杂志 **23** 227]

[8] Huang Y C，Ma F C，Zhang N 2004 *Mod. Phys. Lett.* B **18** 1367

[9] Huang Y C *et al* 2005 *Modern Astrophysics and Cosmology* (Beijing：Science Press) (in Chinese) [黄永畅等 2005 现代天体物理和宇宙学 (北京：科学出版社)]

[10] Huang Y C，Lin B L 2002 *Phys. Lett.* A **299** 644

[11] Nash C，Sen S 1983 *Topology and Geometry for Physicists* (London：Academic Press)

[12] Djukic D S 1993 *Int. J. Non-linear Mech.* **8** 479

[13] Pars L A 1965 *A Treatise on Analytical Dynamics* (London：Heinemann)

[14] Rosenberg R M 1977 *Analytical Dynamics of Discrete Systems* (New York，London：Plenum)

Unification of different integral variational principles*

Huang Yong-Chang[1)3)†] Li Xi-Guo[2)4)]

[1)] (Institute of Applied Mathematics and Physics, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

[2)] (Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

[3)] (China Center of Advanced Science and Technology (World Laboratory), Beijing 100080, China)

[4)] (National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou, Lanzhou 730000, China)

(Received 4 January 2005; revised manuscript received 8 March 2005)

Abstract

In terms of a mathematical expression of the quantitative causal principle, this paper gives a unification of Hamilton, Voss, Hölder, Maupertuis-Lagrange variational principles of integral style of the second-order Lagrangians, and finds the intrinsic relations among all the different integral variational principles. It is proved that $f_0 = 0$ is just the result satisfying the quantitative causal principle. The Noether conservation charges of Hamilton, Voss, Hölder, Maupertuis-Lagrange variational principles are shown up, and the intrinsic relations among the Noether conservation charges of all the integral variational principles are discovered. Our investigations make the expressions of the past scrappy numerous variational principles be unified into a relative consistent system of all the variational principles in terms of the quantitative causal principle, and show that all the variational principles become deductions of the quantitative causal principle.

Keywords: variational principle, causal principle, motion equation, symmetry

PACC: 0330

* Project supported by the Direction Program of Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KJCX2-SW-N02), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10435080), and the Development Foundation of Science and Technology of Education Committee of Beijing, China (Grant No. Km200310005018).

† E-mail: ychuang@bjut.edu.cn