

非对称双稳系统中平均首次穿越时间的研究^{*}

靳艳飞 徐伟[†] 马少娟 李伟

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2004 年 12 月 16 日收到 2005 年 1 月 12 日收到修改稿)

研究了由乘性白噪声和加性白噪声驱动的非对称双稳系统中, 势阱的非对称性对两个不同方向的平均首次穿越时间的影响. 发现在非对称双稳系统中, 两个不同方向的平均首次穿越时间是与初始状态有关. 此外, 对一维非对称达芬模型的平均首次穿越时间进行了研究. 数值结果表明 (1) 非对称双稳系统的平均首次穿越时间对初始状态有“记忆性” (2) 噪声强度对两个不同方向的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 的影响是不同的: $\ln T_- - D$ 曲线上存在峰值, 出现了“共振”现象, 而 $\ln T_+ - D$ 曲线是单调的 (3) 势阱的非对称性 r 对 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 的影响是不同的: $\ln T_- - r$ 曲线上存在极小值, 出现了“抑制”现象, 而 $\ln T_+ - r$ 曲线是单调的.

关键词: 平均首次穿越时间, 非对称双稳系统, 乘性噪声, 加性噪声

PACC: 0540, 0250

1. 引言

噪声诱导的逃逸问题出现在各个领域并已成为人们关注的焦点^[1-15], 逃逸率和平均首次穿越时间通常是用来刻画逃逸过程的两个特征量. Doering 和 Gadoua^[1]在对分段线性系统的逃逸问题进行研究时首次提出了“激活共振”, 后来在对其他系统进行研究时也发现了“激活共振”现象^[2,3]. 此外, 人们发现噪声之间的相关性对热传导、两维流体力学等物理学过程有很大影响, 因此噪声之间的相关性也被引入逃逸问题的研究中. Madureira 等^[4]研究了具有关联乘性噪声和加性噪声的双稳系统, 发现噪声之间的关联性对激活率有很大的影响. 王俊等^[5]证明了噪声之间的相关性能够导致平均首次穿越时间对称性的破裂. 同时, 色噪声的引入也能使平均首次穿越时间的研究中出现共振或抑制现象^[6-11].

上述文献主要研究的是对称的双稳系统, 然而在许多实际的物理系统中对称性是不能保证的, 故势阱的非对称性被引入磁通量闸门磁力计测量器和超导量子干涉设备中来探测弱的信号^[16-18]. 李静辉^[19]研究了由白噪声驱动的双稳系统中势阱的非对称性对随机共振的影响, 发现势阱的非对称性

能够使系统的信噪比减小. Nikitin 等^[20]研究了由周期信号和随机力驱动的非对称双稳系统, 给出了转换时间分布的理论和数值结果. 对于势阱的非对称性对平均首次穿越时间的影响研究甚少, 因此为了重点研究势阱的非对称性对平均首次穿越时间的影响, 本文中仅考虑了由不相关的乘性和加性白噪声驱动的非对称双稳系统. 为了进一步了解该系统的动力学行为, 还讨论了噪声对平均首次穿越时间的影响.

2. 一般的非对称双稳系统

考虑一个由加性白噪声和乘性白噪声驱动的一维非对称双稳系统, 其模型可由下列朗之万方程来表示:

$$\dot{x} = -U'(x) + g(x)\xi(t) + \eta(t), \quad (1)$$

$$U(x) = V(x) + rh(x), \quad (2)$$

式中, $U(x)$ 表示非对称的双稳势函数, $V(x)$ 表示对称的双稳势函数, r 代表势阱的非对称性. 假设函数 $V(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 具有下面的性质:

$$V(x) = V(-x),$$

$$V'(x) = -V'(-x),$$

$$g(x) = -g(-x),$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10472091, 10332030)和陕西省自然科学基金(批准号: 2003A03)资助的课题.

[†] E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

$$\begin{aligned} g'(x) &= g'(-x), \\ h(x) &= -h(-x), \\ h'(x) &= h'(-x). \end{aligned} \quad (3)$$

噪声项 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$ 的统计性质可以由它们的均值和方差来表示,

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2\alpha\delta(t-t'), \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2D\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t)\eta(t') \rangle &= \langle \eta(t)\xi(t') \rangle = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

式中 α, D 分别为乘性噪声强度和加性噪声强度.

根据方程(1)–(4)可得稳态概率密度函数为

$$\rho_{st}(x) = N [B(x)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{\tilde{U}(x)}{D}\right], \quad (5)$$

式中 N 为归一化常数,修正的势函数

$$\tilde{U}(x) = \int_{-\infty}^x dx \{V'(x) + rh'(x)\} D / B(x),$$

$$B(x) = \alpha g^2(x) + D.$$

通过求解方程

$$\partial U(x) / \partial x = V'(x) + rh'(x) = 0,$$

可以得到非对称势函数的极值点.假设 x_+, x_- 为上述方程的根,由平均首次穿越时间的定义有

$$\begin{aligned} T_+(x_- \rightarrow x_+) &= \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{B(x)\rho_{st}(x)} \int_{-\infty}^x dy \rho_{st}(y), \\ T_-(x_+ \rightarrow x_-) &= \int_{x_+}^{x_-} \frac{dx}{B(x)\rho_{st}(x)} \int_x^{+\infty} dy \rho_{st}(y). \end{aligned} \quad (6)$$

这里, $T_+(x_- \rightarrow x_+)$ 和 $T_-(x_+ \rightarrow x_-)$ 分别为由 x_- 到 x_+ 和由 x_+ 到 x_- 的平均首次穿越时间.对于受不相关的加性白噪声和乘性白噪声激励的对称双稳系统,由文献[5]可知: $T_+(x_- \rightarrow x_+) = T_-(x_+ \rightarrow x_-)$. 根据方程(5)–(6),在非对称双稳系统中, $\rho_{st}(x) \neq \rho_{st}(-x)$,故两个不同方向的平均首次穿越时间 $T_+(x_- \rightarrow x_+)$ 和 $T_-(x_+ \rightarrow x_-)$ 不再相等,即在非对称的双稳系统中平均首次穿越时间对初始状态具有“记忆性”.

为了研究势阱的非对称性对平均首次穿越时间的影响,我们将状态空间由 (x) 扩展到 (x, r) .当 $r \neq 0$ 时,函数

$$B(x) = B(-x),$$

$$\tilde{U}(x, r) = \tilde{U}(-x, -r),$$

由(6)式可知

$$T_+(x_- \rightarrow x_+, r) = T_-(x_+ \rightarrow x_-, -r).$$

故只需考虑在 $r \geq 0$ 的情况下,噪声强度以及势阱的

非对称性对平均首次穿越时间 $T_+(x_- \rightarrow x_+, r)$ 和 $T_-(x_+ \rightarrow x_-, r)$ 的影响.

3. 非对称的达芬模型

受乘性白噪声和加性白噪声激励的非对称过阻尼达芬模型可由下列一维运动微分方程描述:

$$\dot{x} = -U'(x) + x\xi(t) + \eta(t), \quad (7)$$

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + rx, \quad (8)$$

式中,势函数 $U(x)$ 在 $-2\sqrt{3}/9 < r < 2\sqrt{3}/9$ 的条件下,表示一个非对称双稳势函数.

根据方程(5)和(7),可得稳态概率密度函数为

$$\rho(x) = \frac{N}{\sqrt{\alpha x^2 + D}} \exp\left[-\frac{\tilde{U}(x, r)}{D}\right], \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x, r) &= x^2 D / 2\alpha - (D + \alpha) \text{Dln}(\alpha x^2 + D) / 2\alpha^2 \\ &\quad + r D \arctan(\sqrt{\alpha x} / \sqrt{D}) / \sqrt{D\alpha}. \end{aligned} \quad (10)$$

这里 N 为归一化常数.

根据(8)式,当 $-2\sqrt{3}/9 < r < 2\sqrt{3}/9$ 时,系统具有两个稳定状态和一个不稳定状态.通过解方程 $U'(x) = 0$ 可得它的两个稳定点和一个不稳定点分别为

$$\begin{aligned} x_{s1} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) - \frac{\pi}{3}\right), \\ x_{s2} &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right)\right), \\ x_{un} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) + \frac{\pi}{3}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

这里, x_{s1}, x_{s2} 代表稳定点, x_{un} 代表不稳定点.

利用平均首次穿越时间的定义(6)式和最快速下降法^[21],可得两个不同方向的平均首次穿越时间为

$$\begin{aligned} &T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r) \\ &= \frac{2\pi |(-1 + 3x_{s1}^2)(-1 + 3x_{un}^2)|^{-1/2}}{\sqrt{\alpha x_{s1}^2 + D}} \\ &\quad \times \exp\left(\frac{1}{D} [\tilde{U}(x_{un}, r) - \tilde{U}(x_{s1}, r)]\right), \\ &T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r) \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi |(-1 + 3x_{s2}^2)(-1 + 3x_{sm}^2)|^{-1/2}}{\sqrt{\alpha x_{s2}^2 + D}} \times \exp\left(\frac{1}{D}[\tilde{U}(x_{sm}, r) - \tilde{U}(x_{s2}, r)]\right), \quad (12)$$

其中 $\tilde{U}(x, r)$ 和 x_{s1}, x_{s2}, x_{sm} 分别同方程 (10) (11) 的定义.

根据平均首次穿越时间的表达式 (12), 讨论乘性噪声强度 α 、加性噪声强度 D 和势阱的非对称性 r 对平均首次穿越时间的影响.

图 1 给出了稳态概率密度 $\rho(x)$ 随不同的势阱非对称性 r 变化的情况. 当 $r=0$ 时, 稳态概率密度具有对称的双峰结构, 即粒子停留在稳态 x_{s1} 和稳态 x_{s2} 的概率是相等的, 故当 $r=0$ 时, 两个不同方向的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 是相等的. 当 $r \neq 0$ 时, 稳态概率密度具有非对称的双峰结构, 即粒子停留在稳态 x_{s1} 和稳态 x_{s2} 的概率不再相等, 所以当 $r \neq 0$ 时, 不同方向的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 就不再相等.

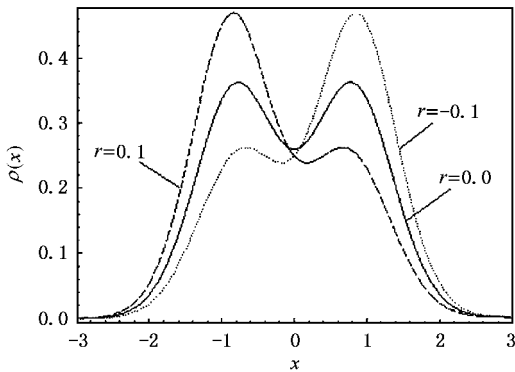


图 1 稳态概率密度 $\rho(x)$ 随不同的势阱非对称性 r 变化的曲线 ($\alpha=0.4, D=0.2$)

图 2 和图 3 分别给出了不同方向的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 作为乘性噪声强度 α 的函数随不同的势阱非对称性 r 变化的情况. 由图 2 和图 3 可见, 平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 随乘性噪声强度 α 的增加而减少. 在图 2 中, $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 随着势阱的非对称性 r 的增加而增加. 在图 3 中, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 开始随着势阱的非对称性 r 的增加而单调减小, 当乘性噪声强度 α 逐渐增加到 0.36 时, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 随着 r 的增加而单调减小的情形将不再保持. 当 $\alpha \geq 0.78$ 时, $r=0.3$ 所对应的那

一条曲线便成为三条曲线中最大的一条.

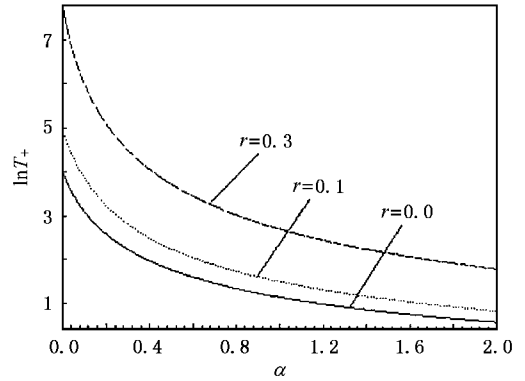


图 2 平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 作为乘性噪声强度 α 的函数随势阱的非对称性 r 变化的曲线 ($D=0.1, r=0.0, 0.1, 0.3$)

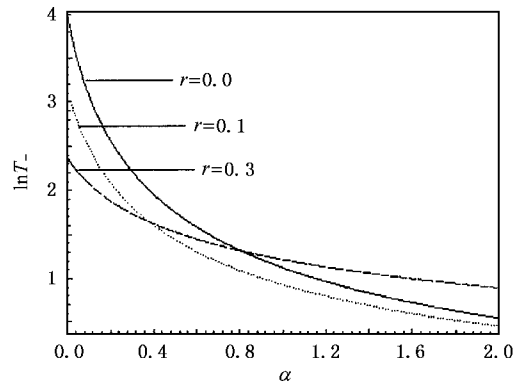


图 3 平均首次穿越时间 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 作为乘性噪声强度 α 的函数随势阱的非对称性 r 变化的曲线 ($D=0.1, r=0.0, 0.1, 0.3$)

图 4 和图 5 给出了两个不同方向的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 作为加性噪声强度 D 的函数随着不同的势阱非对称性 r 变化的情况. 当 $r=0$ 时, 方程 (7) 退化为对称双稳模型的情形, 平均首次穿越时间与初始状态无关, 故在图 4 和图 5 中, 对应于 $r=0$ 的 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 曲线和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 曲线是相同的. 在图 4 中, $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 随着加性噪声强度 D 的增加而减小, 同时 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 随着 r 的增加而增大. 在图 5 中, 加性噪声强度 D 对 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 的影响不同于对 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 的影响, 当 $r > 0$ 时, $\ln T_- - D$ 的曲线上存在一个类似于共振峰的极大值, 出现了“共振”现象, 并且 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 随着 r 增加而减小.

若令乘性噪声强度和加性噪声强度的比率 $R =$

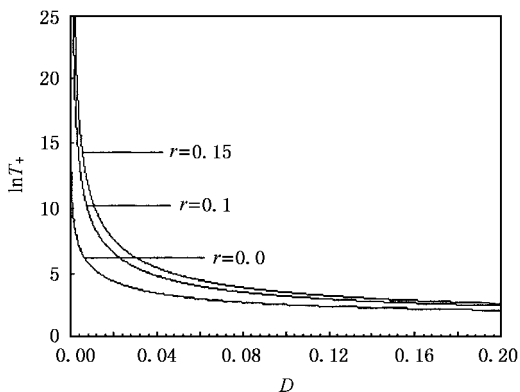


图4 平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 作为加性噪声强度 D 的函数随势阱的非对称性 r 变化的曲线 ($\alpha = 0.2, r = 0.0, 0.1, 0.15$)

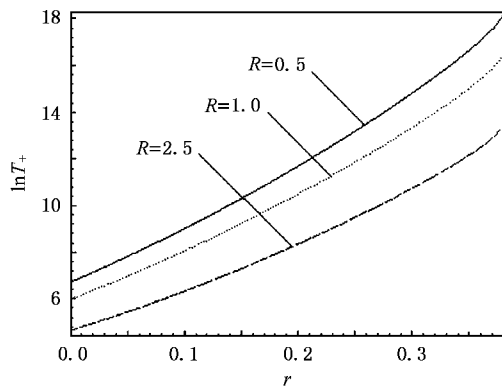


图6 平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 作为势阱非对称性 r 的函数随不同的噪声比率 R 变化的曲线 ($D = 0.04, R = 0.5, 1.0, 2.5$)

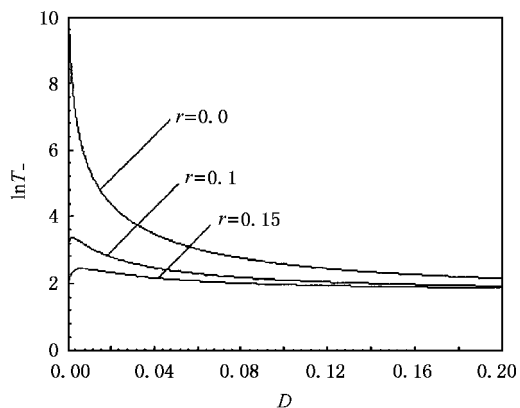


图5 平均首次穿越时间 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 作为加性噪声强度 D 的函数随势阱的非对称性 r 变化的曲线 ($\alpha = 0.2, r = 0.0, 0.1, 0.15$)

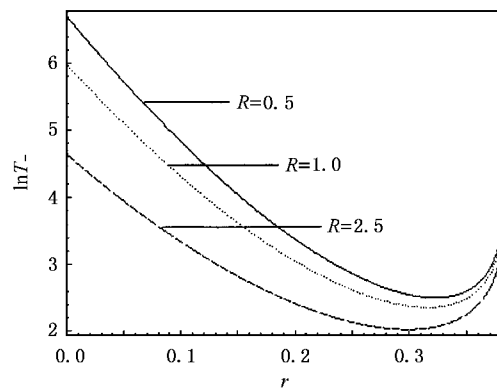


图7 平均首次穿越时间 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 作为势阱的非对称性 r 的函数随不同的噪声比率 R 变化的曲线 ($D = 0.04, R = 0.5, 1.0, 2.5$)

α/D ,图6和图7描述了两个不同方向的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 作为势阱非对称性 r 的函数在 $R = 2.5 (> 1), R = 1$ 和 $R = 0.5 (< 1)$ 三种情况下的变化.在图6中, $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 随着 r 的增加而单调地增大.但是 r 对 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 的影响是完全不同于对 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 的影响.在图7中, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 开始随着 $r (r < 0.3)$ 的增加而减小,当 $r > 0.3$ 时, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 随着 r 的增加而增大,故在 $\ln T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}) - r$ 曲线上存在一个极小值,形成了一个抑制平台.图7还解释了图3中出现的现象.同时,极小值的位置随着 R 的增加而逐渐向左移.在图6和图7中,可以看到对应于 $R = 0.5$ 时不同方向的平均首次穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 是三种情况 ($R = 2.5, R = 1$ 和 $R = 0.5$) 中最大的.

图8给出了 T_+/T_- 随乘性噪声强度 α 变化的曲线.当 $r = 0$ 时, T_+/T_- 恒为常数1,从而证明了在

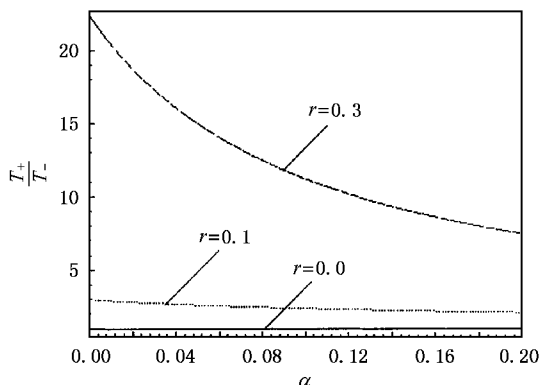


图8 两个不同方向的平均首次穿越时间之比 T_+/T_- 作为乘性噪声强度 α 的函数随不同的势阱非对称性 r 变化的曲线 ($D = 0.16, r = 0.0, 0.1, 0.3$)

对称双稳系统中 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r) = T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$. T_+/T_- 随着 α 的增加而减少,但是随着 r ($r \neq 0$) 的增加而增大,所以势阱非对称性 r 对 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$ 的影响是不同的.

4. 结 论

研究了由乘性白噪声和加性白噪声驱动的非对称双稳系统中势阱的非对称性对两个不同方向的平均首次穿越时间的影响. 我们发现在非对称双稳系

统中,平均首次穿越时间对初始状态具有“记忆性”,即两个不同方向的平均首次穿越时间是不等的,并从稳态概率密度函数的角度解释了这一结果. 还对非对称的达芬模型进行了研究,结果发现势阱的非对称性使平均首次穿越时间的对称性不再保持,并且当势阱非对称性 $r \neq 0$ 时,非对称性 r 和噪声强度对 T_{\pm} 的影响是完全不同的: $\ln T_- - D$ 曲线上存在峰值,出现了“共振”现象,而 $\ln T_+ - D$ 曲线是单调的. $\ln T_- - r$ 曲线上存在极小值,出现了“抑制”现象,而 $\ln T_+ - r$ 曲线是单调的.

- [1] Doering C R , Gadoua J C 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2318
- [2] Reimann P 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 4576
- [3] Li J H , Hu B , Xing D Y *et al* 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6443
- [4] Madureira A J R , Hanggi P , Wio H S 1996 *Phys. Lett. A* **271** 248
- [5] Wang J , Cao L , Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **308** 23
- [6] Jia Y , Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5764
- [7] Mei D C , Xie G Z , Cao L *et al* 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3880
- [8] Jin Y F , Xu W 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **23** 275
- [9] Luo X Q , Zhu S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 977 (in Chinese) [罗晓琴、朱士群 2002 物理学报 **51** 977]
- [10] Gammaitoni L , Hanggi P , Jung P *et al* 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [11] Xie C W , Mei D C 2003 *Chin. Phys.* **12** 1208
- [12] Kang Y M , Xu J X , Xie Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2712 (in Chinese) [康艳梅、徐健学、谢 勇 2003 物理学报 **52** 2712]
- [13] Li J H , Huang Z Q , Wang C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 382 (in Chinese) [李静辉、黄祖洽、王存玉 1998 物理学报 **47** 382]
- [14] Mei D C , Chen L E , Xie G Z *et al* 1999 *Chin. Phys.* **8** 808
- [15] Luo X Q , Zhu S Q , Gao J W 2001 *Chin. Phys.* **10** 1011
- [16] Bulsara A R , Inchiosa M E , Gammaitoni L 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2162
- [17] Inchiosa M E , Bulsara A R , Gammaitoni L 1997 *Phys. Rev. E* **55** 4049
- [18] Gammaitoni L , Bulsara A R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 230601
- [19] Li J H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 031104
- [20] Nikitin A , Stocks N G , Bulsara A R 2003 *Phys. Rev. E* **68** 016103
- [21] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统 (上海 : 上海科技教育出版社)]

The mean first-passage time for an asymmetric bistable system driven by multiplicative and additive noise^{*}

Jin Yan-Fei Xu Wei Ma Shao-Juan Li Wei

(Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University ,Xi'an 710072 , China)

(Received 16 December 2004 ; revised manuscript received 12 January 2005)

Abstract

In this paper , the effects of asymmetry of the potential on the mean first-passage times (MFPTs) in two opposite directions are investigated in an asymmetric bistable system driven by multiplicative noise and additive noise. We find that the MFPTs in two opposite directions are no longer symmetric in an asymmetric bistable system. Furthermore , we calculate the MFPTs of an asymmetric Duffing model. Numerical results show that : (1) The MFPTs depend on the initial states in the asymmetric bistable system , namely , $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ is not equal to $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$. (2) The effects of noise intensity on the MFPTs $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ and $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ are different in the same kind of parameter plane. There exists a peak on each of the curves of $\ln T_-$ versus D , as well as the " resonant activation " , while the variation of $\ln T_+$ versus D is monotonic. (3) The influence of the asymmetry coefficient r on T_{\pm} is entirely different. The curves of $\ln T_-$ versus r have mono-valleys but the variation of $\ln T_+$ versus r is monotonically rising.

Keywords : mean first-passage time , asymmetric bistable system , multiplicative noise , additive noise

PACC : 0540 0250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10472091 , 10332030) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province , China (Grant No. 2003A03).