

混沌吸引子在两个周期振子耦合下的相同步

郝建红^{1,2)} 李 伟^{3,4)}

¹⁾ 华北电力大学信息工程系, 北京 102206)

²⁾ 石家庄学院物理系, 石家庄 050801)

³⁾ 北京师范大学物理系, 北京 100875)

⁴⁾ 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(2004 年 9 月 22 日收到, 2005 年 3 月 25 日收到修改稿)

在分析了系统稳定的基础上, 对非线性混沌吸引子在两个独立外周期振子耦合下的相同步进行了研究. 与一个周期振子耦合的情况不同, 两个周期振子对混沌吸引子的耦合具有排他性和竞争性, 相同步在两个亚稳态交替出现, 各自同步时间长度由外振子参数决定. 确定了周期外振子参数与同步时间长度的关系并与数值模拟计算结果进行了比较.

关键词: 混沌吸引子, 相同步

PACC: 0545

1. 引 言

混沌同步是指两个或两个以上具有相互作用的混沌系统其输出信号在经历暂态过程后, 各自信号之间产生确定的函数关系并且这种函数关系不对初值敏感^[1]. 典型的同步系统, 如驱动-响应同步, 设它们各自混沌信号分别为 x_1, x_2 , 经过足够长的暂态后如有 $x_1 = x_2$, 则可以认为系统达到完全同步状态. 更一般状态下的混沌同步可以是各系统输出信号之间存在固定函数关系 $x_2 = f(x_1)$, 称为广义同步. 因此完全同步可以看作是广义同步的一个特例. 系统同步抑制了混沌轨道的指数性发散, 导致了整个系统分形维数或 Lyapunov 指数的减小. 随着系统参数(包括耦合强度)的改变, 显然会有分岔出现, 而临界点附近存在比较复杂的临界行为(如临界慢化等).

一般而言, 只要系统间存在耦合, 那么混沌信号之间总会产生一定的相关性. 近来的研究表明^[1-7], 在某些情况下, 系统分量之间虽然有明显的相关性但没有确定的函数关系, 如相同步等, 即存在不同于完全同步的“弱同步”的关系(通常这种同步中需要的耦合强度也弱一些). 发生相同步时, 不同系统混沌变量相位锁频(通常确定在一个周期之内), 然而径向变量还是保持完全混沌状态^[8-10]. 为了具体说

明这一点, 考虑两个耦合 Rössler 振子, 分别是

$$\dot{x}_{1,2} = -\omega_{1,2}y - z,$$

$$\dot{y}_{1,2} = \omega_{1,2}x + ay + k(x_{2,1} - x_{1,2}),$$

$$\dot{z}_{1,2} = b + z_{1,2}(x_{1,2} - c),$$

其中, k 为耦合强度, ω_1 与 ω_2 稍有些不同. 定义系统的相角为 $\theta_{1,2} = \arctan(y_{1,2}/x_{1,2})$ (选定合适系统参数, 使轨道在 xy 平面的投影是绕原点定向转动的“相干态”), $k=0$ 时, 是两个独立系统, 有不同的平均角速度, 因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} |\theta_1 - \theta_2| \rightarrow \infty$. 研究表明, 存在一个临界值 k_c , 当 $k \geq k_c$ 时, 发生相同步, 相位差被限定在一定范围之内: $|\theta_1 - \theta_2| \leq K$ (一般 $K \leq 2\pi$). 当发生相同步分岔时, 耦合系统 Lyapunov 指数谱中有一个 Lyapunov 指数从正数改变为负数.

固定频率的外周期振子与一些混沌系统耦合也有锁频现象产生^[11-14]. 由于这样的耦合系统中只有一个混沌振子, 更容易研究相同步的基本意义. 最近一项工作^[15]研究了当两个周期振子共同作用在一个 Rössler 混沌吸引子上时, 各周期振子之间有争夺相同步现象. 本文中, 我们通过分析相同步系统的稳定性, 研究产生这一竞争性行为的原因. 与单个周期振子耦合并实现静态的相同步情况不同, 在多个周期耦合外振子的情况下, 混沌相同步呈现出更加复杂的行为. 例如, 当混沌系统与其中的一个周期振子同步时, 第二个周期振子的作用如同一个干扰源, 将

使前者相同步信号差值幅度增加,直到产生相位“滑移”,而第二个周期振子将在相位“滑移”过程中与混沌振子达到同步状态.如此周而复始,两周期振子轮流与混沌吸引子同步一段时间.我们的工作解释了这种同步现象发生的机制,计算了各自同步发生概率与外振子参数的关系并与数值模拟计算结果进行了比较.

2. 模型和相同步稳定性分析

考虑在外周期振子耦合作用下的 Rössler 振子

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\omega y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= \omega x + ay + s(t), \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c). \end{aligned} \quad (1)$$

这里

$$s(t) = A_1 \sin(\Omega_1 t) + A_2 \sin(\Omega_2 t), \quad (2)$$

其中 Ω_1, Ω_2 ($\Omega_1 \neq \Omega_2$) 是两个非公度独立的周期振子.选择参数 $\omega = 1.0041, a = b = 0.2, c = 4.8$,混沌振子处于相干区域,它的轨迹在 xy 平面上投影关于原点是定向的,可以定义相位角 θ .参数 $A_{1,2}$ 分别表示两个外周期振子的振幅.根据上述对相位角的定义,可以得到相位差 $\phi_{1,2} = \theta - \Omega_{1,2}t$ 的运动方程,

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{1,2}}{dt} &= \Delta\omega_{1,2} + \bar{\zeta} - \frac{A_{1,2}}{2r} \sin(\phi_{1,2}) \\ &\quad - \frac{A_{2,1}}{2r} \sin(\phi_{1,2} \pm \Delta\Omega t) + \xi. \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $\Delta\omega_{1,2} = \omega - \Omega_{1,2}, \Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_2$ 都是常数, r 用平均值 \bar{r} 替代.方程(3)中

$$\begin{aligned} \bar{\zeta} &= \left\langle \frac{z}{r} \sin(\theta) + \frac{a}{2} \sin(2\theta) + \frac{A_1}{2r} \sin(\theta + \Omega_1 t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{A_2}{2r} \sin(\theta + \Omega_2 t) \right\rangle \end{aligned}$$

是快变量的长时间非零平均值,在慢变量方程中对 ϕ 随时间的改变有贡献.而方程(3)中最后一项 $\xi(t)$ 是时间平均值为零的快变量,它的作用类似于朗之万方程中的随机项.由于后者与 $\xi(t)$ 的随时间变化尺度完全不同,一般情况下,它的作用相当于将 $\xi(t)$ 在一定幅度内的快速调制. $\xi(t)$ 在特征时间内的平均值等于方程(3)去掉最后一项所得到的值,因此可以写出

$$\xi(t) \approx \bar{\phi}(t) + A_\xi.$$

这里

$$A_\xi \approx \int_0^t \xi(t) dt.$$

数值计算表明,在上述给定参数的情况下,它具有相当小的振幅(典型周期 $T = 2\pi/\omega$ 内平均振幅约为 $\bar{A}_\xi \approx 0.5$,并且不随时间积累),而 $\bar{\phi}(t)$ 满足方程

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\phi}_{1,2}}{dt} &= B_{1,2} - \alpha_{1,2} \sin(\bar{\phi}_{1,2}) \\ &\quad - \alpha_{2,1} \sin(\bar{\phi}_{1,2} \pm \Delta\Omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $B_{1,2} = \Delta\omega_{1,2} + \bar{\zeta}$ 和 $\alpha_{1,2} = A_{1,2}/2\bar{r}$ 都是常数项.当 $\alpha_{1,2}$ 都不为零时,是非自治方程,可以写成二维的自治方程组.在不同参数下,方程(4)呈现很不相同的特性.从下面的数值模拟计算中可以看到,适当选择参数,方程(4)本身就具有 2π 滑移的特性.因为方程是完全确定性的(不包含快变量 $\xi(t)$ 项),这种滑移是系统的内禀性质.

对于单个外周期振子情况($a_1 = a, a_2 = 0$),方程(4)简化为不含时间的一维自治方程,可以得到解析解

$$\bar{\phi}(t) = 2 \arctan \left[\frac{\alpha(1-D) + (1+D)\sqrt{\alpha^2 - B^2}}{B(1-D)} \right]. \quad (5)$$

这里

$$\begin{aligned} D &= \frac{B \tan(\bar{\phi}_0/2) - \alpha - \sqrt{\alpha^2 - B^2}}{B \tan(\bar{\phi}_0/2) - \alpha + \sqrt{\alpha^2 - B^2}} \\ &\quad \times \exp(-t\sqrt{\alpha^2 - B^2}), \end{aligned}$$

其中 $\bar{\phi}_0$ 是 $\bar{\phi}$ 的初值.在满足条件 $|\alpha| \geq |B|$ 时,将收敛到稳定不动点 $\bar{\phi}_s(t \rightarrow \infty) = \arcsin(B/\alpha)$.应注意,在每个 2π 区间内除存在稳定不动点 $\bar{\phi}_s$ 外,还存在不稳定不动点 $\bar{\phi}_u = \pi - \bar{\phi}_s$.显然,在没有外部随机力扰动, $\bar{\phi}$ 在暂态过程后将保持不变,但是如果存在外部随机力扰动, $\bar{\phi}$ 将可能在这些不同区间内的不动点之间滑移.当然在每一区间内总是有趋近这一区间内稳定不动点的趋势,每个区间都有较高势垒隔开.

设势为 $V(\phi)$,由

$$\frac{d\bar{\phi}}{dt} = -\frac{dV(\bar{\phi})}{d\bar{\phi}}$$

容易得出

$$V(\bar{\phi}) = -B\bar{\phi} - \alpha \cos(\bar{\phi}).$$

这是一个有 2π 周期的阶梯势,有平均值为 α 的斜率.不动点的稳定性由势中系数 α, B 决定.有以下

三种情况 (1) 当 α 较大而比值 $\left| \frac{B}{\alpha} \right|$ 较小时, 势的斜率较小, 每个周期内都有较深和内壁陡峭的势, 因此不动点稳定性较强. (2) 当 $\left| \frac{B}{\alpha} \right| \approx 1$ 时阶梯较为平坦, 而且稳定不动点靠近阶梯肩部, 这样稳定性比较弱, 容易在扰动下出现滑移. (3) 当 $\left| \frac{B}{\alpha} \right| > 1$ 时没有稳定不动点. 只要 $B \neq 0$, V 是一个定向势, 滑移方向由系数决定.

对稳定不动点的扰动来源于快变量 ξ , 虽然 A_ξ 振幅较大, 但是它在方程 (4) 特征时间内的平均值迅速减小. 因此只有在第一种情况下, 不动点稳定性较弱, 扰动会产生滑移, 这时不动点 $\bar{\phi}_u$ 接近 $\pi/2 + 2\pi n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). 具体地, 只要 $|\bar{\phi}_u| \geq (\pi - \tilde{A}_\xi)/2$ 就是 ξ 的扰动只要不跨越周期内的极值, 不动点基本保持稳定. 当然在周期势的各个平台的不动点仍然是较为稳定的地方, ϕ 将在此停留较长时间, 再在特征时间 $\tau = \pi(B + \alpha)$ 滑向下一周期的不动点. 这就是在 $\phi-t$ 图中产生 2π 滑移平台的原因. 因此对于不变的外振子振幅 A, Ω 在

$$\begin{aligned} \omega - \bar{\zeta} - \alpha \sin\left(\frac{\pi - \tilde{A}_\xi}{2}\right) \\ \leq \Omega \leq \omega - \bar{\zeta} + \alpha \sin\left(\frac{\pi - \tilde{A}_\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

范围内得到稳定相同步. 这个范围随 A 增加而加宽, 在 $\Omega-A$ 相图中形成连续的稳定相同步参数区 (“舌头”); “舌头”内的参数都是相同步 (锁频) 的.

如果存在两个外周期振子, 则 $\bar{\phi}$ 不再有固定不动点. 方程 (4) 最后一项对时间依赖, 是一个非自治方程. 依参数和初值不同, 方程的解分别为 (1) 逃逸解, 在 $|B| \gg |\alpha|$ 的情况下, 有 $\bar{\phi}(t) \approx Bt$; (2) 稳定周期解, 这时 $|B| < |\alpha|$, 方程的解被限制在一定范围内, $|\bar{\phi}(t)| \leq 2\pi$; (3) 介于第一和第二种情况之间, 有 2π 滑移的亚稳定周期解. 在第二种情况下, 当 $\bar{\phi}(t)$ 的周期与 $2\pi/\Delta\Omega$ 合拍时, 它被限制在一定范围成为周期函数, 对应一个振子的稳态相同步. 当 $\bar{\phi}(t)$ 的周期与 $2\pi/\Delta\Omega$ 不合拍, 当 $\bar{\phi}$ 接近 $\pm\pi/\chi$ (这里不计 $2n\pi$ 的差别), 如果此时 $\Delta\Omega t \approx (2n+1)\pi$, $\bar{\phi}(t)$ 将继续增加 (或减小), 导致滑移现象的出现. 与单个外周期振子情况不同, 两个外振子情况下, 可能出现双重相同步稳定结构. 例如选择 $B_1 = -B_2, \alpha_1 = \alpha_2$, 相同步具体处于哪一个稳定同步态决定于初值. ξ

的干扰可以使一个稳定同步态产生滑移, 但是滑移一般不直接移动 2π 从而回到原来的稳态, 而是在滑移过程中遇到另一个振子对应的稳态, 并且在这个稳态中维持一定时间直到有新的滑移产生, 如此交替变化. 相比较, 它将在相对稳定一些的状态中维持更长的时间. 分析方程 (5) 不难看出, 当混沌吸引子与一个外振子保持相同步时, 另外一个振子总是起干扰作用, 在它的调制下, 相同步态的总振幅大大增加, 从而导致同步的失稳. 从这个意义上看, 两个外周期振子间存在争夺稳定同步态的相互竞争关系. 对应较小 $|B|$ 的同步态有较高稳定性, 它的同步时间会比较长. 当 Rössler 混沌吸引子与一个外振子锁频时, 另一周期振子与混沌振子相位差按 $\Delta\Omega t$ 改变.

3. 数值模拟计算

以下给出数值模拟计算的结果. 图 1 和图 2 给出了不同参数时 Rössler 吸引子与一个外周期振子耦合的情况. 图 1 中的曲线 a 满足稳定同步的条件, 可以长时间保持锁频状态; 曲线 b 中, ϕ_1 在正方向有 2π 的滑移. 图 1 内插图是局部放大图, 表示当滑移发生时的情况. ϕ 在 $2A_\xi$ 范围内振动, 滑移时间的下限为 $\tau_{\min} = 2\pi(B + \alpha) \approx 140T$, 实际滑移暂态过程时间比 τ_{\min} 长, 但是在同一数量级.

只有一个外周期振子 (参数为 $A_1 = 0.06, A_2 = 0$) 时, Ω 在 “舌头” 中的范围 $\kappa \in [1.075, 1.089]$. 取 $\Omega_1 = 1.085$ 相同步是稳定的, ϕ 的振幅为 A_ξ , 没有滑移. 当参数范围超出 κ , 对应不动点的临界值在 $|\bar{\phi}_c| \geq (\pi - A_\xi)/2$ 附近, 由于 ξ 的扰动, 每隔一段不规则的时间间隔将有 2π 的滑移 (见图 1). 随着参数值远离临界点 ($|B| \geq |\alpha|$), 这些滑移的时间间隔将越来越小, 最后得到斜率近似为 B 的直线 (宽度为 $2A_\xi$). 在 $A_2 \neq 0$ 的情况下, 不失一般性, 取 $A_1 = A_2 = 0.06, \Omega_1 = 1.085, \Omega_2 = 1.078$. 这里 $\Omega_{1,2}$ 的取值在图 1 对应 A 值的 “舌头” 区域 κ 内. 由于受到方程 (5) 中 t 的调制作用, 相同步时间段内 ϕ 的变化幅度几乎达到 π , 因此在 ξ 的作用下容易发生滑移 (见图 2), 参数空间内相同步范围有很大程度的减小. 对比图 1, 不出现这种锯齿状调制, ϕ 的变化幅度限制在大约 $2A_\xi \approx \pi/3$ 内, 参数空间有较大的相同步 (“舌头”) 范围.

图 3 给出了 $\phi_{1,2}-t$ 和 $\phi_1-\phi_2$ 的变化关系, 其参数与图 2 相同, B_1 的值比较小, ϕ_1 有较长时间的锁频

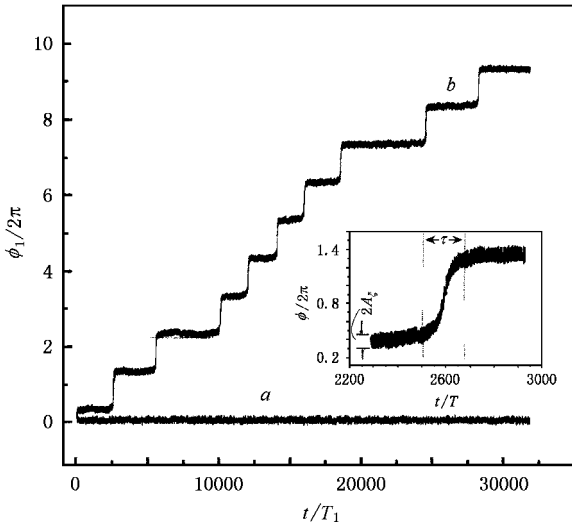


图 1 Rössler 吸引子与一个外周期振子耦合的情况 参数为 $A_1 = 0.06, A_2 = 0$. (a) 外振子频率为 $\Omega_1 = 1.085$, 满足稳定同步的条件, 可以长时间保持锁频状态 (b) 外振子频率为 $\Omega_1 = 1.0745$, 这时 ϕ_1 在正方向有 2π 的滑移

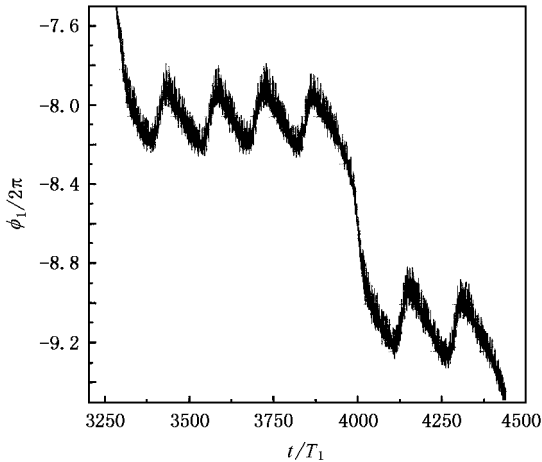


图 2 两个外周期振子具有相同振幅 $A_1 = A_2 = 0.06$ 时, ϕ_1 随时间的变化 可以看到锁频范围内 ϕ_1 被第二个周期外振子调制因而它的变化范围增加很大. 当 ϕ_1 接近 $2\pi(n - 1/4)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时将不可避免地向下滑移 2π

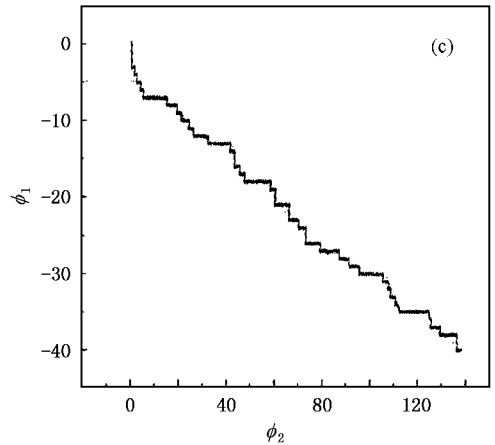
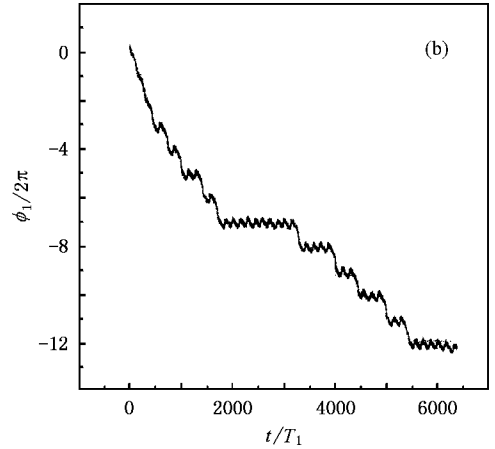
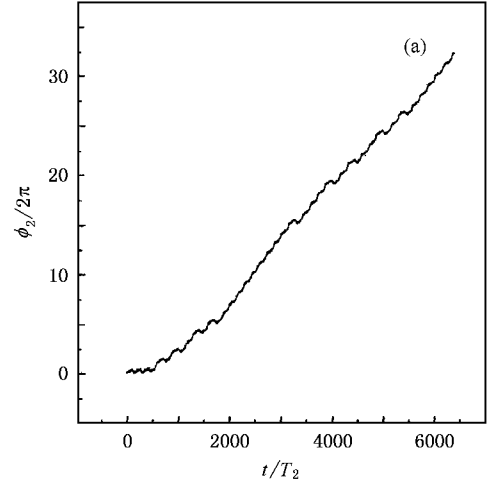


图 3 $\phi_{1,2-t}$ 和 $\phi_1-\phi_2$ 的变化关系 (a) ϕ_2-t (b) ϕ_1-t (c) $\phi_1-\phi_2$. 系统参数与图 2 情况相同. 数值计算结果为 $\bar{\zeta} = 0.07935$, 因此可以得到 $B_1 = -0.00155, B_2 = 0.00545$. Rössler 振子轨道径向平均长度 $\bar{r} = 6.36457$, 因此 $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 0.00471$

态(见图 3(b)), 而由于一个较大的 B_2, ϕ_2 几乎没有真正意义上锁频的相同步态(见图 3(a)), 只是在 ϕ_1 作 2π 滑移的过程中受到它一定程度的阻滞. 从(图 3(c))的梯形图可以看出, 当一个振子锁频时, 另外一个振子的相差 ϕ 以速率 $\Delta\Omega$ 改变, 显然第一个振子有更多锁频时间.

图 4 是对方程(5)进行计算的结果, 注意这里没有考虑 ξ 的影响. 图 4 曲线 a 和曲线 b 分别对应 $\bar{\phi}_2$

和 $\bar{\phi}_1$, 取与图 3 相同参数. 图 4 曲线 a 与图 3(a) 情况定性相符, 只是斜率稍微小些, 可以看作是后者受到 ξ 项作用的缘故. 在图 4 曲线 b 的情况下, 方程

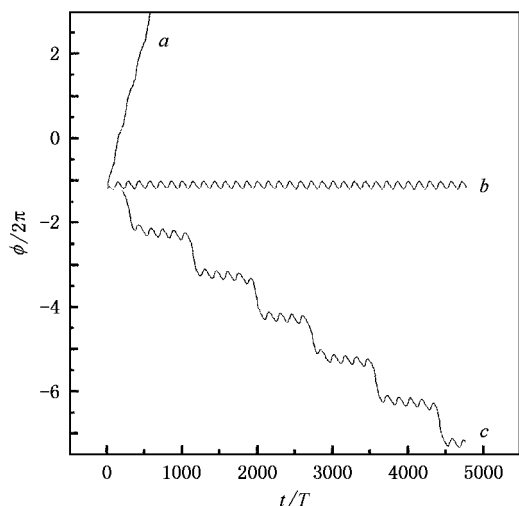


图4 方程(5)计算的结果 B 的取值: 曲线 a 为 0.00545、曲线 b 为 -0.00155、曲线 c 为 -0.003, 其余参数与图3同. 在不计 ξ 的情况下, 曲线 a 对于 $B > \alpha$ 没有稳定的相同步态, 曲线 b 同步是稳定的, 曲线 c 存在一些亚稳定态, 在这些态中有 2π 的滑移

(5) 有稳定的相同步解, 对比图 3(b), 看出 2π 滑移是 ξ 扰动的“净结果”. 就是 ξ 不出现, 方程(5)本身

也有 2π 滑移的解(图4曲线 c). 在 $\alpha_1 = \alpha_2$ 的情况下, 方程中有宽度大约为 π 的稳定(亚稳定)区. 稳定区之间, ϕ 作快速的滑动, 但是在稳定区内则能维持比较长的时间.

4. 结果和讨论

本文分别就只有一个和有两个外振子耦合的情况讨论了 Rössler 混沌吸引子在外周期谐振子耦合下的相同步行为, 对它们的相同步稳定性进行分析. 在两个外振子耦合的情况下, 由于其同步相位差 ϕ 的变化范围增加到大约为一个外振子耦合情况下的 3 倍, 相同步稳定性比后者要差, 相空间稳定参数范围(“舌头”)明显减小. 两个外周期振子中具有较小 B 值的相同步态有较高稳定性. 在实际过程中多系统耦合的相同步现象普遍存在, 而且实验中经常观察到锁频、耦合竞争等现象^[4, 10, 15], 需要建立数学模型进行稳定性分析, 很多具体问题最后都可以抽象到类似本文中分析的情况, 这使我们对多系统混沌相同步稳定性的讨论具有了一些普遍的意义.

[1] Hu G, Xiao J H, Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese)[胡岗、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制(上海: 上海科技教育出版社)]

[2] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821

[3] Fujisaka H, Yamada T 1983 *Prog. Theor. Phys.* **69** 32

[4] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1084

[5] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193

[6] Zheng Z G, Hu G, Zhou C S *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2320 (in Chinese)[郑志刚、胡岗、周昌松等 2000 物理学报 **49** 2320]

[7] Chen S H, Xie J, Lu J A *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 736 (in Chinese)[陈士华、谢进、陆君安等 2002 物理学报 **51** 736]

[8] Taherion S, Lai Y C 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6247

[9] Maza D, Vallone A, Mancini H *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5567

[10] DeShazer D J, Breban R, Ott E *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 044101

[11] Mormann F, Lehnertz K, David P *et al* 2000 *Physica D* **144** 358

[12] Stone E F 1992 *Phys. Lett. A* **163** 367

[13] Pikovsky A, Osipov G, Rosenblum M *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 47

[14] Rosa E, Ott E, Hess M H 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1642

[15] Romulus R, Ott E 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056219

Phase synchronization of Rössler in two coupled harmonic oscillators

Hao Jian-Hong^{1,2)} Li Wei^{3,4)}

¹⁾*Department of Information Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)*

²⁾*Department of Physics, Shijiazhuang College, Shijiazhuang 050801, China)*

³⁾*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)*

⁴⁾*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China)*

(Received 22 September 2004 ; revised manuscript received 25 March 2005)

Abstract

Phase synchronization dynamics of Rössler oscillator in two coupled harmonic oscillators is discussed based on stability analysis of the coupled chaotic system. Different from the case of only one coupled periodic oscillator, in two oscillators one or the other harmonic oscillator will entrain alternately (or they will entrain exclusively). We find that depending on the stability of the system, the duration of the phase synchronization is affected by parameters of the oscillator. The simulated results agree with our theoretic values within the range of error.

Keywords : chaotic attractors, phase synchronization

PACC : 0545