

# 双向耦合混沌系统广义同步<sup>\*</sup>

张平伟 唐国宁 罗晓曙<sup>†</sup>

(广西师范大学物理与信息工程学院, 桂林 541004)

(2004 年 12 月 24 日收到; 2005 年 3 月 18 日收到修改稿)

提出了用条件熵来测定双向耦合混沌系统的广义同步, 随着耦合强度的增大, 当条件熵有一突出的最小值出现时表明两系统达到广义同步. 为了证明这种方法的有效性, 将这种方法用于 Rössler-Lorenz 与 Rössler-Rössler 混沌系统的双向耦合情况, 数值模拟结果表明该方法非常有效且具有较强的鲁棒性.

关键词: 广义同步, 双向耦合, 条件熵

PACC: 0545

## 1. 引言

自从 1990 年美国学者 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup>在实验中发现混沌同步以来, 混沌同步一直成为研究的热门课题. 人们相继提出了多种同步形式, 如完全同步<sup>[1-5]</sup>、广义同步<sup>[6-8]</sup>、相同步<sup>[9-13]</sup>及滞后同步<sup>[9-11]</sup>. 但目前对广义同步的研究多数局限于单向耦合情况, 对于双向耦合情况, 文献 [14] 只做了初步的研究, 且所用的广义同步的判据沿用了单向耦合的情况, 并非严格意义上的两个系统双向耦合的广义同步, 因此对如何判断相互耦合两个混沌系统是否达到广义同步有待于进一步研究. 在文献 [15] 中, 作者给出利用符号动力学中条件熵判断单向耦合的广义同步, 其结果与用条件 Lyapunov 指数做判据的结果一致, 而且这种符号动力学方法能够很好地反映混沌伪随机序列复杂度<sup>[16]</sup>. 本文提出用条件熵测定双向耦合混沌系统的广义同步, 随着耦合强度的增大, 条件熵出现突出的最小值时表明两混沌系统达到广义同步, 它与两个系统的第二大 Lyapunov 指数由正变负对应.

## 2. 符号动力学分析与条件熵

考虑两个非线性系统:

$$\dot{x} = f(x, \alpha y),$$

$$\dot{y} = g(y, \beta x), \quad (1)$$

式中  $x, y$  代表两个系统状态变量,  $x \in R^{m_1}, y \in R^{m_2}$ ,  $\alpha, \beta$  代表相互耦合. 假设从系统 (1) 中得到两个时间序列

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(t_0 + n\tau), \\ y_j &= y_j(t_0 + n\tau), \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $x_i$  代表向量  $x$  第  $i$  个变量,  $y_j$  代表向量  $y$  的第  $j$  个变量,  $n = 0, 1, 2, \dots, t_0 + n\tau$  是采样的时刻, 采样的时间间隔为  $\tau$ , 在以下的计算中我们取  $\tau = 1$ .

为了识别这两个混沌时间序列是否达到广义同步, 一般需要通过粗粒化的方法, 将时间序列转化为相应的符号序列, 使得两系统广义同步关系变得清晰. 具体做法是分别取两系统的 Poincaré 截面 (通常选取的 Poincaré 截面应通过系统吸引子旋转中心), 与方程 (2) 对应的符号序列  $S_i (S_j)$  可以通过选取 Poincaré 截面作为分隔面而得到. 当与方程 (2) 对应的代表点在分隔面之上和上方,  $S_i = 1 (S_j = 1)$ , 反之取  $S_i = 0 (S_j = 0)$ , 这样得到一组由 1 和 0 组成的长符号序列. 将该长符号序列分割为固定长度为  $L$  (本文取  $L = 5$ ) 的短符号序列<sup>[9]</sup>, 每个短符号序列用一个整数  $l$  来代替, 即

$$l = \sum_{i=1}^L 2^{L-i} S_i. \quad (3)$$

这样得到一组  $l$  值, 把  $l_x(n), l_y(n)$  作为  $x_i(n), y_j(n)$  的符号序列. 容易想到, 若  $x_i(n)$  与  $y_j(n)$  不相关, 那么  $l_x(n)$  与  $l_y(n)$  也不相关, 若  $x_i(n)$  与  $y_j(n)$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金 (批准号: 10247005) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: lxs@mailbox.gxnu.edu.cn

存在广义同步关系,那么  $l_x(n)$  与  $l_y(n)$  也存在相同的关系,而且可以通过平移  $n_0$  个时间单位来消除这种关系.用条件熵描述这种关系<sup>[13]</sup>,

$$E(x|y) = -\frac{1}{N_l} \sum_{l_y} \frac{1}{L} \sum_{l_x|l_y} P(l_x(n+n_0)|l_y(n)) \times \ln P(l_x(n+n_0)|l_y(n)). \quad (4)$$

这里,  $P(l_x(n+n_0)|l_y(n))$  表示当  $y_j$  处于  $l_y(n)$  态时  $x_i$  处于  $l_x(n+n_0)$  态的概率,  $N_l$  表示所有不同  $l_y$  态的总数,方程(4)中第一个求和是在固定  $l_y$  态时对所有  $l_x$  态的求和.从方程(4)可以看出:当两系统处于非同步的混沌状态时,则  $y_j$  处于  $l_y(n)$  态时  $x_i$  处于不同  $l_x(n+n_0)$  态的概率  $P$  接近平均值,条件熵不出现突出的最小值.当两系统达到广义同步时,则  $y_j$  处于  $l_y(n)$  态时  $x_i$  以较大的概率  $P$  处于某个  $l_x(n+n_0)$  态,这时条件熵出现突出的最小值.显然,当两个系统处于完全同步时条件熵为零.下面我们研究两个混沌系统通过双向耦合达到广义同步时,条件熵随平移时间间隔  $n_0$  的变化情况.

### 3. 数值模拟结果及分析

我们讨论 Rössler-Rössler 和 Rössler-Lorenz 混沌系统双向耦合的广义同步.

#### 3.1. Rössler-Rössler 混沌系统双向耦合情况

两个参数不同 Rössler 混沌系统双向耦合的动力学方程为<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega_1 x_2 - x_3 + \epsilon(y_1 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \omega_1 x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 &= b + x_3(x_1 - c); \\ \dot{y}_1 &= -\omega_2 y_2 - y_3 + \epsilon(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= \omega_2 y_1 + ay_2, \\ \dot{y}_3 &= b + y_3(y_1 - c). \end{aligned} \quad (5)$$

这里,  $a = 0.165$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 10$ ,  $\omega_1 = 0.95$ ,  $\omega_2 = 0.99$ ,  $\epsilon$  是耦合强度.图 1 是该模型的最大 4 个 Lyapunov 指数随耦合强度的变化关系图.当耦合强度  $\epsilon \approx 0.036$  时,第四大 Lyapunov 指数由零变负,两系统达到相同步<sup>[11]</sup>.当  $\epsilon \approx 0.111$  时,第二大 Lyapunov 指数由正变零,同时第三大 Lyapunov 指数由零变负,说明此时系统发生了相变.

为了说明系统状态随耦合强度的变化,下面讨

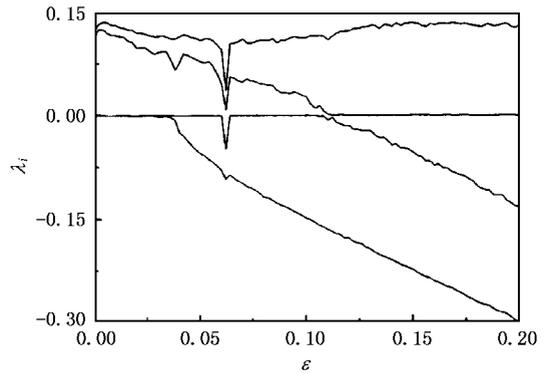


图 1 最大 4 个 Lyapunov 指数随耦合参数的变化关系

论时间序列  $x_3, y_3$  的条件熵,选择  $x_3 = C_x, y_3 = C_y$  作为分割面.采用四阶龙格-库塔法来解方程(5),迭代步长为 0.005.当耦合强度  $\epsilon = 0, 0.037, 0.112, 0.14$  时,取  $C_x = 0.02, 0.019, 0.016, 0.016, C_y = 0.031, 0.031, 0.03, 0.03$  得到条件熵随  $n_0$  的变化如图 2 所示.从图 2 可以清楚地看出,当耦合强度  $\epsilon \leq 0.11$  时,条件熵不出现突出的最小值,而大于此值则出现突出的最小值,表明此时两系统达到广义同步.如果在  $y_3$  时间序列加入  $[-0.0005, 0.0005]$  噪声,也能得到相同的结果.图 3 给出了与图 2 相同条件下部分条件熵随  $n_0$  的变化.

#### 3.2. Rössler-Lorenz 混沌系统双向耦合情况

Lorenz 与 Rössler 混沌系统双向耦合的动力学方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3 + \epsilon(y_1 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 &= a + x_3(x_1 - b); \\ \dot{y}_1 &= d(y_2 - y_1) + \epsilon(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= -y_1 y_3 + dy_1 - y_2, \\ \dot{y}_3 &= -y_1 y_3 - ey_3. \end{aligned} \quad (6)$$

取  $a = 0.2, b = 5.7, c = 10, d = 28, e = 8/3$ ,图 4 是两系统的第二到第四大 Lyapunov 指数随耦合强度的变化关系(最大 Lyapunov 指数由于较大且始终大于零,故省略).从图 4 可以看出,当耦合强度达到  $\epsilon \approx 0.09$  时,第二大 Lyapunov 指数从正值变为零,同时第三大 Lyapunov 指数由零变负,说明系统发生了相变.

为了说明系统状态随耦合强度的变化,下面讨论时间序列  $x_1, y_1$  条件熵.由于 Lorenz 系统有两个

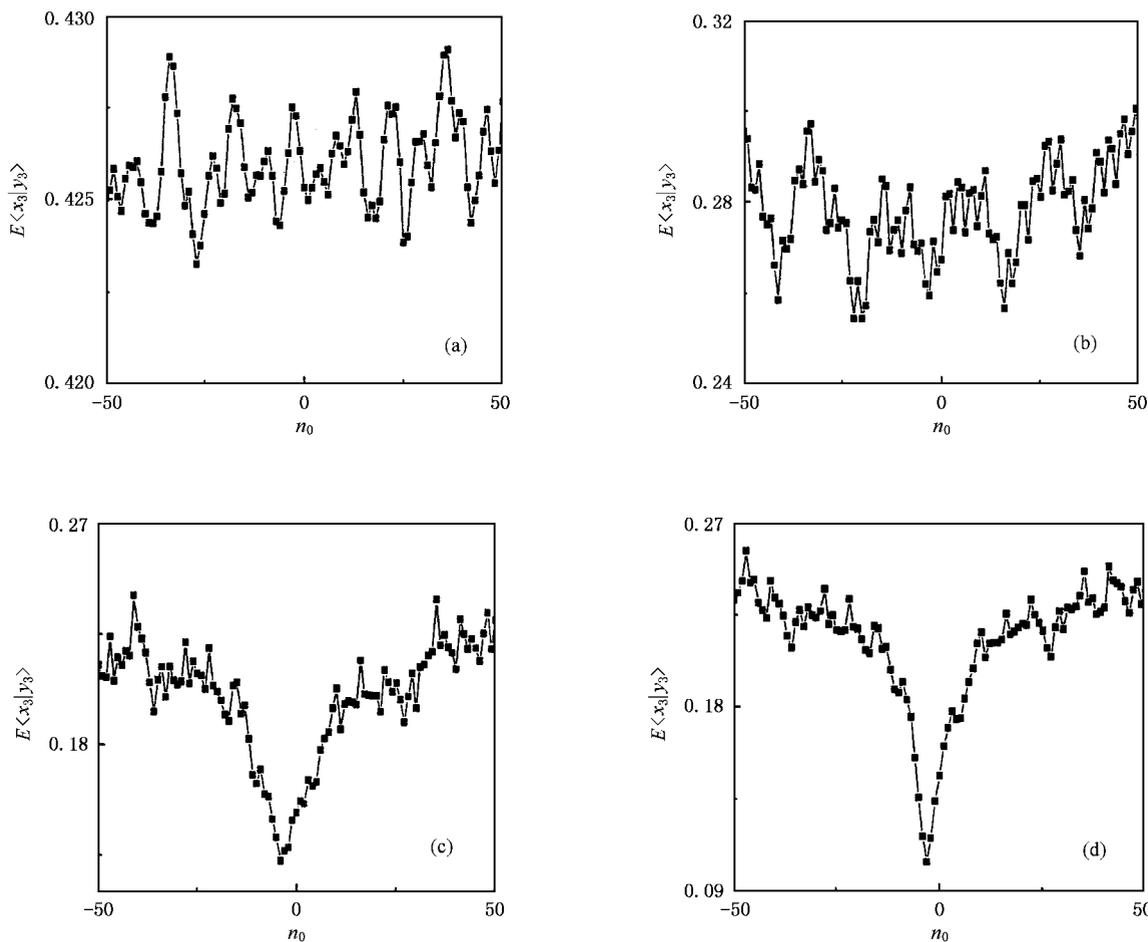


图 2 条件熵随  $n_0$  的变化关系 (a)  $\epsilon = 0, \alpha_3 = 0.02, \gamma_3 = 0.031$  (b)  $\epsilon = 0.037, \alpha_3 = 0.019, \gamma_3 = 0.031$  (c)  $\epsilon = 0.112, \alpha_3 = 0.016, \gamma_3 = 0.03$  (d)  $\epsilon = 0.14, \alpha_3 = 0.016, \gamma_3 = 0.03$

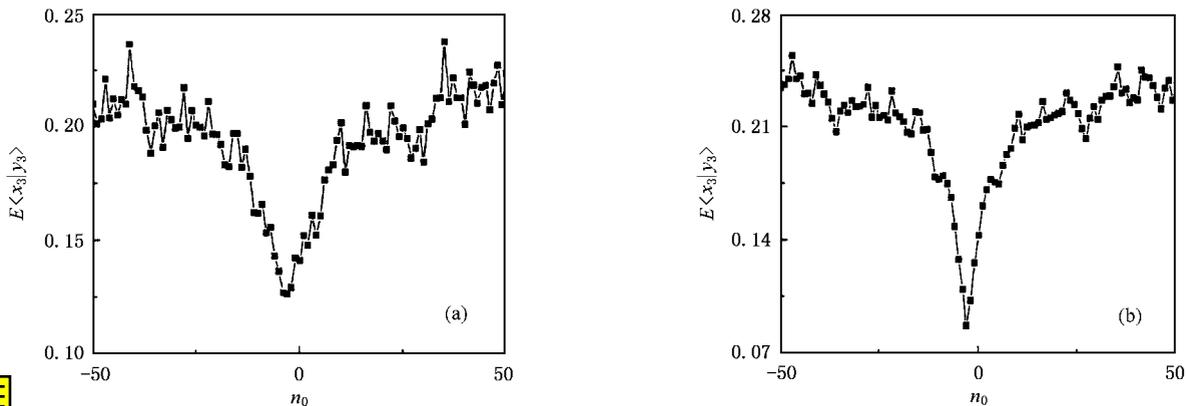


图 3 加入噪声后条件熵随  $n_0$  的变化关系 (a)  $\epsilon = 0.112, \alpha_3 = 0.016, \gamma_3 = 0.03$  (b)  $\epsilon = 0.14, \alpha_3 = 0.016, \gamma_3 = 0.03$



旋转中心(如图 5 所示),故选择 Poincaré 截面时应该选取两个.考虑到 Rössler 系统对 Lorenz 系统影响不太明显,我们将两个截面固定在  $y_1 = \pm 8$  处(这时若方程 (2) 对应的代表点在分隔面之间,取  $S = 0$ ,反

之取  $S = 1$ ),而 Rössler 系统的吸引子变化较大,故 Poincaré 截面  $x_1 = C_x$  随耦合强度的改变而改变,当耦合强度  $\epsilon = 0, 0.05, 0.09, 0.2$  时,取  $C_x = 0.4, -0.1, -0.6, -0.3$ ,数值模拟得到条件熵随  $n_0$  的

变化如图 6 所示.从图 6 可以清楚地看出,当耦合强度小于 0.09 后,条件熵不出现突出的最小值,而大

于此值则出现突出的最小值,表明两系统达到广义同步.

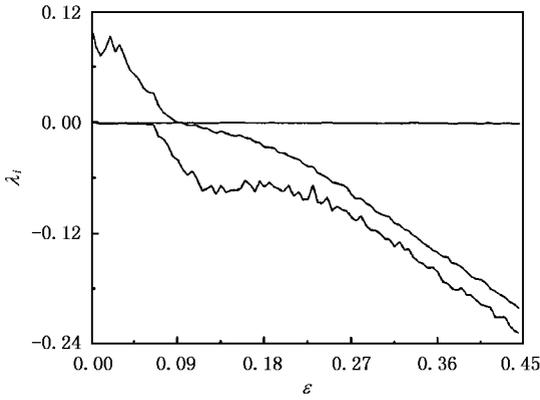


图 4 第二到第四大 Lyapunov 指数随耦合强度的变化关系

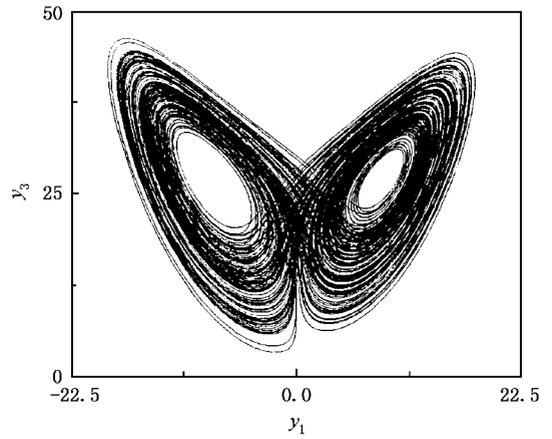


图 5 耦合强度为零时的 Lorenz 系统  $y_1, y_3$  的相图

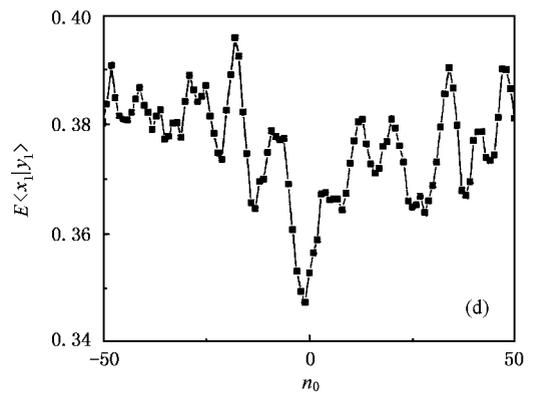
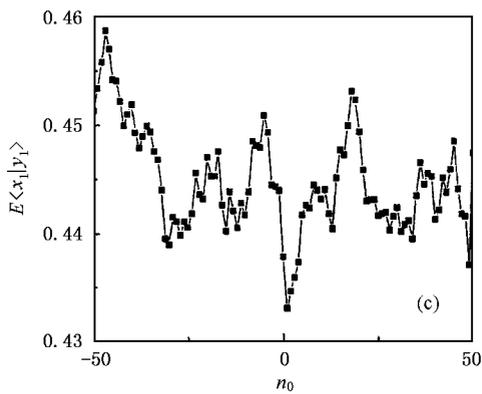
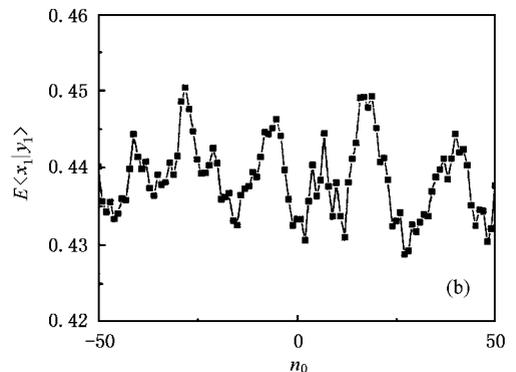
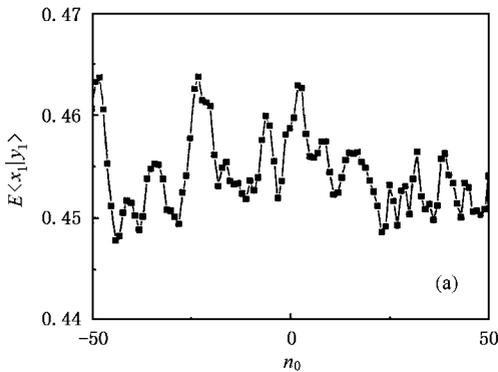


图 6 条件熵随  $n_0$  的变化关系  $y_1 = \pm 8$ . (a)  $\epsilon = 0, \alpha_1 = 0.4$  (b)  $\epsilon = 0.05, \alpha_1 = -0.1$  (c)  $\epsilon = 0.09, \alpha_1 = -0.6$  (d)  $\epsilon = 0.2, \alpha_1 = -0.3$

### 4. 结 论

本文研究了双向耦合混沌系统的广义同步.数

值模拟结果表明,用条件熵可以很好测定两个双向耦合系统是否达到广义同步,即当条件熵随着耦合强度的增大出现突出的最小值时表明两系统达到了广义同步,它与两个系统的第二大 Lyapunov 指数由

正变负对应. 该方法可靠且具有很强的鲁棒性. 显然, 该方法也可用于测定两系统是否达到延迟同步和完全同步, 因此具有一定的普适性.

- [ 1 ] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 2 ] Boccaletti S , Kurth J *et al* 2002 *Phys. Rep.* **366** 1
- [ 3 ] Wang J L , Chen G Z 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1605 ( in Chinese )  
[ 王金兰、陈光旨 1999 物理学报 **48** 1605 ]
- [ 4 ] Chen L , Zhang R Y , Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 536 ( in Chinese ) [ 程 丽、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 536 ]
- [ 5 ] Luo X S , Fang J Q , Wang L H *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2022 ( in Chinese ) [ 罗晓曙、方锦清、王力虎等 1999 物理学报 **48** 2022 ]
- [ 6 ] Kocarev L , Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1816
- [ 7 ] Rulkov N F , Sushchik M M , Tsimring L S *et al* 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
- [ 8 ] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 ( in Chinese ) [ 李国辉 2004 物理学报 **53** 999 ]
- [ 9 ] Rosenblum M G , Pikovsky A S , Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [ 10 ] Rosenblum M G , Pikovsky A S , Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4193
- [ 11 ] Hu G , Xiao J H , Zheng Z G 2000 *Chaos Control* ( Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House ) p110 ( in Chinese ) [ 胡 岗、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制 ( 上海 : 上海科技教育出版社 ) 第 110 页 ]
- [ 12 ] Zheng Z G , Hu G , Zhou C S *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2320 ( in Chinese ) [ 郑志刚、胡 岗、周昌松等 2000 物理学报 **49** 2320 ]
- [ 13 ] Mo X H , Tang G N 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2080 ( in Chinese ) [ 莫晓华、唐国宁 2004 物理学报 **53** 2080 ]
- [ 14 ] Zheng Z G , Wang X G , Michael C C 2002 *Phys. Rev. E* **65** 56211
- [ 15 ] Liu Z H , Chen S G 1997 *Phys. Rev. E* **56** 7297
- [ 16 ] Xiao F H , Yan G R , Han Y H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2877 ( in Chinese ) [ 肖方红、阎桂荣、韩宇航 2004 物理学报 **53** 2877 ]

## Generalized synchronization of bidirectionally coupled chaos systems<sup>\*</sup>

Zhang Ping-Wei Tang Guo-Ning Luo Xiao-Shu

( College of Physics and Information Technology , Guangxi Normal University , Guilin 541004 , China )

( Received 24 December 2004 ; revised manuscript received 18 March 2005 )

### Abstract

The conditional entropy is used to assess the generalized synchronization of bidirectionally coupled chaotic systems. By increasing the coupled strength, the generalized synchronization appears when there is a sharp minimum of the conditional entropy. We apply this criteria to the case of the coupled Rössler-Lorenz and Rössler-Rössler system to test our method. Numerical results show that it is very effective and robust.

**Keywords** : generalized synchronization , bidirectionally coupled , conditional entropy

**PACC** : 0545

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10247005 ).