

# 基于 Chebyshev 多项式逼近的随机 van der Pol 系统的倍周期分岔分析\*

马少娟<sup>1,2)†</sup> 徐 伟<sup>1)</sup> 李 伟<sup>1)</sup> 靳艳飞<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

<sup>2)</sup> 西北第二民族学院信息与计算科学系, 银川 750021)

(2004 年 10 月 15 日收到, 2005 年 2 月 28 日收到修改稿)

应用 Chebyshev 多项式逼近法研究了谐和激励作用下具有随机参数的随机 van der Pol 系统的倍周期分岔现象. 随机系统首先被转化成等价的确定性系统, 然后通过数值方法求得响应, 借此探索了随机 van der Pol 系统丰富的随机倍周期分岔现象. 数值模拟显示随机 van der Pol 系统存在与确定性系统极为相似的倍周期分岔行为, 但受随机因素的影响, 又有与之不同之处. 数值结果表明, Chebyshev 多项式逼近是研究非线性系统动力学问题的一种新的有效方法.

关键词: Chebyshev 多项式, 随机 van der Pol 系统, 倍周期分岔

PACC: 0547

## 1. 引 言

随机结构分析中主要的数值方法有三种. 一种是 Monte Carlo 法<sup>[1]</sup>, 这种方法简单普遍, 但是通常需要很大的计算量. 另一种是随机扰动法<sup>[2]</sup>, 此方法虽然不需要大的计算量, 但却局限于随机变量必须为微小的扰动. 第三种方法是随机系统的正交多项式逼近法, 由文献[3, 4]先后提出, 后来又得到 Li<sup>[5]</sup>的进一步发展. 这种方法不需要假定小的随机扰动, 因此更加实用. 近来, Fang 等<sup>[6]</sup>首次利用 Chebyshev 多项式逼近法研究了线性系统的演化随机响应问题, 之后又进一步将这一方法应用到随机 Duffing 系统的分岔与混沌的研究中. 其他的一些数值方法在随机系统的数值研究中也常被使用<sup>[7-9]</sup>. 本文中考虑的随机系统是一个具有有界随机参数的系统, 所研究的随机分岔是谐和激励下此类随机系统所发生的分岔, 其与随机激励与谐和激励作用下的确定性系统所发生的随机分岔是不同的.

在许多科学领域内, van der Pol 方程代表了一个典型的自激振子模型. 周期激励振子<sup>[10]</sup>

$$\ddot{x} + (ax^2 - \bar{b})\dot{x} + x = F \cos \omega t \quad (1)$$

是一个周期扰动极限环的原型方程, 具有极其丰富的非线性现象, 如鞍结分岔、对称破裂分岔、倍周期分岔和混沌等. 诸多学者已从实验<sup>[11]</sup>和理论<sup>[12]</sup>方面对方程(1)作了大量的研究. 该方程的稳定性和分岔行为也已被认真研究<sup>[13-15]</sup>. 文献[16, 17]则对方程的全局分岔性质作了分析. 然而, 这些结果全都局限于确定性 van der Pol 系统.

本文借助正交多项式逼近法研究了谐和激励下带有随机参数的随机 van der Pol 系统的倍周期分岔行为. 随机 van der Pol 系统首先被转化为等价的确定性系统, 然后通过数值方法求得其响应, 最后以随机 van der Pol 系统的谐和频率  $\omega$  为分岔参数, 对其倍周期分岔现象作了深入的研究.

## 2. Chebyshev 多项式

正交多项式逼近法中多项式基的选取依赖于方程中随机变量的概率密度函数, 在随机系统的分析中, 正态分布和均匀分布是两种典型的概率密度函数, 它们所对应的多项式基是 Hermite 多项式和 Legendre 多项式. 然而, 正态分布的随机变量, 取值

\* 国家自然科学基金(批准号:10472091, 10332030)资助的课题.

† E-mail: mashaajuan@mail.nwpu.edu.cn

可达到  $-\infty$ , 这不仅违背了随机参数的取值限制, 而且会导致部分样本系统成为不稳定系统. 均匀分布的随机变量从  $-1$  到  $+1$  的变化不会导致不稳定现象的发生, 但在实际应用中显然是不合理的. 因此, 选择一种服从拱形分布的随机变量, 就不会使系统发生不稳定现象, 在实际应用中也非常合理. 这种随机变量  $u$  的概率密度函数  $p(u)$  的曲线如图 1 所示.  $p(u)$  的表达式为<sup>[18]</sup>

$$p(u) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-u^2} & |u| \leq 1, \\ 0 & |u| > 1. \end{cases} \quad (2)$$

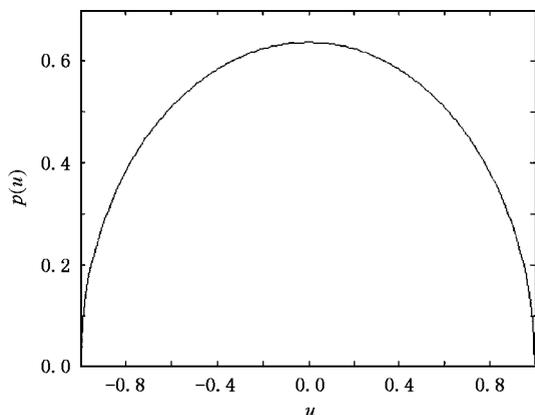


图 1 随机变量  $u$  的拱形概率密度函数曲线

基于此类概率密度函数, 可选择第二类 Chebyshev 多项式为正交多项式基. 此类多项式的一般表达式为

$$U_n(u) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} (2u)^{n-2k}. \quad (3)$$

从而有

$$\begin{aligned} U_0(u) &= 1, \\ U_1(u) &= 2u, \\ U_2(u) &= 4u^2 - 1, \\ U_3(u) &= 8u^3 - 4u, \\ U_4(u) &= 16u^4 - 12u^2 + 1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

则第二类 Chebyshev 多项式的循环推导公式为

$$uU_n(u) = \frac{1}{2}[U_{n-1}(u) + U_{n+1}(u)]. \quad (5)$$

另外, 第二类 Chebyshev 多项式的正交性可表示为

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \sqrt{1-u^2} U_i(u) U_j(u) du = \begin{cases} 1 & (i=j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \quad (6)$$

(6) 式代表了一种加权正交关系. 虽然  $u$  在  $-1$  到

$+1$  间随机取值, 但每一个样本都是服从拱形分布的, 因此根据文献[19]随机性并不影响多项式的正交性. 因为加权函数正好为拱形概率密度函数, 即 (2) 式中的  $p(u)$  (6) 式等号左边可认为  $U_i(u)U_j(u)$  是乘积的期望. 显然由于 Chebyshev 多项式的正交性, 随机变量  $u$  的任何可测函数  $f(u)$  可以展开成下列级数形式:

$$f(u) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i U_i(u),$$

其中

$$c_i = \int_{-1}^1 p(u) f(u) U_i(u) du.$$

同样可以得到具有多个相互独立随机变量的可测函数相似的展开结果. 这种展开称为随机函数  $f(u)$  的正交分解, 是正交分解方法的理论基础.

### 3. 随机 van der Pol 系统的 Chebyshev 正交多项式逼近

考虑单自由度谐和激励下具有随机参数的 van der Pol 系统, 其动力响应的微分方程表达式如下:

$$\ddot{x} + ax^2 \dot{x} - bx + x = F \cos \omega t, \quad (7)$$

式中  $b$  为常数,  $a$  为随机参数,  $F \cos(\omega t)$  为设定的谐和激励. 设  $a$  可以表示为

$$a = \bar{a} + \delta u, \quad (8)$$

式中  $\bar{a}$  和  $\delta/2$  分别为  $a$  的均值和方差,  $u$  为定义在  $[-1, 1]$  上服从拱形分布概率密度函数的随机变量. 根据正交多项式逼近原理系统 (6) 的响应可以展开成下列级数形式:

$$x(t, u) = \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u), \quad (9)$$

式中  $U_i(u)$  表示第  $i$  个 Chebyshev 多项式,  $N$  代表所取多项式的最大个数,

$$x_i(t) = \int_{-1}^1 p(u) x(t, u) U_i(u) du.$$

把 (8) (9) 式代入 (7) 式, 可得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dt^2} - b \frac{d}{dt} + 1 \right) \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \\ & + \frac{1}{3} \bar{a} \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 \\ & + \frac{1}{3} \delta u \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 = F \cos \omega t. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式等号左端的非线性项  $\left( \sum_{i=0}^N x_i(x) U_i(u) \right)^3$  可

以展开,

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 \\ &= x_0^3(t) U_0^3(u) + \dots + x_N^3(t) U_N^3(u) \\ &+ 3x_0^2(t)x_1(t)U_0^2(u)U_1(u) + \dots \\ &+ 3x_N^2(t)x_{N-1}(t)U_N^2(u)U_{N-1}(u) \\ &+ 6x_0(t)x_1(t)x_2(t)U_0(u)U_1(u)U_2(u) + \dots \\ &+ 6x_{N-2}(t)x_{N-1}(t)x_N(t)U_{N-2}(u)U_{N-1}(u)U_N(u). \end{aligned} \quad (11)$$

借助 Chebyshev 多项式的循环推导公式(5), (11)式等号右端中多项式的三项乘积可以进一步约化成相关单个多项式的线性组合. 对于 Chebyshev 多项式  $U_i(u)$ , 我们有以下结论:

$$\begin{aligned} U_0^3(u) &= U_0(u), \\ 3U_0^2(u)U_1(u) &= 3U_1(u), \\ 3U_1^2(u)U_2(u) &= 3U_4(u) + 6U_2 + 3U_0(u), \\ &\dots \end{aligned} \quad (12)$$

通过定义线性组合中  $U_i(u)$  的系数为  $X_i(t)$  (11)式最终可以化为

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 \\ &= X_0(t)U_0(u) + \dots + X_N(t)U_N(u) \\ &= \sum_{i=0}^N X_i(t)U_i(u). \end{aligned} \quad (13)$$

$X_i(t)$  ( $i=0, 1, 2, \dots, N$ ) 的表达式借助计算机代数方法算出, 如 Maple. 通过 Chebyshev 多项式的循环推导公式(5)和(13)(10)式等号左端的第三项可以简化为

$$\begin{aligned} & u\delta \left( \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \right)^3 \\ &= \delta \left( u \sum_{i=0}^N X_i(t) U_i(u) \right) \\ &= \frac{1}{2} \delta \sum_{i=0}^N X_i(t) [U_{i-1}(u) + U_{i+1}(u)] \\ &= \frac{1}{2} \delta \sum_{i=0}^N [X_{i-1}(t) + X_{i+1}(t)] U_i(u). \end{aligned} \quad (14)$$

在此由于对(9)式的逼近, 可设  $X_{-1}$  和  $X_{N+1}$  为零. 把(13)(14)式代入(10)式就有

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dt^2} - b \frac{d}{dt} + 1 \right) \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u) \\ &+ \frac{1}{3} \bar{b} \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^N X_i(t) U_i(u) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{6} \delta \frac{d}{dt} \sum_{i=0}^N [X_{i+1}(t) + X_{i-1}(t)] U_i(u) = F \cos \omega t. \quad (15)$$

在(15)式的等号两端依次乘以  $U_i(u)$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ ) 再关于  $u$  取期望, 由 Chebyshev 多项式的正交性, 最终可得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{d^2}{dt^2} - b \frac{d}{dt} + 1 \right) x_0(t) + \frac{1}{3} \bar{b} \frac{d}{dt} X_0(t) \\ &+ \frac{1}{6} \delta \frac{d}{dt} X_1(t) = F \cos \omega t, \\ & \left( \frac{d^2}{dt^2} - b \frac{d}{dt} + 1 \right) x_1(t) + \frac{1}{3} \bar{b} \frac{d}{dt} X_1(t) \\ &+ \frac{1}{6} \delta \frac{d}{dt} [X_0(t) + X_2(t)] = 0, \\ & \left( \frac{d^2}{dt^2} - b \frac{d}{dt} + 1 \right) x_2(t) + \frac{1}{3} \bar{b} \frac{d}{dt} X_2(t) \\ &+ \frac{1}{6} \delta \frac{d}{dt} [X_1(t) + X_3(t)] = 0, \\ & \left( \frac{d^2}{dt^2} - b \frac{d}{dt} + 1 \right) x_3(t) + \frac{1}{3} \bar{b} \frac{d}{dt} X_3(t) \\ &+ \frac{1}{6} \delta \frac{d}{dt} [X_2(t) + X_4(t)] = 0, \\ & \left( \frac{d^2}{dt^2} - b \frac{d}{dt} + 1 \right) x_4(t) + \frac{1}{3} \bar{b} \frac{d}{dt} X_4(t) \\ &+ \frac{1}{6} \delta \frac{d}{dt} [X_3(t) + X_5(t)] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

这样就通过 Chebyshev 多项式逼近把具有服从拱形分布的随机参数  $u$  的随机 van der Pol 系统化简成为一个与其等价的确定性系统. (9)式中当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(u)$  就严格等价于随机系统  $x(t, u)$ . 如果  $N$  是有限的, (9)式就成为一个具有微小误差的逼近值. 在以下的数值分析中, 令  $N=4$ , 可以通过有效数值方法求得(16)式的数值解为  $x_i(t)$  ( $i=0, 1, 2, 3, 4$ ). 因而, 原随机 van der Pol 系统的逼近随机响应可以表示为

$$x(t, u) = \sum_{i=0}^4 x_i(t) U_i(u). \quad (17)$$

如果随机参数  $u=0$ , 也就是  $a=\bar{b}$ , 可以得到所谓的均值参数系统. 均值参数系统的样本响应可表示为

$$\begin{aligned} x(t, 0) &= \sum_{i=0}^N x_i(t) U_i(0) \\ &= x_0(t) - x_2(t) + x_4(t). \end{aligned} \quad (18)$$

随机 van der Pol 系统的集合平均响应可表示为

$$E[x(t, u)] = \sum_{i=0}^4 x_i(t) E[U_i(u)] = x_0(t). \tag{19}$$

### 4. 随机 van der Pol 系统的倍周期分岔

原随机 van der Pol 系统为

$$\ddot{x} + (\bar{b} + \delta u)x^2 \dot{x} - bx + x = F \cos \omega t. \tag{20}$$

当  $\delta = 0$  时 (20) 式简化成确定性系统

$$\ddot{x} + \bar{b}x^2 \dot{x} - bx + x = F \cos \omega t. \tag{21}$$

针对 (17)–(19) 式应用确定性数值方法, 可以分别得到随机响应  $x(t, u)$ 、样本响应  $x(t, \rho)$ 、集合平均响应  $E[x(t, u)]$ 。另外, 确定性系统 (21) 的确定性响应  $x(t)$  可直接应用 Runge-Kutta 法求得, 可以用其来进一步检验正交多项式逼近法的正确性。因此, 我们可以通过比较以下三种响应的相轨描述图来观察确定性系统、均值参数系统和随机系统的分岔行为: 均值参数系统的样本响应  $x(t, \rho)$ 、确定性系统的确定性响应  $x(t)$ 、随机 van der Pol 系统的集合平均响应  $E[x(t, u)]$ 。等价的确定性系统 (16) 的初始条件定义为

$$x(0) = [x_0(0), \dots, x_4(0)]^T,$$

$$y(0) = [\dot{x}_0(0), \dots, \dot{x}_4(0)]^T.$$

确定性 van der Pol 系统, 方程 (21) 的初始条件定义为  $x_0 = x(0), y_0 = \dot{x}(0)$ 。本文中, 参数  $\delta$  是一个小量, 因此确定性等价系统的初始条件的取值与确定性 van der Pol 系统, 方程 (21) 的初始条件的取值相同, 即为

$$x_0 = x_0(0),$$

$$y_0 = \dot{x}_0(0),$$

$$x_i(0) = \dot{x}_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

这样, 初始条件取为

$$x(0) = [1.8, 0, 0, 0, 0]^T,$$

$$y(0) = [2.5, 0, 0, 0, 0]^T,$$

$$x_0 = 1.8,$$

$$y_0 = 2.5.$$

文献 [20] 已证实, 对于一个对称的非线性确定性系统, 如 van der Pol 系统, 倍周期分岔不会发生在一个自对称相轨的响应处。换言之, 倍周期分岔仅能发生在对称破裂分岔后所得的一对互相对称的响应相轨处。确定性 van der Pol 系统中存在着非常丰富的倍周期分岔现象<sup>[16]</sup>, 周期  $2T$  分岔到周期  $4T$ ,

周期  $4T$  分岔到周期  $8T$  以及周期  $7T$  分岔到周期  $14T$  等等。以上的论述和分岔行为同样也存在于随机 van der Pol 系统。下面我们就以谐和激励频率  $\omega$  为分岔参数, 研究随机 van der Pol 系统的随机倍周期分岔。

本节中, 令系统其他参数为  $b = \bar{b} = 1.5, \delta = 0.01, F = 1.1, \omega$  在  $0.279-0.2727$  间取值, 数值模拟如图 2 所示。当  $\omega = 0.279$  时, 数值模拟结果显示存在两个稳态的互相对称的周期响应, 其周期为  $2T$ , 其中对应初始条件的响应相轨如图 2(a) 所示。而当  $\omega = 0.2727$  时, 周期  $2T$  的响应被另外两个互相对称的稳态周期响应所替代, 其周期倍增至  $4T$ , 其中对应初始条件的响应相轨如图 2(b) 所示。图 2 中, 相轨曲线叠加在一起而难以分辨, 这说明三种响应符合得很好。随着激励频率  $\omega$  从  $0.279$  到  $0.2727$  的减小, 随机 van der Pol 系统如同确定性系统, 发生了一个从周期  $2T$  到周期  $4T$  的倍周期分岔行为。

若改变系统的其他参数,  $b = \bar{b} = 5, \delta = 0.01, F = 5$ , 随着激励频率  $\omega$  从  $2.457$  到  $2.4595$  的增大, 数

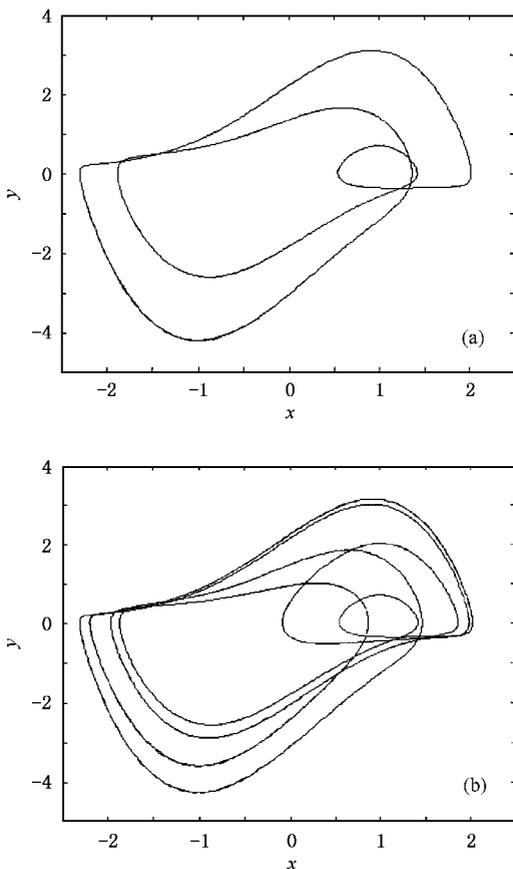


图 2 倍周期相轨图  $b = \bar{b} = 1.5, \delta = 0.01, F = 1.1$ 。(a) 周期  $2T, \omega = 0.279$ ; (b) 周期  $4T, \omega = 0.2727$

值模拟如图 3 所示. 当  $\omega = 2.457$  时, 数值模拟结果显示存在两个稳态的互相对称的周期响应, 其周期为  $4T$ , 其中对应初始条件的响应相轨如图 3(a) 所

示. 而当  $\omega = 2.4595$  时, 周期  $4T$  的响应被另外两个互相对称的稳态周期响应所替代, 其周期倍增至  $8T$ , 其中对应初始条件的响应相轨如图 3(b) 所示.

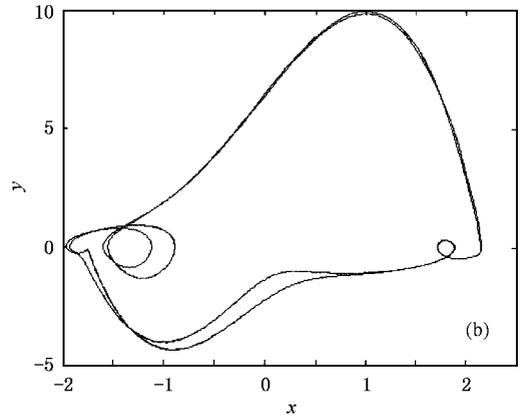
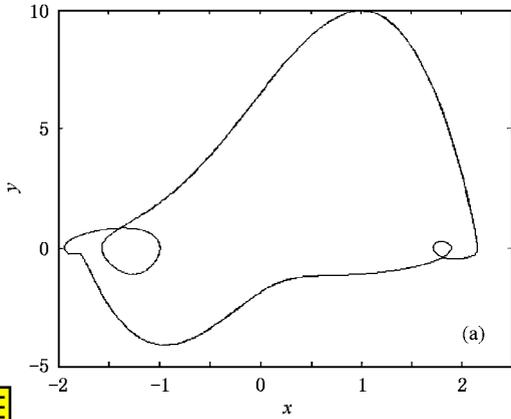


图 3 倍周期相轨图  $b = \bar{b} = 5.0, \delta = 0.01, F = 5.0$ . (a) 周期  $4T, \omega = 2.457$ ; (b) 周期  $8T, \omega = 2.4595$

如果系统其他参数选为  $b = \bar{b} = 2.156, \delta = 0.01, F = 10$ , 而让谐和激励频率  $\omega$  从 3.63 减小到 3.62, 数值模拟如图 4 所示. 当  $\omega = 3.63$  时, 数值模拟结果显示存在两个稳态的互相对称的周期响应, 其周期为  $7T$ , 其中对应初始条件的响应相轨如图 4(a) 所示. 而当  $\omega = 3.62$  时, 周期  $7T$  的响应被另外

两个互相对称的稳态周期响应所替代, 其周期倍增至  $14T$ , 其中对应初始条件的响应相轨如图 4(b) 所示. 图 4 中, 相轨曲线重合, 三种响应的一致说明随机 van der Pol 系统也存在这一更为复杂的倍周期分岔过程, 从周期  $7T$  分岔到周期  $14T$ .

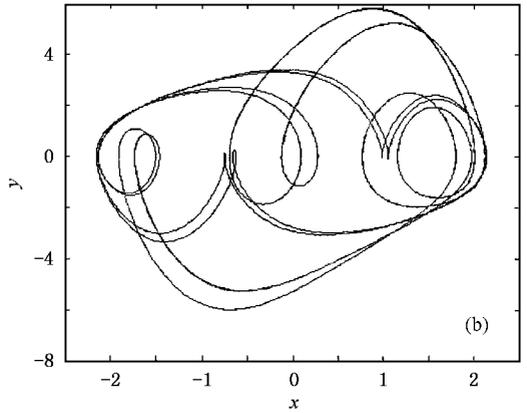
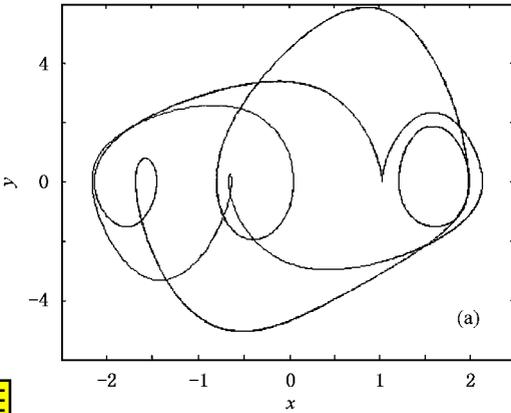


图 4 倍周期相轨图  $b = \bar{b} = 2.156, \delta = 0.01, F = 10$ . (a) 周期  $7T, \omega = 3.63$ ; (b) 周期  $14T, \omega = 3.62$

### 5. 随机倍周期分岔的特性

本文中的随机倍周期分岔是基于系统本身参数的随机影响而发生的分岔行为, 与通常所说的白噪声外激下的随机分岔不同. 对于这样具有随机参数的随机非线性系统, 其每一个样本系统都是确定性非线性系统. 谐和激励作用下的一个非线性样本系

统在某个临界分岔点发生确定性分岔. 然而, 并不是每一个样本系统都在相同的临界点发生分岔. 因此, 我们就得出一个合理的推论, 在随机非线性系统中必定存在一个临界区间, 不论这个区间多小, 区间内有些样本系统发生分岔, 而有些则还没有发生分岔. 在随机倍周期分岔现象的研究中, 数值模拟证实了这一判断.

在研究随机倍周期分岔从周期  $1T$  到周期  $2T$ ,

或周期  $2T$  到周期  $4T$  等的倍周期分岔形式时,发现了一些有趣的现象,下面举例加以说明.

在第 4 节中,当激励频率  $\omega \in [3.62, 3.63]$  时,随机系统存在一个从周期  $7T$  分岔到周期  $14T$  的倍周期分岔过程,其他参数值为  $b = \bar{b} = 2.156$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $F = 10$ ,数值模拟表示三种响应,确定性系统的确定性响应、均值参数系统的样本响应以及随机系统的集合平均响应都非常一致(参看图 4).现在令  $\omega = 3.6287$ ,对应初始条件,可以发现确定性系统的确定性响应为一个稳态的周期响应,相轨如图 5(a)所示,这与图 4 中周期为  $7T$  的相似,其 Poincaré 截面如图 5(b)所示.而随机 van der Pol 系统的集合平均响应则是一个周期为  $14T$  的稳态周期响应,相

轨如图 5(c)所示.当  $\omega = 3.6283$  时,对应初始条件,确定性系统的确定性响应和随机系统的集合平均响应都是一个周期为  $14T$  的周期响应,相轨如图 5(d)所示,但是二者之间存在一定的差异.然而,随着激励频率  $\omega$  的逐渐减小,二者之间的这种差异也逐渐减小.最终,当  $\omega = 3.62$  时,相轨曲线达到一致,如图 4(b)所示.

从图 5 中,我们可以发现由于随机因素的影响,具有随机参数的随机 van der Pol 系统的随机倍周期分岔与确定性系统的倍周期分岔在同一条件下,相同参数时的分岔行为在一个非常小的邻域有很大的不同,前者已经发生分岔,而后者可能还没有发生分岔,或者发生分岔但尚未成熟.

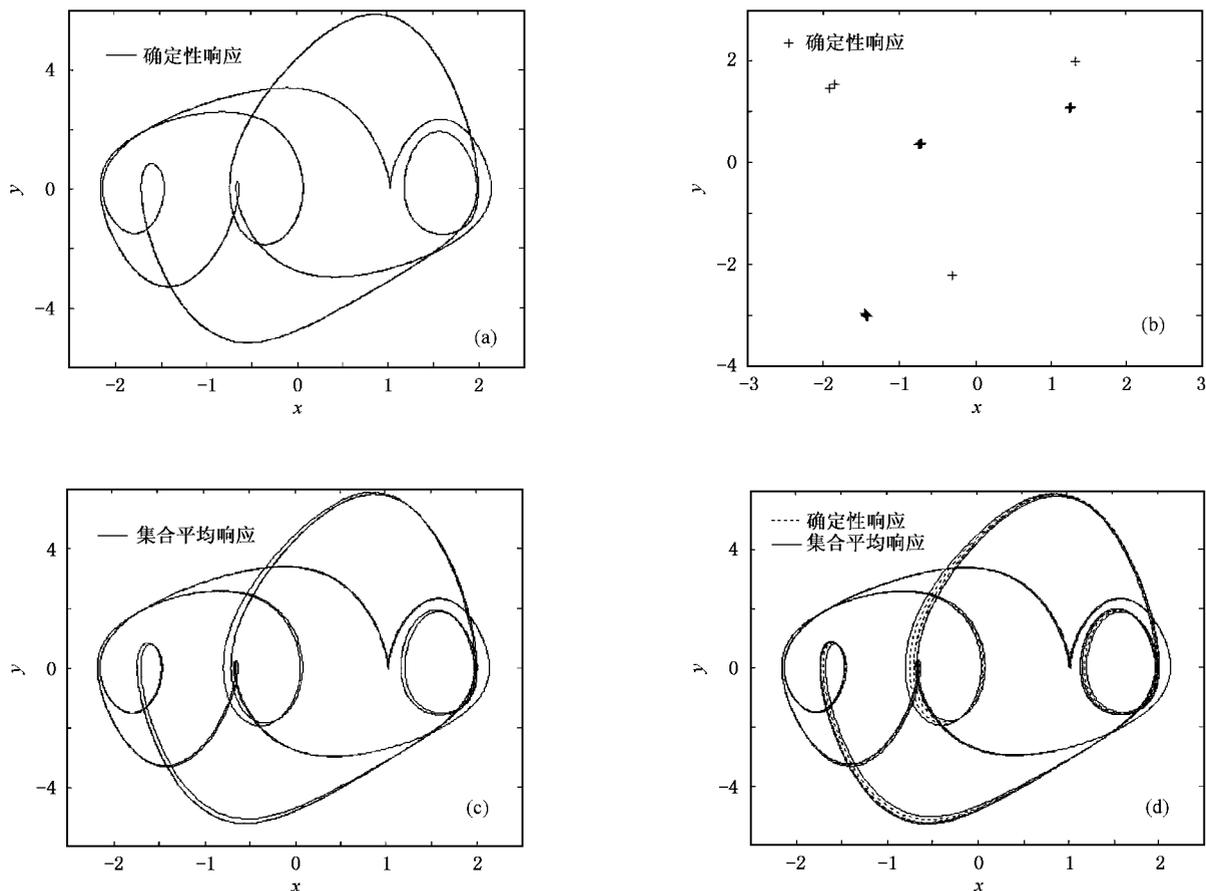


图 5 确定性响应和集合平均响应相轨图 (a)  $\omega = 3.6287$  确定性响应相轨图;(b)  $\omega = 3.6287$  确定性响应的 Poincaré 截面图 (c)  $\omega = 3.6287$  集合平均响应相轨图,周期  $14T$ ;(d)  $\omega = 3.6283$  时的确定性响应和集合平均响应相轨图,周期  $14T$

## 6. 结 论

针对具有随机参数的非线性随机系统,正交多

项式逼近提供了一种有效的分析方法.可以把随机非线性系统约化成等价的确定性非线性,再应用确定性系统中的数值方法于等价的非线性系统中以研究随机系统的动力学行为.首先,本文主要的数值结

果显示,等价的确定性系统保持了谐和激励频率  $\omega$  为分岔参数时 van der Pol 系统的一些倍周期分岔行为.其次,我们发现了受随机因素的影响,随机 van der Pol 系统从周期  $1T$  到周期  $2T$ ,及周期  $7T$  到周期  $14T$  这些倍周期分岔过程中在某一小区域与确

定性系统有明显的不同,其分岔临界点前移.由此可见,文中的多项式逼近法是一种新的探索非线性现象的有效方法,我们可以借助等价的确定性模型去研究随机 van der Pol 系统其他丰富的动力学行为.

- [ 1 ] Shinozuka M 1988 *J. Eng. Mech.* **114** 1335
- [ 2 ] Liu W K, Besterfied G H, Belytschko P 1988 *J. Eng. Mech.* **114** 2115
- [ 3 ] Spanos P D, Ghanem R G 1989 *J. Eng. Mech. Div ASCE* **115** 1035
- [ 4 ] Jensen H, Iwan W D 1992 *J. Eng. Mech.* **118** 1012
- [ 5 ] Li J 1996 *Acta Mech. Sin.* **28** 66 (in Chinese) [ 李 杰 1996 力学学报 **28** 66 ]
- [ 6 ] Fang T, Leng X L, Song C Q 2003 *J. Sound Vib.* **226** 198
- [ 7 ] Gong P L, Xu J X, Sun Z C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 841 (in Chinese) [ 龚璞林、徐健学、孙政策 2001 物理学报 **50** 841 ]
- [ 8 ] Luo X S, Chen G R, Wang B H *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 790 (in Chinese) [ 罗晓曙、陈关荣、汪秉宏等 2003 物理学报 **52** 790 ]
- [ 9 ] Xu W, He Q, Rong H W *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [ 徐 伟、贺 群、戎海武等 2003 物理学报 **52** 1365 ]
- [ 10 ] van der Pol B 1927 *Phil. Mag.* **7-3** 65
- [ 11 ] Qin G R, Gong D C and Li R *et al* 1989 *Phys. Lett. A* **141** 412
- [ 12 ] Holmes P J, Rand D A 1978 *Quart. Appl. Math.* **35** 495
- [ 13 ] Guckenheimer J, Holmes P J 1983 *Nonlinear Oscillators, Dynamical System and Bifurcation of Vector Fields* (New York: Springer-Verlag)
- [ 14 ] Grasman J, Nijmeijer H, Veling E J M 1984 *Physica D* **13** 195
- [ 15 ] Flahery J E, Hoppensteadt F C 1978 *Stud. Appl. Math.* **58** 5
- [ 16 ] Mettin R, Parlitz U, Lauterborn W 1993 *Int. J. Bifurc. Chaos* **36** 1529
- [ 17 ] Xu J X, Jiang J 1996 *Chaos Solitons Fract.* **7** 3
- [ 18 ] Borwein P, Erdélyi T 1995 *Polynomials and Polynomials Inequality* (New York: Springer)
- [ 19 ] Liu S K, Liu S D 1988 *Special Function* (Beijing: Meteorology Press) (in Chinese) [ 刘式适、刘式达 1988 特殊函数(北京:气象出版社) ]
- [ 20 ] Hu H Y 1994 *J. Vib. Eng.* **7** S26

# Period-doubling bifurcation analysis of stochastic van der Pol system via Chebyshev polynomial approximation<sup>\*</sup>

Ma Shao-Juan<sup>1,2)†</sup> Xu Wei<sup>1)</sup> Li Wei<sup>1)</sup> Jin Yan-Fei<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*

<sup>2)</sup>*Department of Information and Computation Sciences, Second Northwest University for Nationalities, Yinchuan 750021, China*

( Received 15 October 2004 ; revised manuscript received 28 February 2005 )

## Abstract

Chebyshev polynomial approximation is applied to the period-doubling bifurcation problem of a stochastic van der Pol system with bounded random parameters and subjected to harmonic excitations. Firstly, the stochastic system is reduced to its equivalent deterministic one, through which the response of the stochastic system can be obtained by numerical methods. Nonlinear dynamical behavior related to various forms of stochastic period-doubling bifurcation in the stochastic system is explored. Numerical simulations show that similar to their counterpart in deterministic nonlinear system, various forms of period-doubling bifurcation may occur in the stochastic van der Pol system, but with some modified features. Numerical results also show that Chebyshev polynomial approximation can provide an effective approach to dynamical problems in stochastic nonlinear systems.

**Keywords** : Chebyshev polynomial, stochastic van der Pol system, period-doubling bifurcation

**PACC** : 0547

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10472091, 10332030 ).

<sup>†</sup> E-mail: mashaajuan@mail.nwpu.edu.cn