高阶阈值上电离的量子电动力学理论*

余晓 \mathcal{H}^{1} ²) 王兵 \mathcal{H}^{1}) 程太 \mathcal{H}^{1}) 李晓 \mathcal{H}^{1}) 傅盘铭¹)

¹(中国科学院物理研究所,北京 100080) ²(井冈山学院物理系,吉安 343009) (2004年9月27日收到,2004年11月16日收到修改稿)

用非微扰量子电动力学理论研究一个由再散射产生的高阶阈值上电离(ATI).利用形式散射理论给出了高阶 ATI 谱的解析形式,并且讨论了在高阶 ATI 中不同 ATI 通道的干涉效应和光电子以不同角度入射时的高阶 ATI 谱.

关键词:阈值上电离,再散射,跃迁概率 PACC:3280,4250V

1.引 言

阈值上电离(ATI)是在强激光场中的一种特殊 现象 这里原子可以从光场中吸收比电离实际需要 量更多的光子,实验上观察到的光电离的电子谱呈 现一系列分立的电子峰 峰间距离是一个光子的能 量即所谓的 ATI 谱. 这个现象首先是由 Agostini 等11于 1979 年发现的 而后人们陆续观察到不同的 原子、分子在红外、可见、紫外等波段的激光场中的 ATI 现象^[2-6],得到了不同实验条件下的 ATI 谱.ATI 谱的主要特征是随着光强度的增大低阶的电子峰被 抑制而高阶峰逐渐显现,且截止频率为2u,,u,为电 子在激光场中的有质动力能[2] 随着实验测量精度 的提高 特别是由于高重复率的飞秒激光的发展使 电子谱的测量有了戏剧性的发展,得到 ATI 电子谱 在前几个峰呈下降趋势后出现平台结构 到某一能 量值后又开始快速衰减^[4].后来 Walker 等^[6]在光强 度约为 10¹⁵ W·cm⁻²时测得氢原子的 ATI 电子谱超 过 10 и р. 在高能量端存在平台的电子谱就是高阶 ATI 现象

ATI 和高阶 ATI 均是强场原子物理的重要现象 之一,已有大量的理论研究.对于 ATI,KFR 理论^[78] 作出了很好的解释,认为 ATI 是基态到连续 Volkov 态的跃迁.KFR 理论能解释 ATI 谱中分立的电子峰, 尤其是对圆偏振光给出了与实验符合得很好的结 果^[9].对于高阶 ATI, Walker 和 Sheehy 等^[0,11]借鉴了 Corkum^[12]的重碰模型,认为高阶 ATI 的本质就是原 子中被电离的光电子在光场作用下返回并与母核进 行再散射.利用这一经典模型,他们模拟了一个隧穿 电离波包在激光和原子核库仑势复合场中的时间演 化图像.即电子首先从原子基态隧穿电离,然后在激 光场驱动下振动,若电子返回并与母核作弹性碰撞 就产生高阶 ATI 谱.这个经典模型很好地解释了截 止频率规律.

Guo 及其合作者^[13,14]得到了电子在量子化的电 磁场中运动的薛定谔本征方程的严格解,即量子化 的 Volkov 解,并讨论了 ATI 问题.该本征解的存在使 得形式散射理论15]可以用来研究强场过程,在此基 础上,Guo等探索了一套描述强场过程的非微扰量 子电动力学(NPQED)方法^{16]},此方法在解释 K-D 效 应和双色 ATI 中的相位差效应^[17]方面都取得了很 大的成功.Fu 等将 NPOED 方法应用于高次谐波 (HHG), 他们提出 HHG 可理解为 ATI 后的激光辅 助复合^[18-21],并成功地解释了 HHG 平台的起因.这 个理论的意义在于第一次从频率领域角度将 ATI 和 HHG 这两种强场原子物理的重要现象联系起来,本 文将继续采用 NPOED 理论对高阶 ATI 进行研究.利 用形式散射理论 ,我们给出了高阶 ATI 谱的解析形 式,并且讨论了不同 ATI 通道的干涉效应和光电子 以不同角度入射时的高阶 ATI 谱. 对应于现有的高 阶 ATT 理论,从频率领域给出了高阶 ATT 的不同

^{*}国家自然科学基金(批准号 160478031)和国家重点基础研究发展规划(批准号:TG1999075203-3)资助的课题。

图像.

2. 量子电动力学理论

我们考虑一个频率为 ω、波矢为 k 的单模激光 场. 在 薛 定 谔 图 像 中,这 原 子-辐 射 场 系 统 的 Hamiltonian 量为

$$H = H_0 + U(r) + V.$$
 (1)

这里

$$H_0 = \frac{(-i\nabla)^2}{2m_e} + \omega N_\alpha \qquad (2)$$

是 Hamiltonian 量的非相互作用部分,而 $N_a = \frac{1}{2}(a^*a + aa^*)$ 是激光场的光子数算符, $a = \frac{1}{2}(a^*a)$ 湮没和产生算符. $U(\mathbf{r})$ 是原子束缚势,并且

$$V = -\frac{e}{2m_e} [(-i\nabla) \cdot A(r) + A(r) \cdot (-i\nabla)] + \frac{e^2 A^2(r)}{2m}$$
(3)

是电子和光场相互作用势.矢势

$$A(\mathbf{r}) = g(\hat{\varepsilon} e^{ik \cdot \mathbf{r}} a + \hat{\varepsilon}^* e^{-ik \cdot \mathbf{r}} a^+),$$

$$g = (2\omega V_{\gamma})^{-1/2},$$

其中 V_{γ} 是光场的归一化体积. 光场的偏振态定 义为

$$E_{\rm i} = - E_{\rm B} + \left(n_{\rm i} + \frac{1}{2} \right) \omega \,. \label{eq:Einstein}$$

末态是 Hamiltonian 量 $H_0 + V$ 的本征态 | $\Psi_f =$ | $\Psi_{P_{m_c}}$ 对应的能量本征值为

$$E_{\rm f} \; = - \; E_{\rm B} \; + \; \left(\; n_{\rm f} \; + \; \frac{1}{2} \right) \omega \; . \label{eq:Ef}$$

 $\Phi_{\mathbf{f}}(\mathbf{r})$ 是原子中电子在束缚能 E_{B} 时的基态波函数, $\Psi_{P,m}$ 是量子 Volkov 态.

由于在量子电动力学处理中,高阶ATI的边界 条件在久远的过去 U是开而V是关闭的,碰撞后 V 是开而U是关闭的.则相应的初态、末态散射波函 数分别为

$$\psi_i^+ = \psi_i + [1(E_i - H + i\varepsilon)]V\psi_i ,$$

$$\psi_f^- = \psi_f + [1(E_f - H - i\varepsilon)]U\psi_f .$$

从初态 $arphi_{
m i}$ 到末态 $arphi_{
m f}$ 的跃迁 S-矩阵元为

$$S_{\rm fi} = \psi_{\rm f}^- + \psi_{\rm i}^+ = \delta_{\rm fi} - 2\pi i \partial (E_{\rm f} - E_{\rm i}) T_{\rm fi}.$$
 (4)

$$T_{\rm fi} = \psi_{\rm f} \mid U \mid \psi_{\rm i}^{+}$$

$$= \psi_{\rm f} \mid U \mid \psi_{\rm i} + \psi_{\rm f} \mid U \frac{1}{E_{\rm i} - H + {\rm i}\varepsilon} V \mid \psi_{\rm i}$$

$$= T_{\rm fi}^{\rm o} + T_{\rm fi}^{\rm r} , \qquad (5)$$

其中,

这里

$$T_{\rm fi}^{
m o} = \psi_{
m f} \mid U \mid \psi$$

表示 ATI 项 ,而

$$T_{\rm fi}^{\rm r} = \psi_{\rm f} \mid U \frac{1}{E_{\rm i} - H + {\rm i}\varepsilon} V \mid \psi_{\rm i}$$

为再散射 ATI 项,即高阶 ATI.

我们主要关注高阶 ATI 部分.注意到

$$\frac{1}{E_i - H + i\epsilon} = \frac{1}{E_i - H_0 - U - V + i\epsilon}$$

$$= \frac{1}{E_i - (H_0 + V) + i\epsilon}$$

$$\times \left(1 + \frac{U}{E_i - (H_0 + V) + i\epsilon} + \dots\right)$$

因括号中高次项再散射的可能性很小,故可忽略.

在 $T_{\rm f}^{\rm r}$ 表达式中插入量子 Volkov 态的完备集,可得

$$T_{fi}^{r} = \sum_{P,n} \psi_{f} \mid U \mid \Psi_{P,n}$$

$$\times \Psi_{P,n} \mid \frac{1}{E_{i} - (H_{0} + V) + i\varepsilon} V \mid \psi_{i} .(6)$$
由于 | $\Psi_{P,n} \in H_{0} + V$ 的本征态,我们最终得到

$$T_{\mathrm{fi}}^{\mathrm{r}} = -\mathrm{i}\pi\sum_{P,n} \psi_{\mathrm{f}} \mid U \mid \Psi_{P,n}$$

× $\Psi_{P,n}$ | V | $\phi_i \otimes E_i - E_{P,n}$). (7) 方程 7) 右边第一个因子 $\Psi_{P,n}$ | U | ϕ_i 表示

ATI 这里电子从光场中吸收 $j = n_i - n$ 个光子而电 离 j 表示 ATI 通道 而第二个因子 $\phi_i \mid U \mid \Psi_{P,n}$ 代表光场中的碰撞 ,光电子再从光场中吸收 $n - n_f$ 个光子而跃迁到末态 ϕ_f .从方程(7)我们可清楚地 看出 ,高阶 ATI 可看作是 ATI 后伴随激光协助势散 射的两步过程.

接下来计算出 T_{fi}^{r} 中的两个因子.将量子 Volkov 态 $\Psi_{P,n}$ 的精确形式^[14]

 $\Psi_{P,n} = V_{e}^{-1/2} \sum_{j=-n}^{\infty} e^{\left[P + \left(u_{p}-j\right)k\right] \cdot r} \mid n+j \Im_{j}(\zeta,\eta)$ 和修正的库仑势

 $U = - e^{-r}/r$

引入 ,并定义

 $q = n_i - n_f.$

54 卷

最后得到第 q 阶再散射跃迁矩阵元

$$T_{\rm ft}^{(q)} = i4\pi^2 V_{\rm e}^{-3/2} \sum_{P,j} J_{q-j} (\zeta - \zeta_{\rm f})$$

$$\times \widetilde{\mathfrak{I}}_{j}^{*} (\zeta, \eta) \omega (u_{\rm p} - j)$$

$$\times \frac{\Phi(P + (u_{\rm p} - j)k) \delta(E_{\rm i} - E_{P,n})}{1 + (P_{\rm f} - P + (j - q)k)} (8)$$

式中,

$$\zeta = \frac{2 | e | \Lambda}{m_e \omega} (\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{\epsilon}}),$$

$$\eta = \frac{1}{2} u_p \cos \xi,$$

$$u_p = \frac{e^2 \Lambda^2}{m_e \omega},$$

$$\Im_j (\zeta, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{-j-2m} (\zeta) J_m (\eta).$$

这里 $\Im(\zeta,\eta)$ 是复合 Bessel 函数.利用

$$\mathbf{J}_{q-j}(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{f}}) = \sum_{j_1} \mathfrak{F}_{j_1}^* (\boldsymbol{\zeta}_{\mathrm{f}}, \boldsymbol{\eta}) \mathfrak{F}_{j+j_1-q}(\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\eta}),$$

作偶极近似并考虑到

$$\begin{split} &\delta (E_{i} - E_{P,n}) \\ &= \left(\frac{m}{2\omega}\right)^{1/2} (j - u_{p} - E_{B}/\omega)^{-1/2} \\ &\times \delta (p - (2m\omega)^{1/2} (j - u_{p} - E_{B}/\omega)^{1/2}), \\ &\sum_{p} \rightarrow \frac{V_{e}}{(2\pi)^{3}} \int p^{2} dp \int \sin\theta d\theta \int d\varphi , \end{split}$$

得到第 q 阶再散射跃迁矩阵元

$$T_{\rm fi}^{(q)} = i\sqrt{\mathcal{I}} m\omega \, \hat{J}^{\prime 2} V_{\rm e}^{-1/2} \sum_{j} (u_{\rm p} - j \, \hat{J} \, j - u_{\rm p} - E_{\rm B}/\omega \, \hat{J}^{\prime 2} \\ \times \frac{1}{2\pi} \iint \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \frac{J_{q-j}(\zeta - \zeta_{\rm f}) \, \hat{\chi}_{j}^{*}(\zeta \, \eta)}{1 + (P_{\rm f} - P_{j})^{*}} \Phi(P_{j}).$$
(9)

最终得到了第 q 阶再散射(高阶 ATI)跃迁概率

$$\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\Omega}\right)^{q} = \frac{V_{\mathrm{e}}(2\omega)^{2}}{(2\pi)^{3}} m^{32} (q - u_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{B}}/\omega)^{2} |T_{\mathrm{fi}}^{(q)}|^{2}.$$
(10)

用原子单位(m = | e | = h = 1)有

$$\left(\frac{d\omega}{d\Omega}\right)^{q} = \frac{\sqrt{2}\omega^{7/2}}{2\pi^{3}} \left(q - u_{p} - \frac{E_{B}}{\omega}\right)^{1/2}$$

$$\times \left|\sum_{j} (u_{p} - j) \left(j - u_{p} - \frac{E_{B}}{\omega}\right)^{1/2} \right|^{2}$$

$$\times \mathcal{Q}\left(p_{j}\right) \int \sin\theta d\theta d\varphi \frac{J_{q-f}(\zeta - \zeta_{f}) \mathfrak{H}^{*}(\zeta,\eta)}{1 + (P_{f} - P)} \right|^{2}.$$
(11)

3. 计算结果及分析

我们给出了氢原子($E_{\rm B}$ = 13.6 eV)的高阶 ATI 跃迁概率谱(为了与实验相对照,文中所有的高阶 ATI 谱均考虑了 ATI 的叠加,见方程(5)).这里光场 为线偏振 Nd :YAG 激光(ω = 1.165 eV)激光的偏振 方向为 X 轴方向,探测器在 X 轴上.图 1 给出了光 强度分别为 9.46 × 10¹³ W·cm⁻²($u_{\rm p}$ = 10 ω),1.42 × 10¹⁴ W·cm⁻²($u_{\rm p}$ = 15 ω)和 1.89 × 10¹⁴ W·cm⁻²($u_{\rm p}$ = 20 ω)时的高阶 ATI 谱.我们采用了 240 个 ATI 通道 进行叠加.从图 1 可以看出 高阶 ATI 谱都呈现平台 结构,其相应的截止频率均约为 10 $u_{\rm p}$.

对高阶 ATI 谱可以用经典的图像^[22]来理解.一 个电子在 $t = t_0$ 时刻从原子电离,其初始位置和速 度分别为 X(t_0)=0和 V(t_0)=0.假设光场为线偏 振,光场的矢势可写为

$$A(t) = A(t)\hat{e}_x$$

电子在电场中的动量为

mV(t) = P - eA(t).

这里 P 为幺正动量 ,是常矢量($P = eA(t_0)$),所以

 $mV(t) \equiv mv_x(t) = e[A(t_0) - A(t)].$

随后在 $t = t_1$ 时,电子返回到原子附近而以与 X 轴 反方向成 θ_0 角作弹性散射,返回时的动量为

 $mv_{x}(t_{1}) = e[A(t_{0}) - A(t_{1})],$

散射后在 $t \ge t_1$ 时刻到达探测器的动能为

$$E_{\rm kin} = \frac{m}{2} < v_x^2(t) + v_y^2(t) > t - u_{\rm p}$$
$$= \frac{e^2}{2m} \{ A^2(t_0) + 2A(t_1) A(t_1) - A(t_0) \} \}$$

这里 $u_p = \frac{e^2}{2m} < A^2(t) > L$ 是场的有质动量(< · > L 表示对时间求平均).电子到达探测器的最大动量为

$$E_{\rm kin\ max} = \frac{e^2}{2m} [2A(t_1) - A(t_0)]^2.$$

通过一些数学运算最后得到截止规律为

$$E_{\rm kin,max} = 10.007 u_{\rm p}$$

这说明本文的解与经典图像符合得相当好.

图 1 是对应于不同 u_p 时所有 ATI 通道的相干 叠加结果,我们还给出了不同 ATI 通道及重碰电子 以不同入射方向的高阶 ATI 效应.图 2 给出光强为 1.89×10^{14} W·cm⁻²,有限个 ATI 通道的高阶 ATI 谱. 图2中 ,j = 1(虚线), j = 1—4(实线)和 j = 1—100(点 线).从图 2 可以看出 ,j = 1—4 个 ATI 通道和 j = 1— 100 个 ATI 通道时,两者的高阶 ATI 谱具有相同的截 止频率,且都具有相似的平台结构.这说明对于高阶 ATI 谱特征而言,最初的 ATI 通道是起主要作用的, 且截止频率是所有 ATI 通道的再散射相干叠加结 果.从图 1、图 2 中还可看出,大约到第 100 个 ATI 通 道时就具有了良好的收敛性.



图 1 高阶 ATI 谱与光强度的关系 $u_p = 10\omega$ (虚线), $u_p = 15\omega$ (点线)和 $u_p = 20\omega$ (实线)



图 2 ATT 通道数分别为 *j* = 1(虚线), *j* = 1—4(实线)和 *j* = 1— 100(点线)时的高阶 ATT 谱

我们还计算了在光强为 1.89×10^{14} W·cm⁻²时, ATI 后光电子以大角($\varphi = 180^{\circ} \pm 10^{\circ}$)入射时的高阶 ATI 谱,如图 3 实线所示.图 3 虚线为所有再散射入 射角总和的高阶 ATI 谱.从图 3 可以看出,ATI 后光 电子以大角($\varphi = 180^{\circ} \pm 10^{\circ}$)入射而再散射的光电子 决定高阶 ATI 谱的截止频率,即逆电场方向入射和 母核正碰而被散射回的光电子到达探测器时具有最 大动能.这与经典的物理图像相当符合.



图 3 光强度为 1.89 × 10¹⁴ W·cm⁻²时,ATI 后光电子以大角(φ = 180° ± 10°)入射(实线)的高阶 ATI 谱

4. 讨论与结论

对于高阶 ATI 的研究,人们利用时间领域理 论,提出了一个隧穿电离的波包在激光场和原子核 库仑势复合场中随时间演化的三步模型^[10,11],即电 子首先从原子基态隧穿电离,然后在激光场驱动下 振动,若电子返回并与母核作弹性碰撞则产生高阶 ATI 谱.他们利用这个模型采取对时间进行积分的 方法研究了光电子的轨迹并很好地解释了截止频率 规律.另一种时间领域方法是 Bao 等^[23]提出的在 KFR 理论中考虑电离电子返回并与母核重碰的效 应,从而得到了关于高阶 ATI 的 *S*-矩阵的二阶表达 式,并且得到了与实验一致的结果.作为对照,在我 们的频率领域方法中,高阶 ATI 被看作是两步过程. 第一步是普通 ATI ,即处在基态的电子从光场中吸 收 $n_i - n$ 个光子而电离到量子化 Volkov态 $\Psi_{P,n}$,这 时电子具有本征能量

$$\varepsilon = \frac{P^2}{2m} + \left(n + \frac{1}{2} + u_p\right)\omega$$

这也正是 ATI 通道的起因. 第二步是光电子激光协 助势散射过程 ,即光电子再从光场中吸收 $n - n_f$ 个 光子而跃迁到末态 ϕ_f ,在(7)式中的第二个因子 ,我 们利用修正的库仑势 $U = -e^{-r}/r$,注意到

$$P_1 \mid U \mid P_2 = \int d^3 r U \exp(-i(P_1 - P_2) \cdot r),$$
$$\int d^3 r = \int r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi,$$

选取 $P_1 - P_2$ 的方向为球坐标下的 Z 方向,推得 $\psi_{\rm f} \mid U \mid \Psi_{P,n} = -V_{\rm e}^{-1}\sum_{j_1, j_2} \mathfrak{J}_{j_1}^* (\zeta_{\rm f}, \eta) \mathfrak{J}_{j_2}(\zeta, \eta)$

$$\times \frac{4\pi}{1 + (P_{f} - P + (j_{2} - j_{1})k)^{2}} \delta_{j_{1} + n_{f} + j_{2} + n}.$$

它决定了高阶 ATI 谱的主要特征,即平台结构,且截止频率是所有 ATI 通道的再散射相干叠加结果.

本文从频率领域研究高阶 ATI 现象,发展了一 个描述高阶 ATI 的不含时量子电动力学理论.这一

- [1] Agostini P , Fabre F , Mainfray G et al 1979 Phys. Rev. Lett. 42 1127
- [2] Freeman R R, Mcilrath T J, Hbucksbaum P et al 1986 Phys. Rev. Lett. 57 3156
- [3] Schumacher D W , Bucksbaum P H 1996 Phys . Rev . A 54 4271
- [4] Paulus G G, Nicklich W, Xu H et al 1994 Phys. Rev. Lett. 72 2851
- [5] Hertlein M P , Bucksbaum P H , Mull H G 1997 J. Phys. B 30 L197
- [6] Walker B Sheehy B ,Dimauro L F et al 1994 Phys. Rev. Lett. 73 1227
- [7] Reiss H R 1980 Phys. Rev. A 22 1786
- [8] Chen B Z 1997 Acta Phys. Sin. 46 2313 (in Chinese) [陈宝振 1997 物理学报 46 2313]
- [9] Reiss H R 1987 J. Phys. B 20 L79

理论中高阶 ATI 可看作是普通 ATI 后伴随激光协助 势散射的两步过程.利用形式散射理论得到了高阶 ATI 现象散射概率的完整解析式,这将有利于对高 阶 ATI 过程的理解.基于对模型原子的计算,得到了 与实验一致的高阶 ATI 的主要特征——平台和 10_u,的截止频率.

- [10] Walker B , Sheehy B , Kulander K C et al 1996 Phys. Rev. Lett. 77 5031
- [11] Sheehy B , Lafon R ,Widmer M et al 1998 Phys. Rev. A 58 3942
- [12] Corkum P B 1993 Phys. Rev. Lett. 71 1994
- [13] Guo D S , Aberg T 1988 J . Phys . A 21 4577
- [14] Guo D S , Drake G W F 1992 J. Phys. A 25 3383
- [15] Gell-Mann M , Goldberger M L 1953 Phys. Rev. 91 398
- [16] Guo D S , Aberg T , Crasemann B 1989 Phys. Rev. A 40 4997
- [17] Guo D S , Drake G W F 1992 Phys . Rev . A 45 6622
- [18] Gao L H , Li X F , Fu P M et al 1998 Phys. Rev. A 58 3807
- [19] Fu P M, Wang B B, Li X F et al 2001 Phys. Rev. A 64 063401
- [20] Wang B B , Li X F , Gao L H et al 2001 Chin . Phys . Lett . 18 1199
- [21] Cheng T W , Li X F , Ao S Y et al 2003 Phys. Rev. A 68 033411
- [22] Paulus G G , Becker W , Walther H 1995 Phys. Rev. A 52 4043
- [23] Bao D , Chen S G , Liu J 1996 Appl . Phys . B 62 313

Yu Xiao-Guang^{1,2,)} Wang Bing-Bing^{1,)} Cheng Tai-Wang^{1,)} Li Xiao-Feng^{1,)} Fu Pan-Ming^{1,)}

¹) (Institute of Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100080 , China)

²) (Department of Physics , Jinggangshan University , Ji'an 343009 , China)

(Received 27 September 2004; revised manuscript received 16 November 2004)

Abstract

Based on the nonperturbative quantum electrodynamics, we study the high-order above-threshold ionization (ATI) induced by rescattering process. By using a formal scattering theoretical approach, an analytic form of the high-order ATI spectrum is obtained. We discuss the interference effect of different ATI channels on the high-order ATI. The high-order ATI spectra due to the rescattering of electrons from different incident angles are also given.

Keywords : above-threshold ionization , re-scattering process , transition probability PACC : 3280 , 4250V

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60478031) and the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. TG1999075203-3).