第 54 卷 第 8 期 2005 年 8 月
1000-3290/2005/54(08)/3958-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.8, August, 2005
©2005 Chin. Phys. Soc.

Kerr 黑洞的量子面积谱及微黑洞的最小质量

蒋继建　李传安

(菏泽学院物理系,菏泽　274015)

(2004 年 10 月 11 日收到;2005 年 1 月 21 日收到修改稿)

Kerr 黑洞仅含有两个参量 M 和 J. 把 M 和 J 视为广义坐标,并将 M, J 和它们的共轭量构成四维相空间,通过规范变换得到了 Kerr 黑洞的量子面积谱. 由此给出了 Schwarzschild 黑洞的最小质量.

关键词:黑洞,量子面积谱,共轭,规范变换

PACC:9760L,0420,0470

1. 引　　言

自 Hawking 发现黑洞存在热辐射以来,人们在黑洞物理研究上做了大量的工作[1–3],特别是对黑洞熵的研究[4–8]都给出了黑洞熵与视界面积成正比的正确结论. 可见研究黑洞的量子面积谱,对进一步认识黑洞熵,将是非常有意义的. Bekenstein 等建议黑洞视界的量子面积谱应具有均匀的间隔[9,10],可表示为 $\epsilon\hbar$,这里 $\hbar$ 是普朗克常数,ϵ 为一个有序数列. 这种面积的不连续性是测不准关系的必然结果,也是黑洞质量谱的具体体现. Barvinsky 等[11]利用强加周期条件的方法给出了荷电黑洞的视界面积谱,

$$A = 8\pi\hbar\left(n + \frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right) \quad (n, p = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1}$$

最近文献[12]又计算了 Kerr-Newman 黑洞的视界面积谱,

$$A = 8\pi\hbar\left(n + \frac{p_1}{2} + p_2 + \frac{1}{2}\right) \quad (n, p_1, p_2 = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2}$$

2002 年,Gour 等[12]用构成 8 维相空间中的 8 个动力学量来描述 Kerr 黑洞的时空性质. 这 8 个变量由 4 个可观测物理量 A, J_α, J_β, J_γ 和它们各自的共轭量 P_A, α, β, γ 组成,其中 A 是黑洞视界面积,而 J_α, J_β, J_γ 是与三个 Euler 角 α, β, γ 相对应的角动量分量. 最终由黑洞的质量 M 表示视界面积 A. 文献[12]则显示了 $[M, J_\beta] \neq 0$,即 M, J_β 之间并不满足对易关系. 为实现黑洞的量子化,必须再构造总角动量 $J_{cl} = J_{cl}(J_\alpha, J_\beta, J_\gamma, \beta)$ 代替原物理量 J_β,从而得到一组新的可观测量 M, J_{cl}, J_α, J_γ 及它们各自的正则共轭量 Π_M, Π_{cl}, Π_α, Π_γ. 用以上 8 个动力学变量来描述 Kerr 黑洞的相空间. 为避免上述繁琐的过程,本文从 Kerr 度规中的两个参量 M, J 入手,利用这两个参量来研究 Kerr 黑洞视界面积谱. 其优越性就在于:一是由原来的四个观测量简化为两个可观测量,使研究方法得以改进;二是由于 M 和 J 是可对易的,从而又能很方便地实现正则量子化. 实践表明,我们所采用的方法是切实可行的. 尽管我们只考虑到 Kerr 黑洞的两个参量,仍可得到理想的结果.

2. Kerr 黑洞的量子面积谱

在 Kerr 时空中,四维不变线元为

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right)dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ &+ \left[(r^2 + a^2)\sin^2\theta + \frac{2Mra^2\sin^4\theta}{\rho^2}\right]d\varphi^2 \\ &- \frac{4Mra\sin^2\theta}{\rho^2}dt\,d\varphi, \end{aligned} \tag{3}$$

式中,$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta$,$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$,而 $a = J/M$ 为单位质量的角动量. 由(3)式得 Kerr 黑洞的视界位置及视界面积分别为

$$r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - J^2/M^2}, \tag{4}$$

$$A = 8\pi M\left(M \pm \sqrt{M^2 - J^2/M^2}\right). \tag{5}$$

由此易得

$$M^2 = \frac{A}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{A}. \tag{6}$$

在 Kerr 黑洞中,由 Bekenstein 公式可得

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega\delta J, \tag{7}$$

式中，κ 为视界表面重力，Ω 为黑洞的拖动角速度．利用(5)—(7)式，不难得到

$$\kappa = \frac{1}{4M} - \frac{16\pi^2 J^2}{MA^2}, \tag{8}$$

$$\Omega = \frac{4\pi J}{MA}. \tag{9}$$

按照文献[12]，在经典上，物理动力学现象能用可观测量 A，J 构成的二维空间及它们的共轭量来表示，即在相空间中 A，J 及各自的共轭量 P_A，P_J．若将 A 改用质量来表示，由(6)式知 $M = M(A, J)$，J 及相应的共轭量 π_M，π_J．由 A，J 及 P_A，P_J 给出的广义坐标的导数，并利用(7)式的关系，经过冗长的运算，可得到具体的变换形式为

$$\pi_M = 8\pi p_A/\kappa, \tag{10}$$

$$\pi_J = p_J - 8\pi\Omega p_A/\kappa. \tag{11}$$

由此不难证明

$$[M, \pi_M] = [J, \pi_J] = 1. \tag{12}$$

其余的泊松括号都等于零．即上述所给的变换是规范变换．

依照文献[12]假定的周期条件，应有

$$\pi_M \sim \pi_M + 2\pi/\kappa. \tag{13}$$

(13)式尽管是一种工作假设，但这个假设的周期条件具有 Euclidean 时间周期性，并且反映出可对 π_M 进行 Schwarzschild 类时测量[12]．因此，这一假设是非常必要的，也是非常正确的．为寻找相应的量子数，引入一对共轭变量 x，p_x 且

$$x = \sqrt{\frac{\hbar B(M, J)}{\pi}}\cos(\kappa\pi_M), \tag{14}$$

$$p_x = \sqrt{\frac{\hbar B(M, J)}{\pi}}\sin(\kappa\pi_M), \tag{15}$$

式中 $B(M, J)$为待定函数．可通过上述的规范变换成为一组可观测量 x，J 及其共轭量 p_x，p_J．为确定函数 $B(M, J)$，先考虑以下一个充要规范变换条件：

$$p_x\delta x + p_J\delta J = \pi_M\delta M + \pi_J\delta J. \tag{16}$$

在一级近似下，由(14)，(15)式可得

$$p_x\delta x = \frac{\hbar\kappa\pi_M}{2\pi}\left(\frac{\partial B}{\partial M}\delta M + \frac{\partial B}{\partial J}\delta J\right). \tag{17}$$

由(16)，(17)式便可得到

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{2\pi}{\hbar\kappa}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial B}{\partial J} = \frac{2\pi(\pi_J - p_J)}{\hbar\kappa\pi_M}. \tag{19}$$

比较(18)和(7)式，可得

$$\frac{\partial B}{\partial M} = \frac{1}{4\hbar}\frac{\partial A}{\partial M}. \tag{20}$$

利用(19)，(20)式，不难定出

$$B(M, J) = \frac{1}{4\hbar}A(M, J) + F(J), \tag{21}$$

式中 $F(J)$为待定项．再考虑到 Kerr 黑洞，至少在经典理论中它的极值面积应遵循下述公式：

$$A \geqslant A_{\text{ext}}(J) = 8\pi J. \tag{22}$$

为保证方程(14)，(15)有意义，必有 $B \geqslant 0$．由(21)，(22)式可见，最合适的选择就是取 $F(J) = -\frac{A_{\text{ext}}(J)}{4\hbar}$，因此便得到

$$B = \frac{[A(M, J) - 8\pi J]}{4\hbar}. \tag{23}$$

由(14)，(15)和(23)式容易得到

$$x^2 + p_x^2 = \frac{[A(M, J) - 8\pi J]}{4\pi} \geqslant 0. \tag{24}$$

将 x，p_x 看成一个完整的二维相空间，并将 x，p_x 分别视为坐标算符和动量算符，则

$$\frac{\hbar}{2\pi}\hat{B} = [\hat{A} - 8\pi\hat{J}] = \frac{(\hat{x}^2 + \hat{p}_x^2)}{2}. \tag{25}$$

相应 B 的本征值为

$$B_n = 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{26}$$

由(26)式得到

$$A - A_{\text{ext}}(J) = 8\pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{27}$$

再利用(19)，(23)和(7)式，可得

$$p_J = \pi_J + \pi_M\Omega + \frac{\kappa\pi_M}{8\pi}\frac{\partial A_{\text{ext}}(J)}{\partial J}. \tag{28}$$

令 $x_1 = \pi_J + \pi_M\Omega$，$\theta = \kappa\pi_M$，(28)式可化简为

$$p_J = x_1 + \frac{\theta}{8\pi}\frac{\partial A_{\text{ext}}(J)}{\partial J}. \tag{29}$$

由(13)式不难看出，θ 为一个角，其周期为 2π．另外再考虑一个用坐标所表示的算子

$$\hat{J} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p_J}. \tag{30}$$

它所对应的波函数应为

$$\Psi_J(p_J) \sim \exp(\mathrm{i}Jp_J/\hbar). \tag{31}$$

它的周期性可表示为

$$Jp_J/\hbar \sim Jp_J/\hbar + 2\pi n_1. \tag{32}$$

当 x_1 为不变量时，比较(29)和(32)式容易得到

$$\frac{\theta J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{\text{ext}}(J)}{\partial J} \sim \frac{\theta J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{\text{ext}}(J)}{\partial J} + 2\pi n_2. \tag{33}$$

因此便证明了(33)式左边必是一个角．同时再考虑

到 θ 也是一个角,所以$\frac{J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{\rm ext}(J)}{\partial J}$必是一个数,再利用(13)式中的周期条件,不难导出

$$\frac{J}{8\pi\hbar}\frac{\partial A_{\rm ext}(J)}{\partial J}=m \qquad (m=0,1,2,\cdots). \tag{34}$$

再由(22)式,可得

$$J=\hbar m. \tag{35}$$

将(35)式代入(27)式,便可得到 Kerr 黑洞的视界量子面积谱为

$$A=8\pi\hbar\left(n+m+\frac{1}{2}\right) \qquad (n,m=0,1,2,\cdots). \tag{36}$$

3. Schwarzschild 微黑洞的最小质量

所给(36)式在 n,m 的取值范围内是普遍成立的.由于 m 仅与角动量 J 有关,当 $m=0$ 时,则 $J=0$,(36)式化为

$$A=8\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad (n,m=0,1,2,\cdots). \tag{37}$$

这正是 Schwarzschild 黑洞的量子面积谱.再令(37)式中的 $n=0$,则可得到

$$A_{\min}=4\pi\hbar. \tag{38}$$

这就是 Schwarzschild 黑洞的基态面积.

由于 Schwarzschild 黑洞为球对称黑洞,由此便可求出 Schwarzschild 黑洞的最小视界半径为

$$r_{\rm H\,min}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}}. \tag{39}$$

由此可见,Schwarzschild 黑洞的视界不可能小到一个点,应该满足

$$r_{\rm H}\geqslant\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}}. \tag{40}$$

由 $r_{\rm H}=\frac{2GM}{c^2}$,利用(39)式可求出 Schwarzschild 黑洞的最小质量为

$$M_{\min}=\frac{c^2}{4G}\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}}. \tag{41}$$

所有自然界中可能存在的微黑洞的质量都应该满足

$$M\geqslant\frac{c^2}{4G}\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}}. \tag{42}$$

可见黑洞的视界半径和质量都不可能任意小,都存在一个最小值.

感谢张建华、李洪奇先生的有益讨论.

[1] Zhao Z, Pei S Y, Liu L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2004 (in Chinese) [赵 峥、裴寿镛、刘 辽 1999 物理学报 **48** 2004]

[2] Liu W B, Li X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1793 (in Chinese) [刘文彪、李 翔 1999 物理学报 **48** 1793]

[3] Song T P, Yao G Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1144 (in Chinese) [宋太平、姚国政 2002 物理学报 **51** 1144]

[4] Li C A 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 986 (in Chinese) [李传安 2001 物理学报 **50** 986]

[5] Jing J L, Yan M S 2000 *Chin. Phys.* **9** 389

[6] Zhao Z, Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1558 (in Chinese) [赵 峥、朱建阳 1999 物理学报 **48** 1558]

[7] Zhang J Y, Zhao Z 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2096 (in Chinese) [张静仪、赵 峥 2003 物理学报 **52** 2096]

[8] Meng Q M, Su J Q, Li C A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1822 (in Chinese) [孟庆苗、苏九清、李传安 2003 物理学报 **52** 1822]

[9] Bekenstein J D 1974 *Lett. Nuovo Cimento* **11** 476

[10] Mukhanov V F 1986 *JETP Lett.* **44** 63

[11] Barvinsky A, Das S, Kunstatter G 2001 *Class. Quant. Grav.* **18** 4845

[12] Gour G, Medved A J M 2003 *Class. Quant. Grav.* **20** 1661

Quantum area spectrum of Kerr black hole and the smallest mass of micro-black hole

Jiang Ji-Jian　Li Chuan-An

(*Department of Physics*, *Heze University*, *Heze* 274015, *China*)

(Received 11 October 2004; revised manuscript received 21 January 2005)

Abstract

Kerr black hole has only two parameters of M and J. M and J, as the general coordinates, together with their conjugate variables form a four-dimensional phase space. The quantum area spectrum of Kerr black hole is obtained by performing gauge transformations, from which we can obtain the smallest mass of Schwarzchild black hole.

Keywords: black hole, quantum-area spectrum, conjugate, canonical transformation

PACC: 9760L, 0420, 0470