第 54 卷 第 9 期 2005 年 9 月
1000-3290/2005/54(09)/3967-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.9,September,2005

一类厄尔尼诺海-气振子机理的摄动解*

莫嘉琪[1)] 林万涛[2)] 王 辉[3)]

1)(安徽师范大学,芜湖 241000)

2)(中国科学院大气物理研究所,北京 100029)

3)(中国气象科学研究院,北京 100081)

(2004 年 11 月 23 日收到;2004 年 12 月 24 日收到修改稿)

研究了一类厄尔尼诺-南方海涛(ENSO)机理耦合系统振荡.利用摄动理论和方法,较简便地得到了一类 ENSO 模型解的一致有效的渐近展开式.

关键词:非线性,摄动理论,厄尔尼诺-南方涛动模型

PACC:0200

El Niño/La Niño(厄尔尼诺/拉尼娜)和南方涛动分别是发生在热带大气和海洋中的异常事件.由于这两种现象存在密切联系,是热带大气和海洋运动相互作用的表现,因此近年来把这两种现象合起来称为 ENSO.ENSO 事件是一个复杂的非线性系统,它的发生严重地影响全球各地区气候和生态等方面的变化.它带来了许多灾害,对全球的经济发展和人类生活都受到严重的影响.因此对它的规律的探索和预防的研究,为当前国际学术界所关注的对象.许多学者已经用了不同的方法对它的局部性和整体性的性态作了多方位的研究[1—11].在大气物理、海洋气候、动力系统等方面莫嘉琪、林万涛等利用渐近分析等方法也研究了一系列相关的问题[12—19].

ENSO 的振荡性态需要海洋-大气流动正负两种反馈.这种异常简化为赤道表面温度(SST)梯度,因而也和南方涛动流动强度有关,这导致弱信风沿着赤道行进.弱信风驱动着海洋流动变化,加强了 SST 的异常.正的海洋-大气反馈或耦合海洋-大气的不稳定性导致了赤道太平洋气温变暖.

非线性问题的理论和方法在国际学术界的研究中是一个十分热门的对象[20].许多学者做了大量的工作[21,22],并解决了许多数学物理问题.近来非线性摄动问题的近似方法已进一步被发展和深化[23,24].本文是讨论一个 ENSO 海 - 气模型.在一定的情况下,从数学物理理论的角度,利用微分不等式理论较简捷地得到了相应非线性问题的一致有效的渐近解,从而可以较直接地讨论问题某些相关物理量的定量、定性方面的特征.

考虑如下一个非线性耦合海-气振子 ENSO 模型:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = A\frac{\partial T}{\partial x} + B(T - \mu h) - CT + \varepsilon D(A + T - \mu h), \tag{1}$$

$$\delta\frac{\partial}{\partial t}\left[yh + \varepsilon\left(\frac{2}{y}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right] - \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial x} + E, \tag{2}$$

$$T|_{t=0} = \bar{T}(x,y), \tag{3}$$

$$h|_{t=0} = \bar{h}(x,y), \tag{4}$$

其中 T 为东太平洋赤道的 SST 异常,h 为温度深度异常,$\bar{T}$,$\bar{h}$ 分别为 T,h 的初始状态,模型参数 A,B,C,D,E,μ,δ 和 $0<\varepsilon\ll 1$ 为无量纲非负参数,其详细的物理意义参见文献[11].

设对应于(1)—(4)式的退化系统为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = A\frac{\partial T}{\partial x} + B(T - \mu h) - CT, \tag{5}$$

$$\delta\frac{\partial}{\partial t}[yh] - \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial T}{\partial x} + E, \tag{6}$$

$$T|_{t=0} = \bar{T}(x,y), \tag{7}$$

* 国家自然科学基金(批准号:90111011 和 10471039)、国家重点基础研究发展规划项目(批准号:2003CB415101-03 和 2004CB418304)、中国科学院重大创新项目(批准号:KZCX3-SW-221)和浙江省自然科学基金(批准号:Y604127)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$h\mid_{t=0}=\bar{h}(x,y). \tag{8}$$

上述系统为一阶线性偏微分方程组,不难得到它的解.

令系统(1)—(4)的解(T,h)为

$$T=\sum_{i=0}^{\infty}T_n\varepsilon^i, \tag{9}$$

$$h=\sum_{i=0}^{\infty}h_n\varepsilon^i. \tag{10}$$

显然,(T_0,h_0)就是对应于线性系统(5)—(8)的解.将(9),(10)式代入(1)—(4)式,由 ε^1 的系数,有

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}=A\frac{\partial T_1}{\partial x}+B(T_1-\mu h_1)-CT_1+D(A+T_0-\mu h_0), \tag{11}$$

$$\delta\frac{\partial}{\partial t}[yh_1]-\frac{\partial h_1}{\partial x}=-\frac{\partial T_1}{\partial x}+E-\delta\left(\frac{2}{y}\frac{\partial h_0}{\partial y}-\frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2}\right). \tag{12}$$

$$T_1\mid_{t=0}=0, \tag{13}$$

$$h_1\mid_{t=0}=0. \tag{14}$$

由线性系统(11)—(14),可以求得解(T_1,h_1).比较ε^i,$i=2,3,\cdots$的系数,有

$$\frac{\partial T_i}{\partial t}=A\frac{\partial T_i}{\partial x}+B(T_i-\mu h_i)-CT_i+F_{1i},\quad i=2,3,\cdots, \tag{15}$$

$$\delta\frac{\partial}{\partial t}[yh_i]-\frac{\partial h_i}{\partial x}=-\frac{\partial T_i}{\partial x}+E+F_{2i},\quad i=2,3,\cdots, \tag{16}$$

$$T_i\mid_{t=0}=0, \tag{17}$$

$$h_i\mid_{t=0}=0, \tag{18}$$

其中 F_{ji},$j=1,2$,$i=2,3,\cdots$,为关于 i 逐次已知的函数,其结构从略.

由非齐次线性系统(15)—(18),能依次得到$T_i(t)$,$h_i(t)$,$i=2,3,\cdots$.再由(9),(10)式,便得到了耦合系统(1)—(4)解的形式渐近展开式.

下面来证明得到的展开式(9),(10)的一致有效性.

构造辅助函数 $\alpha_i(t,x,y)$,$\beta_i(t,x,y)$,$i=1,2$:

$$\alpha_1(t,x,y)=\sum_{i=0}^{m}T_i\varepsilon^i-r_1\varepsilon^{m+1},$$

$$\alpha_2(t,x,y)=\sum_{i=0}^{m}h_i\varepsilon^i-r_2\exp(-x)\varepsilon^{m+1}, \tag{19}$$

$$\beta_1(t,x,y)=\sum_{i=0}^{m}T_i\varepsilon^i+r_1\varepsilon^{m+1},$$

$$\beta_2(t,x,y)=\sum_{i=0}^{m}h_i\varepsilon^i+r_2\exp(-x)\varepsilon^{m+1}, \tag{20}$$

其中 m 为任意的正整数,而 r_i($i=1,2$)为适当大的正常数,将在下面确定.

显然有

$$\alpha_i(t,x,y)\leqslant\beta_i(t,x,y),\quad i=1,2. \tag{21}$$

并由(7),(8),(13),(14),(17)和(18)式知,

$$\alpha_1(0,x,y)=\sum_{i=0}^{m}T_i\mid_{t=0}\varepsilon^i-r_1\varepsilon^{m+1}=\bar{T}(x,y)-r_1\varepsilon^{m+1},$$

$$\alpha_2(0,x,y)=\sum_{i=0}^{m}h_i\mid_{t=0}\varepsilon^i-r_1\varepsilon^{m+1}=\bar{h}(x,y)-r_1\exp(-x)\varepsilon^{m+1}.$$

因此有

$$\alpha_1(0,x,y)\leqslant\bar{T}(x,y), \tag{22}$$

$$\alpha_2(0,x,y)\leqslant\bar{h}(x,y). \tag{23}$$

同理可得

$$\beta_1(0,x,y)\geqslant\bar{T}(x,y), \tag{24}$$

$$\beta_2(0,x,y)\geqslant\bar{h}(x,y). \tag{25}$$

下面来证明

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}-A\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-B(\alpha_1-\mu\alpha_2)+C\alpha_1-\varepsilon D(A+\alpha_1-\mu\alpha_2)\leqslant 0, \tag{26}$$

$$\delta\frac{\partial}{\partial t}\left[y\alpha_2+\varepsilon\left(\frac{2}{y}\frac{\partial\alpha_2}{\partial y}-\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial y^2}\right)\right]-\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-E\leqslant 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial\beta_1}{\partial t}-A\frac{\partial\beta_1}{\partial x}-B(\beta_1-\mu\beta_2)+C\beta_1-\varepsilon D(A+\beta_1-\mu\beta_2)\geqslant 0, \tag{28}$$

$$\delta\frac{\partial}{\partial t}\left[y\beta_2+\varepsilon\left(\frac{2}{y}\frac{\partial\beta_2}{\partial y}-\frac{\partial^2\beta_2}{\partial y^2}\right)\right]-\frac{\partial\beta_2}{\partial x}+\frac{\partial\beta_1}{\partial x}-E\geqslant 0. \tag{29}$$

事实上,由(5),(6),(11),(12),(15)和(16)式,对于$|t|\leqslant M_0$,$|x|\leqslant M_1$,$|y|\leqslant M_2$,其中 M_i,$i=0,1,2$ 为任意大的确定的正常数,则存在正常数 K_i,$i=1,2$,成立如下估计式:

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}-A\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-B(\alpha_1-\mu\alpha_2)+C\alpha_1-\varepsilon D(A+\alpha_1-\mu\alpha_2)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_{i=0}^{m}T_i\varepsilon^i\Big)-A\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i=0}^{m}T_i\varepsilon^i\Big)-B\Big(\Big(\sum_{i=0}^{m}T_i\varepsilon^i-r_1\varepsilon^{m+1}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&-\mu\Big(\sum_{i=0}^{m} h_i\varepsilon^i - r_2\exp(-x)\varepsilon^{m+1}\Big)\Big)\\
&+C\Big(\sum_{i=0}^{M} T_i\varepsilon^i - r_1\varepsilon^{m+1}\Big)\\
&-\varepsilon D\Big(A+\Big(\sum_{i=0}^{m} T_i\varepsilon^i - r_1\varepsilon^{m+1}\Big)\\
&-\mu\Big(\sum_{i=0}^{m} h_i\varepsilon^i - r_2\exp(-x)\varepsilon^{m+1}\Big)\Big)\\
\leqslant&\frac{\partial T_0}{\partial t}-A\frac{\partial T_0}{\partial x}-B(T_0-\mu h_0)+CT_0\\
&+\Big[\frac{\partial T_1}{\partial t}-A\frac{\partial T_1}{\partial x}-B(T_1-\mu h_1)\\
&+CT_1-D(A+T_0-\mu h_0)\Big]\varepsilon\\
&+\sum_{i=2}^{m}\Big[\frac{\partial T_i}{\partial t}-A\frac{\partial T_i}{\partial x}-B(T_i-\mu h_i)\\
&+CT_i-F_{1i}\Big]\varepsilon^i+K_1\varepsilon^{m+1}\\
&+(B-C)r_1\varepsilon^{m+1}+\mu\exp(-x)r_2\varepsilon^{m+1}\\
=&(K_1-(C-B)r_1-\mu\exp(-x)r_2)\varepsilon^{m+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\frac{\partial}{\partial t}\Big[y\alpha_2+\varepsilon\Big(\frac{2}{y}\frac{\partial\alpha_2}{\partial y}-\frac{\partial^2\alpha_2}{\partial y^2}\Big)\Big]\\
&-\frac{\partial\alpha_2}{\partial x}+\frac{\partial\alpha_1}{\partial x}-E\\
\leqslant&\delta\frac{\partial}{\partial t}\Big[y\sum_{i=0}^{m}h_i\varepsilon^i+\varepsilon\Big(\frac{2}{y}\frac{\partial}{\partial Y}\Big(\sum_{i=0}^{m}h_i\varepsilon^i\Big)\\
&-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(\sum_{i=0}^{m}h_i\varepsilon^i\Big)\Big)\Big]-\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i=0}^{m}h_i\varepsilon^i-r_2\exp(-x)\varepsilon^{m+1}\Big)\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sum_{i=0}^{m}T_i\varepsilon^i\Big)-E+K_2\varepsilon^{m+1}\\
=&(K_2-r_2\exp(-x))\varepsilon^{m+1}.
\end{aligned}
$$

故可选取足够大的 r_2，然后选取足够大的 r_1，由上述两式就可分别得到不等式(26)，(27). 同理可证不等式(28)，(29) 也成立.

由关系式(21)—(29)知 $\alpha_\varepsilon(t,x,y)$，$\beta_\varepsilon(t,x,y)$ 分别为系统(1)—(4)在相应区域上的下解和上解，再由比较定理知，在 $|t|\leqslant M_0$，$|x|\leqslant M_1$，$|y|\leqslant M_2$ 上，问题(1)—(4)存在一组解$(T_\varepsilon(t,x,y), h_\varepsilon(t,x,y))$，并成立如下的一致有效的渐近估计式：

$$T_\varepsilon(t,x,y)=\sum_{i=0}^{m}T_i\varepsilon^i+O(\varepsilon^{m+1}),\ 0<\varepsilon\ll 1,$$

$$h_\varepsilon(t,x,y)=\sum_{i=0}^{m}h_i\varepsilon^i+O(\varepsilon^{m+1}),\ 0<\varepsilon\ll 1,$$

其中 m 为任意的正整数.

结语　厄尔尼诺和南方涛动(ENSO)是一个复杂的气候异常现象. 为了较深刻地认识它的气候异常的变化规律，由于方程组的复杂性，很难求得其精确解. 因此，人们只能把问题简化，并且设法求出相应问题的近似解. 本文提供了用摄动方法求得对应系统的任意阶近似的渐近解，并且证明了其一致有效性. 这是一种有效的近似求解方法. 求出了相应的渐近解，就可用定量的方法了解 ENSO 海气振子机理的异常变化，发现其规律，从而进一步去了解它，并预报它的规律. 关于进一步研究在赤道东太平洋 SST 异常、温度异常及信风强度异常等物理量的定性和定量方面的性态以及与实际现象的比较不再在本文中研究.

[1] Feng G L, Dong W J, Jia X J *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静等 2002 物理学报 **51** 1181]

[2] Feng G L, Dai X G, Wang A H *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧等 2001 物理学报 **50** 606]

[3] Wang C 2001 *Advances in Atmospheric Sci.* **18** 674

[4] Guan X P, He Y H and Fan Z P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 276 (in Chinese) [关新平、何宴辉、范正平 2003 物理学报 **52** 276]

[5] Hong L and Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]

[6] Li C G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2114 (in Chinese) [李春贵 2003 物理学报 **52** 2114]

[7] Chen S H, Liu J, Xie J *et al* 2002 *Chin. Phys.* **11** 233

[8] Li Z and Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9

[9] Lu J H and Zhang S C 2002 *Chin. Phys.* **11** 12

[10] Lin J and Xu Y S 2003 *Chin. Phys.* **12** 1049

[11] Wang B, Barcilon A and Fang Z 1999 *J. Atmospheric Sciences* **56** 5

[12] Lin W T, Ji Z Z, Wang B *et al* 2000 *Chinese Science Bulletin* **45** 1358

[13] Lin W T, Ji Z Z and Wang B 2001 *Acta Air Dyna* **19** 348 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王　斌等 2001 空气动力学学报 **19** 348]

[14] Lin W T, Ji Z Z and Wang B 2002 *Advances in Atmospheric Sciences* **19** 699

[15] Lin W T, Ji Z Z and Wang B 2002 *Progress in Natural Sci.* **12** 102 (in Chinese) [林万涛、季仲贞、王　斌等 自然科学进展 **12** 102]

[16] Lin W T and Mo J Q 2004 *Chinese Science Bulletin* **48** supp Ⅱ 5
[17] Mo J Q, Lin W T and Zhu J 2004 *Progress in Natural Sci*. **14** 550
[18] Mo J Q and Lin W T 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]
[19] Mo J Q and Lin W T 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 3245 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 3245]
[20] de Jager E M and Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North- Holland Publishing Co)
[21] Lin F and Xu Y S 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 1049
[22] Ruan H Y 1999 *Chin*. *Phys*. **8** S294
[23] Bell D C and Deng B 2003 *Nonlinear AnalReal World Appl*. **3** 515
[24] Adams K L, King J R and Tew R H 2003 *J*. *Engineering Math*. **45** 197

Perturbative solution for a class of El Niño sea-air oscillator mechanism*

Mo Jia-Qi[1)] Lin Wan-Tao[2)] Wang Hui[3)]
[1)] (*Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)
[2)] (*Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*)
[3)] (*Chinese Academy of Meteorological*, *Beijing* 100081, *China*)
(Received 23 November 2004; revised manuscript received 24 December 2004)

Abstract

The oscillation for a class of coupled systems in the El Niño-Southern Oscillation (ENSO) mechanism is studied. Using the perturbation theory and perturbative method, the uniformly valid asymptotic expansions of the solution for a class of ENSO model are obtained easily.

Keywords: nonlinear, perturbation theorem, El Niño-Southern oscillation Model
PACC: 0200

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90111011 and 10471039), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304), the Key Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221), and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y604127).