第 54 卷 第 9 期 2005 年 9 月
1000-3290/2005/54(09)/3975-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54,No.9,September,2005
©2005 Chin. Phys. Soc.

广义 Chaplygin 系统的约化*

梅凤翔[1)†] 许学军[1)2)]

1) (北京理工大学力学系,北京 100081)

2) (浙江师范大学物理系,金华 321004)

(2004 年 11 月 16 日收到;2004 年 12 月 24 日收到修改稿)

将广义 Chaplygin 系统写成含 Lagrange 函数的形式,它在一定条件下可约化为一个无约束系统.给出这些条件并举例说明结果的应用.

关键词:分析力学,约化,非完整系统,广义 Chaplygin 系统

PACC:0320

1. 引 言

有对称性的非完整系统的约化和重构是几何动力学研究的热点之一[1—4].这些问题涉及对称性、纯运动学情形、水平对称情形和一般情形等[5].这些工作强调近代微分几何工具.实际上所谓"约化",主要是指将运动微分方程的阶降下来.对非完整系统而言,还要使约化了的系统不依赖于非完整约束.本文研究广义 Chaplygin 系统的约化问题.首先,建立广义 Chaplygin 系统的运动方程;其次,给出系统可以约化的条件;最后举例说明结果的应用.

2. 广义 Chaplygin 系统的方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定.系统的运动受有 g 个理想 Chetaev 型非完整约束

$$\dot q_{\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(t, q_s, \dot q_\sigma) \left(\begin{array}{l} s = 1,2,\cdots,n;\ \beta = 1,2,\cdots,g; \\ \sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon;\ \varepsilon = n-g \end{array}\right). \tag{1}$$

系统的运动方程可用广义 Chaplygin 方程来描述,有形式[6—8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde T}{\partial \dot q_\sigma} - \frac{\partial \tilde T}{\partial q_\sigma} - \left(\frac{\partial \tilde T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot q_\sigma} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\right) T_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \tilde Q_\sigma$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon), \tag{2}$$

这里及以后相同指标表示求和.在方程式(2)中 T 为系统动能,$\tilde T$ 为嵌入约束式(1)后的动能,即

$$\tilde T(t, q_s, \dot q_\sigma) = T(t, q_s, \dot q_\sigma, \varphi_\beta(t, q_s, \dot q_\sigma)). \tag{3}$$

$\left(\frac{\partial \tilde T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)$ 和 $\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\right)$ 分别为 $\frac{\partial \tilde T}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}$ 和 $\frac{\partial T}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}$ 中用约束式(1)消去 $\dot q_{\varepsilon+\beta}$ 所得的表达式,$Q_s = Q_s(t, q_k, \dot q_k)$ 为广义力,$\tilde Q_\sigma$ 为考虑约束式(1)后的广义力,有

$$\tilde Q_\sigma = Q_\sigma + Q_{\varepsilon+\beta}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot q_\sigma}, \tag{4}$$

并且 $T_\sigma^{\varepsilon+\beta}$ 为与约束有关的量,

$$T_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot q_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}}\frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \dot q_\sigma}$$

$$(\gamma = 1,2,\cdots,g). \tag{5}$$

将广义力 Q_s 分为有势的 Q'_s 和非势的 Q''_s,即

$$Q_s = Q'_s + Q''_s,$$

$$Q'_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s},\ V = V(t, q_k), \tag{6}$$

则方程式(2)可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot q_\sigma} - \frac{\partial \tilde L}{\partial q_\sigma} - \left(\frac{\partial \tilde L}{\partial q_{\varepsilon+\beta}}\right)\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot q_\sigma} - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_{\varepsilon+\beta}}\right) T_\sigma^{\varepsilon+\beta} = \tilde Q''_\sigma$$

$$(\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon), \tag{7}$$

其中

$$\tilde L = \tilde T - V \tag{8}$$

为嵌入约束式(1)后的 Lagrange 函数.

---

* 国家自然科学基金(批准号:10272021)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20040007022)资助的课题.

† E-mail:meifx@bit.edu.cn

3. 系统的约化

广义 Chaplygin 系统的方程式(7)在一定条件下可约化为一个无约束系统的方程，有如下结果.

命题 对广义 Chaplygin 系统(1),(7)，如果满足条件

$$\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}} = 0, \frac{\partial Q_s}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}} = 0, \frac{\partial L}{\partial q_{\varepsilon+\gamma}} = 0 \ (\gamma = 1,2,\cdots,g), \tag{9}$$

则系统可约化为一个无约束系统.

证明 在条件式(9)下，约束方程式(1)成为

$$\dot{q}_{\varepsilon+\beta} = \varphi_\beta(t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma), \tag{10}$$

而方程式(7)成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_0} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right) + \tilde{Q}''_\sigma \quad (\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon). \tag{11}$$

由条件式(9)知，方程式(11)中仅含 $t, q_\sigma, \dot{q}_\sigma$ 和 $\ddot{q}_\sigma$，因此，方程式(11)可独立于约束式(1)来研究. 这样，系统(11)可当作一个无约束系统.

推论 1 在条件式(9)下，如果还满足条件

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial q_\sigma}\right) + \tilde{Q}''_\sigma = 0 \quad (\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon), \tag{12}$$

则广义 Chaplygin 方程式(11)成为 Lindelöf 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} = 0 \ (\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon). \tag{13}$$

这是一个特殊的约化结果.

推论 2 对于 Chaplygin 系统，由于

$$\varphi_\beta = B_{\varepsilon+\beta,\sigma}(q_v)\dot{q}_\sigma, \tag{14}$$

则系统可以约化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_\sigma} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_\sigma} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\right)\left(\frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,\sigma}}{\partial q_v} - \frac{\partial B_{\varepsilon+\beta,v}}{\partial q_\sigma}\right)\dot{q}_v \quad (\sigma = 1,2,\cdots,\varepsilon). \tag{15}$$

4. 算 例

例 1 Appell-Hamel 例.

Appell-Hamel 例的约束方程和 Lagrange 函数为[9]

$$\dot{z} = \frac{b}{a}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2},$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \tag{16}$$

令

$$q_1 = z, q_2 = y, q_3 = x, \tag{17}$$

则由(16)式知

$$\dot{q}_3 = \left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2\right)^{1/2},$$
$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\dot{q}_1^2 - mgq_1, \tag{18}$$

此时，命题的条件式(9)满足. 这个非完整可约化为一个无约束系统，其方程为

$$m\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\ddot{q}_1 + mg = m\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2\right)^{-1/2}\right\},$$
$$0 = m\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{-\dot{q}_2\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2\right)^{-1/2}\right\}. \tag{19}$$

在方程组(19)中已经不含 $q_3, \dot{q}_3$ 和 $\ddot{q}_3$，因此是约化了的方程组，由第二个方程立即得到积分

$$\left(\frac{a^2}{b^2}\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2\right)^{-1/2}\dot{q}_2 = \text{const.} \tag{20}$$

将(20)式代入方程组(19)的第一式而消去 $\dot{q}_2$，容易得到

$$m\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\ddot{q}_1 + mg = 0,$$

积分之，得

$$\frac{1}{2}m\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\dot{q}_1^2 + mgq_1 = \text{const.} \tag{21}$$

(21)式就是能量积分.

注意到，如果取 $q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$，则不易约化.

例 2 铅直匀质圆盘在重力作用下沿固定水平面的滚动问题.

取圆盘质心坐标 x, y, z 和 Euler 角 ψ, θ, φ 为广义坐标[9]. 当圆盘保持铅直时，有

$$z = a, \theta = \frac{\pi}{2},$$

其中 a 为圆盘半径. 非完整约束方程为

$$\dot{x} + a\dot{\varphi}\cos\psi = 0,$$
$$\dot{y} + a\dot{\varphi}\sin\psi = 0. \tag{22}$$

问题的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2, \tag{23}$$

其中 m 为圆盘的质量，J 和 I 为圆盘对质心轴的惯性矩.

令

$$q_1 = \psi,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = \theta,$$
$$q_4 = x,\ q_5 = y, \tag{24}$$

则有

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}J\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}(I + ma^2)\dot{q}_2^2. \tag{25}$$

容易计算出方程式(11)的右端为零，于是方程式(11)给出

$$J\ddot{q}_1 = 0,\ (I + ma^2)\ddot{q}_2 = 0. \tag{26}$$

(26)式实际上是 Lindelöf 方程了，由它容易求解运动. 文献[2,5]用几何方法也得到了(26)式.

5. 结　论

文献[5]中有一个结果："有对称性的一个非完整系统允许约化为一个无约束系统，但需附加一个非保守力."本文命题中方程式(11)的右端对应所谓"非保守力". 文献[5]是用几何方法研究线性定常非完整系统，而本文是用简单分析方法研究一般的非线性非完整系统.

本文对 Appell-Hamel 例用广义 Chaplygin 系统的约化直接得到的守恒量式(20)是一个好的结果. 对例 2 的非完整系统研究表明，Lindelöf 方程在某些情况下是可以用的.

[1] Bates L and Śniatycki J 1992 *Rep. Math. Phys.* **32** 99

[2] Koiller J 1992 *Arch Rational Mech. Anal.* **118** 113

[3] Bloch A M, Krishnaprasad P S, Marsden J E *et al* 1996 *Arch Rational Mech. Anal.* **136** 21

[4] Marsden J E and Ratiu T S 1999 *Introduction to Mechanics and Symmetry* (New York: Springer-Verlag) p379

[5] Cortés J 2002 *Geometric, Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems* (Berlin: Springer) p63

[6] Novoselov V V 1957 *Uchzap LGU Math. Nauk* **31** 84 (in Russian) [Новоселов В С 1957 *УчзапЛГУ Мат Наук* **31** 84]

[7] Niu Q P 1964 *Acta Mech. Sin.* **7** 139 (in Chinese) [牛青萍 1964 力学学报 **7** 139]

[8] Mei F X, Liu D and Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Inst. Tech. Press) p157 (in Chinese) [梅凤翔、刘端、罗勇 1991 高等分析力学（北京：北京理工大学出版社）第 157 页]

[9] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Inst. Tech. Press) p31—32, 91 (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础（北京：北京工业学院出版社）第 31—32，91 页]

Reduction of generalized Chaplygin systems*

Mei Feng-Xiang[1)†]　Xu Xue-Jun[1)2)]

[1)] (*Department of Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *China*)

[2)] (*Department of Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua* 321004, *China*)

(Received 16 November 2004; revised manuscript received 24 December 2004)

Abstract

A generalized Chaplygin system is written in the form of containing the Lagrangian of the system which admits a reduction to an unconstrained system under certain conditions. This paper presents these conditions and two examples are given to illustrate the application of the result.

Keywords: analytical mechanics, reduction, nonholonomic system, generalized Chaplygin system

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10272021) and the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education of China (Grant No. 20040007022).

† E-mail: meifx@bit.edu.cn