第 54 卷 第 9 期 2005 年 9 月
1000-3290/2005/54(09)/3987-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.54, No.9, September, 2005

相对转动动力学方程的稳定性及在一类黏弹性系数下的解*

王 坤†

(燕山大学理学院,秦皇岛 066004)

(2004 年 11 月 30 日收到;2004 年 12 月 29 日收到修改稿)

建立圆柱体任意两个截面间的一般黏弹性转动力学方程,讨论了相对转角的稳定性,由于此方程为变系数的二阶线性的非齐次常微分方程组,没有统一的求解方法.因此,针对其中的一类黏弹性系数求得其解.

关键词:变系数方程的解,相对转角,稳定性

PACC: 0340D, 0313, 0316

1. 引 言

1979 年,Bengtsson 和 Frauendorf 通过对 14 种核子自旋转速的测量,发现各核子的自旋转速均有一最大值,且各不相同[1].为了解释这一实验现象,1985 年,Carmeli 提出了转动相对论力学理论[2,3],1996 年罗绍凯建立了转动相对论分析力学理论[4,5].近年来相对论分析力学[6—8]和转动相对论分析力学[4,5,9—11]的研究发展了相对论力学.人们还研究了转动的非线性、变质量、Birkhoff 系统动力学及代数与几何结构等[12—24,26].文献[25,27]基于相对性原理,建立了圆柱体任意两个横截面间的相对转动动力学方程,并对系统进行了定量分析.

类似于文献[25]的推导过程,对于黏弹性材料的转动体,即当 $K(t)$ 为单调下降的函数,$\lim_{t\to\infty} K(t) = K_0 > 0$ 时,我们可以建立圆柱体任意两个截面间的相对转动的黏弹性动力学方程

$$\frac{1}{3}J\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6}J\ddot{\theta}_2 + C\dot{\theta}_1 - C\dot{\theta}_2 + K\theta_1 - K\theta_2 = T_1(t),$$
$$\frac{1}{6}J\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}J\ddot{\theta}_2 - C\dot{\theta}_1 + C\dot{\theta}_2 - K\theta_1 + K\theta_2 = T_2(t), \tag{1}$$

其中 J 为圆柱体任意两个横截面间的转动惯量,C 为阻尼系数,K 为黏弹性系数,θ_1 和 θ_2 分别为两个横截面的转角,T_1 和 T_2 分别是两个横截面处的外加力矩.

圆柱体一般通过两个端面建立与其他构件的联接关系,其力学、位移条件也是通过两个端面给定和需要测出的.建立圆柱体任意两个横截面间的相对转动动力学方程便得到了圆柱体相对转动的基本方程,它为进一步确定转动系统的动力学方程奠定基础.得到它的解析解是非常重要的.本文讨论了相对转角的稳定性,由于此方程为变系数的二阶线性非齐次常微分方程组,没有统一的求解方法.因此,我们针对

$$K(t) = \frac{1}{(C_0 t + C_1)^2} + \frac{3C^2}{J},$$

给出方程(1)的解.

2. 相对转角的稳定性

由于方程(1)为线性方程,只需讨论其所对应的齐次方程解的稳定性即可.(1)式的齐次方程为

$$\frac{1}{3}J\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6}J\ddot{\theta}_2 + C\dot{\theta}_1 - C\dot{\theta}_2 + K\theta_1 - K\theta_2 = 0,$$
$$\frac{1}{6}J\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}J\ddot{\theta}_2 - C\dot{\theta}_1 + C\dot{\theta}_2 - K\theta_1 + K\theta_2 = 0. \tag{2}$$

令 $x = \theta_1 + \theta_2$,$y = \theta_2 - \theta_1$,由(2)式得

* 国家自然科学基金(批准号:40374048)资助的课题.

† E-mail:wangkun8992@yahoo.com.cn

$$\ddot{x} = 0,$$
$$\ddot{y} + \frac{12C}{J}\dot{y} + \frac{12K}{J}y = 0. \tag{3}$$

由 $\ddot{x}=0$ 可得

$$x = a_0(t - t_0) + a_1, \tag{4}$$

其中 a_0, a_1 为常数.

再令

$$Y = (y\ \dot{y})^{\mathrm{T}},\ B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12K}{J} & \frac{12C}{J} \end{pmatrix},$$

则方程(3)的第二式可化为

$$\dot{Y} = B(t)Y. \tag{5}$$

令

$$B_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-12K_0}{J} & \frac{-12C}{J} \end{pmatrix},$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{12(K_0 - K)}{J} & 0 \end{pmatrix},$$

从而

$$\dot{Y} = B_0Y + B_1(t)Y. \tag{6}$$

由于 B_0 的特征值 $\lambda_{1,2} = -\frac{6C}{J} \pm \left(\frac{6}{J}\sqrt{\frac{K_0J}{J} - C^2}\right)\mathrm{i}$ 均有负实部,且 $\lim_{t\to\infty}\|B_1(t)\| = 0$,所以方程(6)的零解是渐近稳定的,即相对转角 $\theta_2 - \theta_1$ 与相对转速 $\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1$ 是渐近稳定的. 可设方程(5)的解的第一分量为

$$\theta_2 - \theta_1 = y(t, t_0, x^0). \tag{7}$$

由(4)和(7)式得

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{1}{2}[a_0(t - t_0) + a_1 - y(t, t_0, x^0)],\\ \theta_2 &= \frac{1}{2}[a_0(t - t_0) + a_1 + y(t, t_0, x^0)].\end{aligned} \tag{8}$$

由于 $y(t, t_0, x^0)$ 是稳定的,因此,由上式可知转角 θ_1 与 θ_2 均是不稳定的.

3. 圆柱体相对转动动力学方程组的降阶

将方程(1)写成矩阵形式,得

$$M\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + K\theta = T, \tag{9}$$

其中

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}J,\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}C,$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}K,\ T = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}.$$

增加

$$M\dot{\theta} - M\dot{\theta} = 0 \tag{10}$$

恒等式,将方程(9)降阶改写为

$$\hat{M}\dot{X} + \hat{K}X = \hat{T}, \tag{11}$$

其中 $X = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \end{pmatrix}$, $\hat{M} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & C \end{pmatrix}$, $\hat{K} = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$, $\hat{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}$ 为分块矩阵;令

$$A = -\hat{M}^{-1}\hat{K} = -\begin{pmatrix} -M^{-1}CM^{-1} & M^{-1} \\ M^{-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} M^{-1}C & M^{-1}K \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$A = -\begin{pmatrix} \frac{6C}{J} & -\frac{6C}{J} & \frac{6K}{J} & -\frac{6K}{J} \\ -\frac{6C}{J} & \frac{6C}{J} & -\frac{6K}{J} & \frac{6K}{J} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

再令

$$F(t) = \hat{M}^{-1}\hat{T}(t) = \begin{pmatrix} M^{-1}T \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{J}\begin{pmatrix} 2T_1 - T_2 \\ -T_1 + 2T_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

因而

$$\dot{X} = AX + F(t). \tag{14}$$

设方程(13)的初始条件为

$$X(t_0) = (\dot{\theta}_1(t_0)\ \dot{\theta}_2(t_0)\ \theta_1(t_0)\ \theta_2(t_0))' = \eta, \tag{15}$$

则得

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + F(t), \\ X(t_0) = \eta. \end{cases} \tag{16}$$

4. 一类黏弹性系数下的动力学方程的解

在方程(16)中,假定

$$K(t) = \frac{1}{(C_0t + C_1)^2} + \frac{3C^2}{J},$$

在此前提下,得到方程(16)的矩阵积分解.

A 的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\frac{6C}{J} + \left(\frac{6}{J}\sqrt{\frac{KJ}{3} - C^2}\right)\mathrm{i},$$

$$\lambda_4 = -\frac{6c}{J} - \left(\frac{6}{J}\sqrt{\frac{KJ}{3} - C^2}\right)\mathrm{i}, \tag{17}$$

解得属于 $\lambda_1 = \lambda_2$ 的特征向量为 α_1，属于 λ_3，λ_4 的特征向量为 α_3，α_4：

$$\alpha_1 = (0\ 0\ 1\ 1)', \alpha_3 = (-\lambda_3\ \lambda_3\ -1\ 1)',$$

$$\alpha_4 = (-\lambda_4\ \lambda_4\ -1\ 1)'. \tag{18}$$

由于矩阵 A 只有三个线性无关的特征向量，所以矩阵 A 不相似于对角矩阵. 采用 Jordan 块对角化，对于 A 存在可逆矩阵 P 使

$$P^{-1}AP = \hat{J}. \tag{19}$$

A 的 Jordan 标准型为

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

可逆变换矩阵

$$P = (\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda_3 & -\lambda_4 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

运用矩阵初等变换求得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & -\frac{1}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & -\frac{\lambda_4}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_4}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} \\ -\frac{1}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{1}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & \frac{\lambda_3}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} & -\frac{\lambda_3}{2(\lambda_4 - \lambda_3)} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

对于方程组(16)所对应的齐次方程

$$\dot{X} = AX, \tag{23}$$

作变换

$$X = PY, \tag{24}$$

代入(23)式则有

$$\dot{P}Y + P\dot{Y} = A(PY),$$

即

$$\dot{Y} = (P^{-1}AP - P^{-1}\dot{P})Y = (\hat{J} - P^{-1}\dot{P})Y. \tag{25}$$

令

$$B = \hat{J} - P^{-1}\dot{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 + \frac{4J\dot{K}}{KJ - 3C^2} & \frac{-4J\dot{K}}{KJ - 3C^2} \\ 0 & 0 & \frac{-4J\dot{K}}{KJ - 3C^2} & \lambda_4 + \frac{4J\dot{K}}{KJ - 3C^2} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

得

$$\dot{Y} = BY. \tag{27}$$

由于 $K(t) = \frac{1}{(C_0 t + C_1)^2} + \frac{3C^2}{J}$，经验证可知

$$B(t)\int_{t_0}^{t} B(s)\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} B(s)\mathrm{d}sB(t), \tag{28}$$

由此可得齐次方程(27)的通解为

$$Y = \mathrm{e}^{\left(\int_{t_0}^{t} B(s)\mathrm{d}s\right)} Q_0, \tag{29}$$

其中 Q_0 为任意常数向量. 将(29)式代入(24)式可得齐次线性方程组(22)的通解

$$X = P\mathrm{e}^{\left(\int_{t_0}^{t} B(s)\mathrm{d}s\right)} Q_0. \tag{30}$$

由于矩阵

$$P\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} B(s)\mathrm{d}s} = W(t) \tag{31}$$

可逆，可知 $W(t)$ 为齐次线性方程组(23)的基础解矩阵，由此可得方程组(16)满足初始条件的特解为

$$X(t) = W(t)W^{-1}(t_0)\eta + \int_{t_0}^{t} W(t)W^{-1}(s)F(s)\mathrm{d}s, \tag{32}$$

根据实际问题的需要，可以取矩阵级数

$$\mathrm{e}^{\left(\int_{t_0}^{t} B(s)\mathrm{d}s\right)}$$

的有限项，从而得到方程的近似解，以便于数值计算.

5. 求近似解方法举例

因为(31)式 $W(t)$ 为齐次线性方程组(23)的基础解矩阵，由此可以得到方程组(16)的通解

$$X(t) = W(t)\eta + \int_0^t W(t)W^{-1}(S)F(S)\mathrm{d}S, \tag{33}$$

其中 η 是任意常向量.

记 $B_1(t) = \int_0^t B(\tau)\mathrm{d}\tau$，将 $W(t)$ 写成矩阵级数

$$\begin{aligned}W(t) &= P\mathrm{e}^{\left(\int_{t_0}^{t} B(S)\mathrm{d}S\right)}\\ &= P\left[E + B_1(t) + \frac{B_1^2(t)}{2!} + \cdots + \frac{B_1^n(n)}{n!} + \cdots\right].\end{aligned} \tag{34}$$

同样

$$\begin{aligned}W^{-1}(S) &= P^{-1}\mathrm{e}^{\left(-\int_{t_0}^{t} B(S)\mathrm{d}S\right)}\\ &= P^{-1}\left[E - B_1(t) + \frac{B_1^2(S)}{2!} + \cdots\right.\\ &\quad \left. + (-1)^n\frac{B_1^n(S)}{n!} + \cdots\right].\end{aligned} \tag{35}$$

如取 $W(t)$ 与 $W^{-1}(S)$ 的前 n 项

$$W_n(t) = P\left[E + B_1(t) + \frac{B_1^2(t)}{2!} + \cdots + \frac{B_1^n(t)}{n!}\right], \tag{36}$$

$$\begin{aligned}W_n^{-1}(S) &= P^{-1}\left[E - B_1(S) + \frac{B_1^2(s)}{2!} + \cdots\right.\\ &\quad \left. + (-1)^n\frac{B_1^n(S)}{n!}\right],\end{aligned} \tag{37}$$

则可得(33)式的 n 次近似值

$$X_n(t) = W_n(t)\eta + \int_0^t W_n(t)W_n^{-1}(S)F(S)\mathrm{d}S. \tag{38}$$

6. 结　　论

本文对圆柱体任意两个截面间的一般黏弹性转动力学方程解的稳定性进行讨论，得到了相对转角 $y = \theta_2 - \theta_1$ 与相对转速 $\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1$ 的渐近稳定性，同时，也得到了转角 θ_1 与 θ_2 的不稳定性 ;另外，我们给出一类黏弹性转动力学方程的矩阵积分解.

[1] Bengtsson R，Frauendorf S 1979 *Nuclear Physics* A**327** 139

[2] Carmeli M 1985 *Foundations of Physics* **15** 175

[3] Carmeli M 1986 *International Journal of Theoretical Physics* **15** 89

[4] Luo S K 1996，*Journal of Beijing Institute of Technology* **16**(S1) 154 (in Chinese)［罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154］

[5] Luo S K 1998 *Applied Mathematics and Mechanics* **19** 45

[6] Luo S K 1987 *Tech. Mater. Commun.* **5** 31 (in Chinese)［罗绍凯 1987 教材通讯 **5** 31］

[7] Luo S K 1991 *Shanghai J. Mech.* **12** 67 (in Chinese)［罗绍凯 1991 上海力学 **12** 67］

[8] Luo S K 1996 *Applied Mathematics and Mechanics* **17** 683

[9] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1043(in Chinese)［贾利群 2003 物理学报 **52** 1043］

[10] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese)［罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712］

[11] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese)［罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416］

[12] Luo S K，Fu J L and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese)［罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383］

[13] Luo S K，Guo Y X，Chen X W and Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese)［罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049］

[14] Luo S K，Guo Y X and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese)［罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053］

[15] Luo S K，Chen X W and Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[16] Zhang Y L，Qiao Y F and Ma Y P 1999 *Acta Mechanica Solida Sinica* **20** 356 (in Chinese)［张耀良、乔永芬、马云鹏 1999 固体力学学报 **20** 356］

[17] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese)［方建会 2000 物理学报 **49** 1028］

[18] Fu J L，Chen X W and Luo S K 1999 *Applied Mathematics and Mechanics* **20** 1175 (in Chinese)［傅景礼、陈向炜、罗绍凯 1999 应用数学和力学 **20** 1175］

[19] Fang J H and Zhao S Q 2001 *Acta phys. Sin.* **50** 390 (in Chinese)［方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390］

[20] Qiao Y F，Li R J and Meng J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1000 (in Chinese)［乔永芬，李仁杰，孟　军 2001 物理学报 **50** 1000］

[21] Fu J L，Chen L Q，Xue Y and Luo S K 2000 *Acta Phys. Sin.* **50** 2683 (in Chinese)［傅景礼、陈立群、薛　纭、罗绍凯 2002 物理学报 **51** 2683］

[22] Fu J L and Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023 (in Chinese)［傅景礼、王新民 2002 物理学报 **49** 1023

[23] Fu J L，Chen L Q，Luo S K，Chen X W and Wang X M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese)［傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜、王新民 2001 物理学报 **50** 2289］

[24] Ju J L, Chen L Q and Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]

[25] Dong Q L and Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]

[26] Ge T S(T.S.Ke) 1999 *Physica* **28** 529 (in Chinese) [葛庭燧 1999 物理 **28** 529]

[27] Dong Q L, Wang K, Zhang C X and Liu B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 [董全林、王 坤、张春熹、刘 彬 2004 物理学报 **53** 337]

Steadiness of relatively rotation dynamics equation and it 's solution for a kind stickiness flexibility coefficient *

Wang Kun†

(*College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao* 066004, *China*)

(Received 30 November 2004; revised manuscript received 29 December 2004)

Abstract

Establishing a kind stickiness flexibility rotation dynamics equation of the cylinder between random two cross sections, discussing steadiness of relatively rotation angle. Gaining solution for a kind stickiness flexibility coefficient because the equation is non-homogeneous ordinary differential equation group of order 2 linear of variable coefficient, and there isn 't unified solution to this equation group.

Keywords: solution of variable coefficient, relatively angle of rotation, steadiness

PACC: 0340D, 0313, 0316

* Project Supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40374048).

† E-mail: wangkun8992@yahoo.com.cn