

# 赤道东太平洋 SST 的海-气振子模型<sup>\*</sup>

莫嘉琪<sup>1)2)3)</sup> 王 辉<sup>4)</sup> 林万涛<sup>5)</sup> 林一骅<sup>5)</sup>

1) 安徽师范大学 芜湖 241000)

2) 上海高校计算科学 E-研究院, 上海交通大学研究所, 上海 200240)

3) 湖州师范学院 湖州 313000)

4) 中国气象科学研究院, 北京 100081)

5) LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

(2005 年 4 月 20 日收到, 2005 年 6 月 16 日收到修改稿)

研究了一个海-气振子的非线性耦合系统的模型. 利用变分迭代原理, 首先构造了相应的一组泛函. 其次选取其 Lagrange 乘子. 再用广义变分迭代方法得到了海-气振子模型一组解的近似序列.

关键词: 海-气振子, 非线性, 耦合系统, 厄尔尼诺模型

PACC: 0230, 0200

## 1. 引 言

海洋和大气之间的交互作用影响着大时间尺度范围气候的波动. 这种交互作用的研究已经集中在厄尔尼诺-南方涛动(ENSO)现象上. 实践表明, 它每隔 3 到 4 年周期地出现, 并主要发生在热带太平洋区域<sup>[1,2]</sup>. 赤道太平洋海表温度(SST)是对全球气候, 例如 ENSO 现象的年际变化中, 十分重要的量. 另外, 对 ENSO 赤道东太平洋 SST 变异(SSTA<sub>s</sub>)也涉及到 ENSO 的波动振幅和频率<sup>[3]</sup>. 目前发生在赤道太平洋的年代际 SSTA<sub>s</sub> 的原因还不十分清楚. 其中由于热带海-气现象的非线性是一个重要因素. 它反应出年代际和更长时间尺度的 ENSO 的混沌机理<sup>[4]</sup>. 关于 ENSO 目前还是研究的热点<sup>[5-16]</sup>. 莫嘉琪、林万涛等也研究了一类大气物理、海洋气候、动力系统等领域中的问题<sup>[17-31]</sup>. 本文研究一个太平洋海洋气候典型循环机理的模型.

海-气耦合相互作用本身是一个非线性的物理过程, 因此只用线性模型去研究它的振荡内在机理是不够理想的. 本文是对海-气耦合相互作用建立在一个自激振荡的非线性模型上, 将赤道东太平洋的一个地区范围内的海洋混合层和大气对流层作为两

个相互耦合作用的系统. 模型中只考虑了海洋中的冷水涌引起的热力耗散和大气瞬时涡旋对热量的扩散作用, 以及太阳对系统的辐射. 本文是根据一些气候模式中的经验数据, 建立的一个海-气耦合非线性系统进行探讨.

近来, 许多学者研究了非线性问题的近似理论<sup>[32-42]</sup>. 近似方法不断被发展和优化, 包括平均法, 边界层法, 匹配渐近展开法和多重尺度法等等. 本文是利用一个简单而有效的广义变分迭代理论来进一步研究一个海-气振子模型.

## 2. 赤道东太平洋温度异常模型

我们研究赤道东太平洋在 14°W—85°W, 10°S—10°N 范围内 ENSO 振子模型下的气候异常. 假设不考虑在西太平洋中的信风对东太平洋相应的区域内的影响. 可以得到耦合系统的模型为<sup>[4,10]</sup>

$$\frac{dT_a}{dt} = a_{11} T_a + a_{12} T_s + b_{11} T_a T_s + b_{12} T_s^2,$$

$$\frac{dT_s}{dt} = a_{21} T_a + a_{22} T_s + b_{21} T_a T_s + b_{22} T_s^2,$$

其中  $T_a$  为空气的局部平均温度异常,  $T_s$  为海表的局部平均温度异常. 系数  $a_{ij}$  和  $b_{ij}$  为二组常数, 其物

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 90111011 和 10471039) 国家重点基础研究发展计划项目(批准号: 2003CB415101-03 和 2004CB418304) 中国科学院创新方向性项目(批准号: KZCX3-SW-221) 上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号: N. E03004) 和浙江省自然科学基金(批准号: Y604127) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: mojiqj@mail.ahnu.edu.cn

理意义见文献 [10].

耦合模型是一个多参数作用的复杂系统. 它在所属的东太平洋地区范围内, 不难通过相应的变换, 将其归化为如下的系统<sup>[43]</sup>:

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + bx + mxy + lx^2, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x(1 - ax - y), \quad (2)$$

其中  $x, y$  分别表示描述气、海平均温度异常的变量,  $\tau$  为与时间变量  $t$  描述的变量, 参数  $m, l, a, b$  由参数  $a_{ij}, b_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) 决定, 其结构表示式从略.

由实测数据知, 模型系统 (1), (2) 的系数在上述赤道东太平洋的所属范围内, 满足  $(1 + l)^2 + 4ma < 0, m > 0$  ( $a - b - m)^2 + 4ma < 0, m > 0, 0 < b \ll 1$ . 故由微分方程定性理论得知<sup>[43]</sup>, 二次系统 (1), (2) 在平衡点  $(0, 0)$  为不稳定的焦点, 在它附近至少有一个包围平衡点  $(0, 0)$  的极限环. 于是需要求得非线性系统 (1), (2) 的轨线由平衡点附近出发, 趋向远离平衡点而接近极限环的状态. 为此, 我们将利用变分原理<sup>[44]</sup>, 来求出对应温度异常变量的近似表示式.

### 3. 变分迭代理论和模型的近似解

为了得到模型 (1), (2) 的近似解, 引入一组泛函  $F_i[x, y]$  ( $i = 1, 2$ ):

$$F_1[x, y] = x - \int_0^\tau \lambda_1 \left[ \frac{dx}{d\sigma} + \bar{y} - bx - m\bar{x}\bar{y} - l\bar{x}^2 \right] d\sigma, \quad (3)$$

$$F_2[x, y] = y - \int_0^\tau \lambda_2 \left[ \frac{dy}{d\sigma} - \bar{x} + \bar{x}\bar{y} + a\bar{x}^2 \right] d\sigma, \quad (4)$$

其中  $\bar{x}, \bar{y}$  分别为  $x, y$  的限制变量<sup>[44]</sup>,  $\lambda_1, \lambda_2$  为对应的 Lagrange 乘子.

泛函 (3), (4) 的变分  $\delta F_i$  ( $i = 1, 2$ ) 为

$$\delta F_1 = \delta x - (\lambda_1 \delta x) |_{\sigma=\tau} + \int_0^\tau \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial \sigma} - b\lambda_1 \right) \delta x d\sigma, \quad (5)$$

$$\delta F_2 = \delta y - (\lambda_2 \delta y) |_{\sigma=\tau} + \int_0^\tau \frac{\partial \lambda_2}{\partial \sigma} \delta x d\sigma. \quad (6)$$

现取  $\delta F_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ). 于是

$$\frac{d\lambda_1}{d\sigma} = b\lambda_1, \quad \frac{d\lambda_2}{d\sigma} = 0 \quad (\sigma > \tau),$$

及

$$\lambda_i(\tau) = 1 \quad (i = 1, 2).$$

这时有

$$\lambda_1 = \exp(b\sigma), \quad \lambda_2 = 1. \quad (7)$$

由 (3), (4), (7) 式, 我们构造如下广义变分迭代:

$$x_{n+1} = x_n - \int_0^\tau \exp(\epsilon\sigma) \left[ \frac{dx_n}{d\sigma} + y_n - bx_n - mx_n y_n - lx_n^2 \right] d\sigma, \quad (8)$$

$$y_{n+1} = y_n - \int_0^\tau \left[ \frac{dy_n}{d\sigma} - x_n + x_n y_n + ax_n^2 \right] d\sigma. \quad (9)$$

由迭代关系式 (8), (9), 可得到序列  $\{x_n, y_n\}$ . 设  $x(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\tau)$ ,  $y(\tau) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(\tau)$ . 这时  $(x(\tau), y(\tau))$  就是海-气模型 (1), (2) 的一组解.

对应于海-气模型 (1), (2) 的线性系统为

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + bx, \quad (10)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = x. \quad (11)$$

显然系统 (10), (11) 的解  $(x_0, y_0)$  为

$$x_0(\tau) = \lambda_1 C_1 \exp(\lambda_1 \tau) + \lambda_2 C_2 \exp(\lambda_2 \tau), \quad (12)$$

$$y_0(\tau) = C_1 \exp(\lambda_1 \tau) + C_2 \exp(\lambda_2 \tau), \quad (13)$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{b}{2} + \sqrt{1 - (b/2)^2} i,$$

$$\lambda_2 = \frac{b}{2} - \sqrt{1 - (b/2)^2} i,$$

而  $C_1, C_2$  为任意常数.

选取问题 (10), (11) 的一组解 (12), (13) 为 (8), (9) 式的初始迭代. 将其代入 (8), (9) 式, 可得迭代的一次近似

$$x_1(\tau) = (\lambda_1 C_1 \exp(\lambda_1 \tau) + \lambda_2 C_2 \exp(\lambda_2 \tau)) - \frac{(m + l\lambda_1)C_1^2}{2\lambda_1 + b} [\exp(2\lambda_1 \tau) - 1] - \frac{(m + l\lambda_2)C_2^2}{2\lambda_2 + b} [\exp(2\lambda_2 \tau) - 1] + \frac{(m\epsilon + l)C_1 C_2}{2b} [\exp(2b\tau) - 1],$$

$$y_1(\tau) = (C_1 \exp(\lambda_1 \tau) + C_2 \exp(\lambda_2 \tau)) - \frac{(1 + a\lambda_1)C_1^2}{2\lambda_1 + b} [\exp(2\lambda_1 \tau) - 1] - \frac{(1 + a\lambda_2)C_2^2}{2\lambda_2 + b} [\exp(2\lambda_2 \tau) - 1] - \frac{(2a + b)C_1 C_2}{b} [\exp(b\tau) - 1].$$

用同样的方法, 能得到模型系统 (1), (2) 的更高阶的近似.

## 4. 讨 论

1. 由模型 (1), (2) 及泛函 (3), (4) 的构造, 可以证明, 用广义变分迭代 (8), (9) 得到的序列  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  在所研究的范围内均是一致收敛的. 因此极限函数就是系统 (1), (2) 的一组解. 同时由于采用了变分原理, 合理地选定了 Lagrange 乘子  $\lambda_1, \lambda_2$ , 这保证了相应序列的收敛速度.

2. 用广义变分迭代方法求得模型 (1), (2) 的近似解的精度速度, 还在于初始近似的选取. 本文所选的初始近似, 是模型在线性状态下的解. 这也是十分自然的. 以后的各次近似解是在这个基础上向模

型精确解逼近, 这更接近模型的真实现象. 所以所得的结果更加实用、简捷.

3. 大气物理是一个很复杂的、难以驾驭的自然现象. 因此我们需要把它简化为海-气振子的基本模型. 并且用近似方法求出其解. 广义变分迭代方法就是一个简单而有效的方法.

4. 广义变分迭代方法是一个近似的解析方法, 它不同于一般的数值方法. 用广义变分迭代方法得到的解的表示式能够继续进行解析运算. 于是, 由相应的近似解的表示式, 能够进一步研究在赤道东太平洋的温度异常和信风强度异常的各种定性和定量方面的性态.

- [ 1 ] McPhaden M J, Zhang D 2002 *Nature* **415** 603
- [ 2 ] Gu D F, Philander S G H 1997 *Science* **275** 805
- [ 3 ] An S I, Wang B 2000 *J. Climate* **13** 2044
- [ 4 ] Nonaka M, Xie S P, McCreary J P 2001 *Geophys. Res. Lett.* **20** 1116
- [ 5 ] Wang L S, Xu D Y 2003 *Sci. Chin. E* **32** 488 (in Chinese) [ 王林山、徐道义 2003 中国科学 E **32** 488 ]
- [ 6 ] Wu J F, Ye W H, Zhang W Y et al 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1688 (in Chinese) [ 吴俊峰、叶文华、张维岩等 2003 物理学报 **52** 1688 ]
- [ 7 ] Pan L X, Yan J R, Zhou G H 2001 *Chin. Phys.* **10** 594
- [ 8 ] Yan J R 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 625
- [ 9 ] Fan E G, Zhang H C 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1245 (in Chinese) [ 范恩贵、张鸿庆 1997 物理学报 **46** 1245 ]
- [ 10 ] Huang S X, Hang J, Han W 2004 *Appl. Math. Mech.* **25** 518
- [ 11 ] Shukla J 1981 *J. Atmos. Sci.* **38** 2547
- [ 12 ] Liu S K, Fu Z T, Liu S D et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [ 刘式适、傅遵涛、刘式达等 2002 物理学报 **51** 10 ]
- [ 13 ] Pan L X, Zuo W M, Yan J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1 (in Chinese) [ 潘留仙、左伟明、颜家壬等 2005 物理学报 **54** 1 ]
- [ 14 ] Pan L X, Liu J L, Li S S et al 2002 *Sci. Chin. A* **32** 556 (in Chinese) [ 潘留仙、刘金龙、李树深等 2002 中国科学 **32A** 556 ]
- [ 15 ] Feng G L, Dong W J, Jia X J et al 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [ 封国林、董文杰、贾晓静等 2002 物理学报 **51** 1181 ]
- [ 16 ] Feng G L, Dai X G, Wang A H et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [ 封国林、戴新刚、王爱慧等 2001 物理学报 **50** 606 ]
- [ 17 ] Lin Y H, Ceng Q C 1999 *Prog. Natu. Sci.* **9** 211
- [ 18 ] Lin Y H, Ji Z Z, Zeng Q C 1999 *Prog. Natu. Sci.* **9** 532
- [ 19 ] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Adv. Atmos. Sci.* **19** 699
- [ 20 ] Lin W T, Ji Z Z, Wang B 2002 *Prog. Natu. Sci.* **12** 102 (in Chinese) [ 林万涛、季仲贞、王斌 2002 自然科学进展 **12** 102 ]
- [ 21 ] Lin W T, Mo J Q 2004 *Chin. Sci. Bull.* **48** supp II 5
- [ 22 ] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Natu. Sci.* **13** 768
- [ 23 ] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Natu. Sci.* **14** 550
- [ 24 ] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [ 莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996 ]
- [ 25 ] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3245 (in Chinese) [ 莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 3245 ]
- [ 26 ] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3993 (in Chinese) [ 莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 3993 ]
- [ 27 ] Mo J Q, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [ 莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 1081 ]
- [ 28 ] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3967 (in Chinese) [ 莫嘉琪、林万涛、王辉 2005 物理学报 **54** 3967 ]
- [ 29 ] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3971 (in Chinese) [ 莫嘉琪、林一骅、林万涛 2005 物理学报 **54** 3971 ]
- [ 30 ] Mo J Q, Lin W T 2005 *Chin. Phys.* **14** 875
- [ 31 ] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Natu. Sci.* **14** 1126
- [ 32 ] Pan L X, Yan J R, Zhou C H 2001 *Chin. Phys.* **10** 594
- [ 33 ] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [ 34 ] Huang L, Bao G W, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2457 (in Chinese) [ 黄磊、包光伟、刘延柱 2005 物理学报 **53** 2457 ]
- [ 35 ] Han H L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4061 (in Chinese) [ 韩祥临 2004 物理学报 **53** 4061 ]
- [ 36 ] Ouyang C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1902 (in Chinese) [ 欧阳成 2004 物理学报 **53** 1902 ]
- [ 37 ] Han H L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2590 (in Chinese) [ 韩祥临 2004 物理学报 **54** 2590 ]
- [ 38 ] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [ 吴钦宽 2004 物理学报 **54** 2510 ]
- [ 39 ] Adams K L, King J R, Tew R H 2003 *J. Engineering Math.* **45** 197
- [ 40 ] Hwangm S 2004 *J. Diff. Eqns.* **200** 191

- [ 41 ] Chen X F 2004 *J. Diff. Eqns.* **206** 399 极限环理论(上海 :上海科技出版社 )
- [ 42 ] Doelman A , Iron D , Nishiura Y 2004 *SIAM J. Math. Anal.* **35** 1420 [ 44 ] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* ( Zhengzhou : Henan Science and Technology Publisher )( in Chinese )[ 何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法( 郑州 :河南科学技术出版社 )
- [ 43 ] Ye Y Q 1984 *Theory of Limit Cycle* ( Shanghai : Shanghai Science and Technology Publishing Company )( in Chinese )[ 叶彦谦 1984

## Sea-air oscillator model for equatorial eastern Pacific SST<sup>\*</sup>

Mo Jia-Qi<sup>1 2 B)</sup> Wang Hui<sup>4)</sup> Lin Wan-Tao<sup>5)</sup> Lin Yi-Hua<sup>5)</sup>

1  $\checkmark$  *Department of Mathematics , Anhui Normal University , Wuhu 241000 , China )*

2  $\checkmark$  *Division of Computational Science , E-Institute of Shanghai Universities , at Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200240 , China )*

3  $\checkmark$  *Department of Mathematics , Huzhou Teacher College , Huzhou 313000 , China )*

4  $\checkmark$  *Chinese Academy of Meteorological Sciences , Beijing 100081 , China )*

5  $\checkmark$  *LASG , Institute of Atmospheric Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100029 , China )*

( Received 20 April 2005 ; revised manuscript received 16 June 2005 )

### Abstract

A sea-air oscillator model of the nonlinear coupling system is studied. Using the variational iteration principle ,a series of corresponding functional is constructed. Then the Lagrange operators are selected. Finally ,using the generalized variational iteration method ,the approximate sequences of a series of solutions for the sea-air oscillator model are obtained.

**Keywords :** sea-air oscillator , nonlinear , coupling system , El Niño model

**PACC :** 0230 , 0200

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 90111011 and 10471039 ) , the National Key Project for Basics Research ( Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304 ) , and the Key Project of the Chinese Academy of Sciences ( Grant No. KZCX3-SW-221 ) , by the E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission ( Grant No. N. E03004 ) and the Natural Science Foundation of Zhejiang , China ( Grant No. Y604127 ) .