

复合混沌系统的非线性动力学行为分析*

于津江^{1)†} 曹鹤飞¹⁾ 许海波²⁾ 徐 权³⁾

1) (石家庄学院物理研究所, 石家庄 050035)

2) (北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

3) (大庆高等师范专科学校物理系, 大庆市 163712)

(2004 年 11 月 30 日收到, 2005 年 6 月 13 日收到修改稿)

从理论上研究了由几个混沌系统复合而构成的新系统的非线性动力学特性和分岔序列. 计算机仿真与理论计算结果表明, 复合混沌系统具有混沌吸引子和对初值敏感性, 并且有缺边现象产生.

关键词: 复合系统, 吸引子, 分岔序列

PACC: 0545

1. 引 言

自从 Li 和 Yorke 在 1973 年使用混沌(chaos)一词来研究混沌的特性, 从而拉开了混沌研究的序幕^[1]. 30 年来, 混沌已经成为一项热门话题. 非线性动力学已经成为内容极为丰富, 应用范围极其广泛的研究领域. 混沌现象是发生在确定性系统中的一种不确定行为, 具体表现在混沌系统具有分维吸引子和对初值敏感性, 由于非线性动力学系统的运动状态失稳而出现分岔以至于混沌状态是非常普遍的现象^[2-4].

文献 5] 提出了混沌可加性的概念, 从理论上证明两个或两个以上混沌序列的可加性, 计算机模拟表明新的混沌系统动力学行为具有分维吸引子和对初值敏感性. 本文在文献 5] 的基础上, 对复合系统的动力学行为进行了更深入地研究, 主要对两个相同或不同混沌系统复合构成的系统进行分析, 从中得到了许多不同组合的复合混沌系统特性、分岔序列和 Lyapunov 指数谱^[5-7].

混沌现象在许多情况下, 并不是一个简单的形式. 它是由几个相同的或不同结构的混沌系统复合而成的, 本文就这一类混沌系统的特点进行了分析, 通过改变系统参数, 复合系统的混沌行为和分岔序列出现了不同的现象, 并在 Lyapunov 指数谱上体现

出来, 得到了许多新的复合系统的混沌行为变化规律.

2. 复合混沌系统的动力学模型

根据文献 5] 可知, 若有 M 个混沌系统, 其动力学差分方程为

$$x_{n+1}^j = f(x_n^j, \mu^j), j = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

首先考虑两个混沌系统($M = 2$), 则(1)式可以改写为

$$\begin{aligned} x_{n+1}^1 &= f(x_n^1, \mu_A), \\ x_{n+1}^2 &= f(x_n^2, \mu_B). \end{aligned} \quad (2)$$

复合构成的新系统的基本形式为

$$x_{n+1} = f[f(x_n, \mu_B), \mu_A], \quad (3)$$

其中设 $\mu_A = m\mu_B$, 如果 $m = 1$ 时, 这时两个混沌系统的系统参数相等, 完全相同结构的复合形式混沌系统

$$x_{n+1} = f[f(x_n, \mu), \mu], \quad (4)$$

在 $m = 1$ 时, 如果两混沌系统为不同结构, 则复合结构的新混沌系统可写为

$$x_{n+1} = f[g(x_n, \mu), \mu]. \quad (5)$$

二维混沌系统的两个变量方向上分别有两种复合形式, 在 x 变量方向上

$$\begin{cases} x_{n+1} = f[h(x_n, \mu), y_n, a, b], \\ y_{n+1} = g[h(x_n, \mu), y_n, a, b]; \end{cases} \quad (6)$$

* 国家自然科学基金(批准号 10147201, 10247003)资助的课题.

† E-mail: yujinjiang6060@Yahoo.com.cn

y 变量方向上

$$\begin{cases} x_{n+1} = f[x_n, h(y_n, \mu), a, b], \\ y_{n+1} = g[x_n, h(y_n, \mu), a, b]. \end{cases} \quad (7)$$

以上给出了两种一维混沌系统及其两种一维和二维混沌系统的复合构成方式. 由于混沌系统的复合形式很多, 尤其是高维混沌系统和不同结构混沌系统的多重复合更为复杂.

各种复合系统的分岔序列和简单混沌系统的分岔序列有相似的规律, 可以使用不动点的确定方法和

$$|F^n(x)| = 1 \quad (8)$$

得出具体的分岔序列.

从(8)式可以看出复合系统的系统参数 μ 的临界值有收敛趋势, 并且最后收敛到一个极值 μ_∞ . 下面具体讨论一维 logistic 映射和二维 Henon 映射组合的复合系统分岔序列基本特点.

3. 计算机模拟结果

由于多个混沌系统所构成的复合系统有很多种类. 为了研究方便, 下面只讨论两个简单系统复合为新系统的动力学特性. 对于两个简单系统而言, 取不同的系统参数可以得到不同的动力学行为. 并以简单系统的特征为基础演变出许多新的非线性动力学规律.

3.1. 相同结构的混沌系统复合形式及分岔序列

考虑两个相同结构的一维 logistic 映射, 由于其结构相同, 得到的复合表达方式为

$$x_{n+1} = \mu^2 x_n [1 - (1 + \mu)x_n + 2\mu x_n^2 - \mu x_n^3]. \quad (9)$$

选取系统参数 $2.8 < \mu < 4$, 对复合系统(9)进行计算机仿真计算, 从图1中可以看出整个混沌系统的分岔情况, 它具有与简单系统相似的分岔序列, 但是在简单系统的第一分岔点, 复合系统不出现分岔而是形成一个拐点, 第一分岔点出现在简单系统的第二分岔点的地方, 整个复合系统呈现出缺边的现象.

对于3次复合混沌系统的分岔情况, 分岔序列基本上与简单混沌系统相同, 不出现缺边现象, 这里不再作重复研究. 对于4次复合的混沌系统缺边现象再次出现, 在第一和第二分岔点均不出现分岔, 而是同时出现拐点, 出现交替缺边现象, 如图2所示. 由此可以看出, 对于偶次复合的混沌系统, 均有缺边现象出现, 并呈现上下交替缺边的规律, 最后在

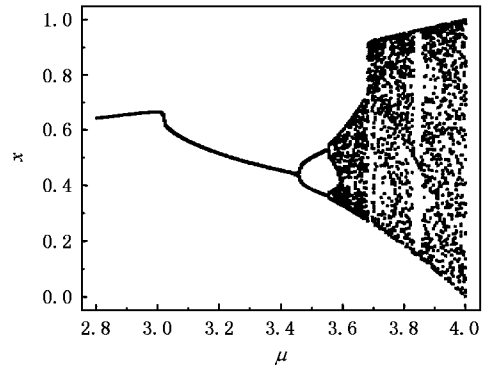


图1 2次复合混沌系统倍周期分岔和混沌

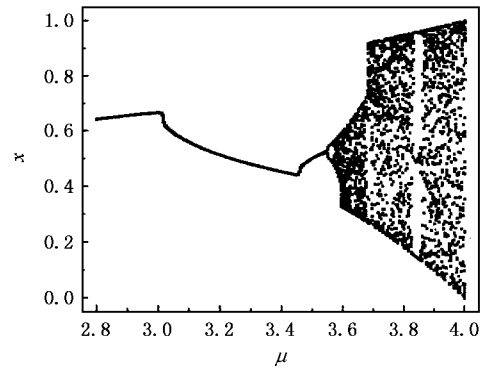


图2 4次复合混沌系统倍周期分岔和混沌

$\mu = 3.676$ 处恢复系统的原混沌状态. 这里还可由分岔和临界点的计算方法, 得到相应的复合混沌系统的分岔序列.

偶次缺边现象是复合混沌系统的一种动力学行为. 因为复合混沌系统(9)的系统参数 $\mu < 3$ 时, 复合混沌系统(9)的不动点为一稳定不动点. 如图3所示, 由迭代关系式(9)进行数值迭代, 同时选取初始值为 $x_0 = 0.4$ 时, 在迭代次数为无穷大时, 系统的迭代过程是由 a 方向逐步趋向于稳定不动点 x_s , 最后 $x_\infty = x_s$. 但是由于仿真模拟的运算次数为一有限数值(如 $n = 20000$ 次), 经有限次运算后, 迭代运算的数值在一个小于稳定不动点, 并非常靠近稳定不动点的地方. 当系统参数的变化超过临界状态时 ($\mu > 3$) 系统原有的稳定不动点变为3个不动点, 其中原有的那个不动点 x_s 变为不稳定, 新出现的另外两个 x_a 和 x_b 为稳定不动点. 这时处在不动点 x_s 附近系统值将改变迭代方向, 离开不稳定不动点 x_s , 而沿着 b 方向逐步靠近稳定不动点 x_a , 这时分岔之后不出现另一大于 x_s 的边, 呈现缺边现象. 如果

选取初始值为 $x_0 = 0.8$ 时,情况正好相反.对于 4 次复合系统的不稳定不动点出现在小于 4 周期分岔点,所以在不稳定不动点的下面缺少一条边,系统数值在大于不稳定不动点的一边迭代,缺少小于不稳定不动点的一边.最后随着偶次复合次数的增加而出现上下交替缺边现象.

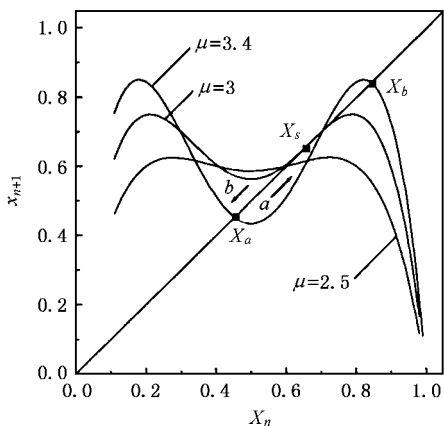


图 3 系统(9)的迭代示意图

在混沌区内,如果把参数 μ 放大,可看到混沌区内的详细结构.复合系统的混沌区同样存在着许多窗口,这与一维 logistic 映射的规律相同,存在着 $3P, 5P, 7P, \dots$ 周期窗口.图 4 是在 $3P$ 窗口处的精细结构,它也包含有从左到右的倍周期分岔,并在第一分岔点也不出现分岔,而是形成一个拐点.第一分岔点仍然出现在简单系统 $3P$ 窗口的第二分岔点的地方,缺边现象在复合系统混沌区的各个窗口依然出现.由此可见,复合系统的混沌带中存在着无穷层次的自相似结构.

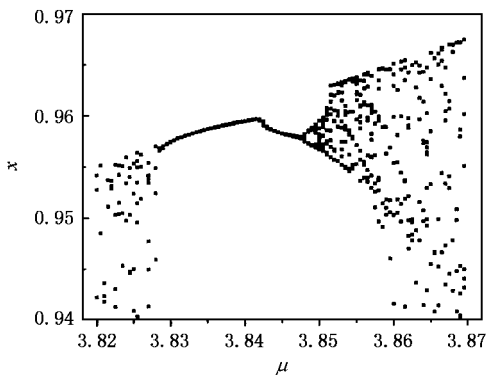


图 4 2 次复合混沌系统 $3P$ 窗口精细结构

对不同结构的一维混沌系统复合而成的系统,其分岔序列与上述讨论的情况基本相同,仍然出现

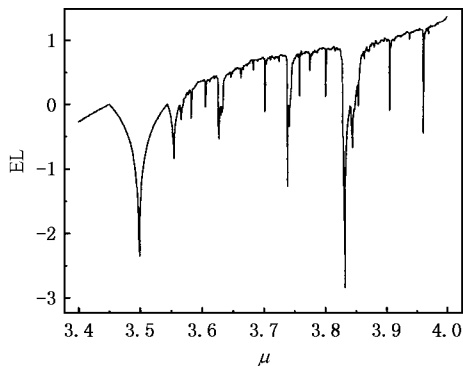


图 5 相同结构复合混沌系统 Lyapunov 指数谱

交替缺边现象,并呈现上下交替缺边的规律,最后在 $\mu = 3.676$ 处回复系统的原混沌状态.图 5 是复合混沌系统(9)所形成的 Lyapunov 指数谱.实验表明 Lyapunov 指数谱的性质与复合次数无关.

3.2. 一维映射与二维映射的复合的三种形式

考虑一维 logistic 映射与二维 Henon 映射的基本形式

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n), \quad (10)$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \quad (11)$$

由(6)式作为基本复合形式,可以得到如下的复合混沌系统:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a\mu^2 x_n^2(1 - x_n)^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \quad (12)$$

在选取 Henon 映射的系统参数 $a = 1, b = 0.125$ 时,选取 logistic 映射的系统参数 μ 在 $[1.7, 3.5]$ 之间,经过 10000 次迭代运算,去掉与初值有关的 200 迭代,可得到图 6 和图 7 所示的复合系统(12)的分岔图与吸引子.在图中清晰地显示出复合系统(12)

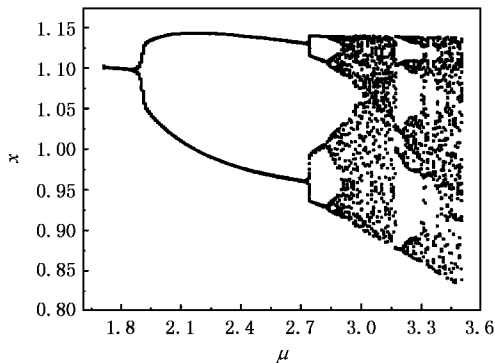


图 6 复合系统(12)的分岔图

的分岔结构.复合系统(12)也具有简单系统的分岔序列和混沌行为,并在混沌区内呈现出混沌窗口.图8是复合系统(12)的5P窗口的精细结构,在5P窗口中发现当 $\mu = 3.35$ 时5P窗口重复出现.图9为(12)式的 Lyapunov 指数.

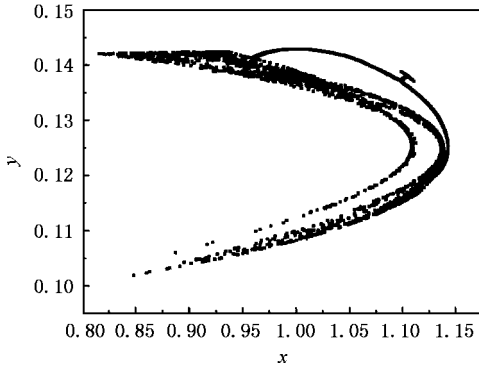


图7 复合系统(12)的吸引子

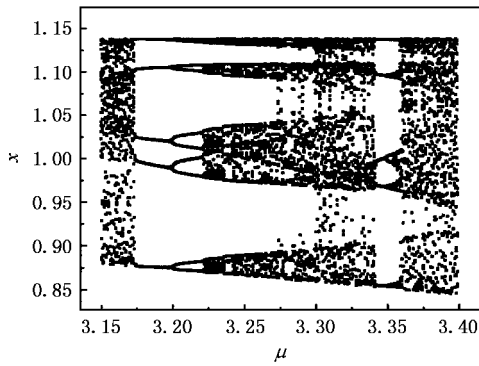


图8 复合系统(12)的5P窗口精细结构

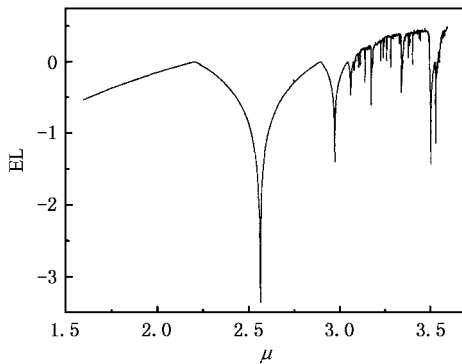


图9 复合系统(12)的 Lyapunov 指数谱

由复合形式(6)可以得到一维 logistic 映射与二维 Henon 映射的另一种复合形式

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = b\mu x_n(1 - x_n). \end{cases} \quad (13)$$

在实际计算中发现,当 Henon 映射的系统参数 $a = 0.05, b = 0.47$ 时,选取 logistic 映射的系统参数 μ 在 $2.1 \sim 4$ 之间,复合混沌系统(13)具有两个不动点,一个不稳定结点和一个焦点,其系统有两个混沌吸引子.随着 logistic 映射系统参数 μ 的变化,系统出现了一系列的分岔(图10),当 μ 在小于 2.28 时系统为稳定焦点; μ 在 2.28—2.7 范围内为不变环,在 2.7—3.75 之间为倍周期分岔过程.分岔开始时,复合系统是从周期 4 开始,以后以 2 倍数增加,最后使复合系统进入混沌状态^[8-11].

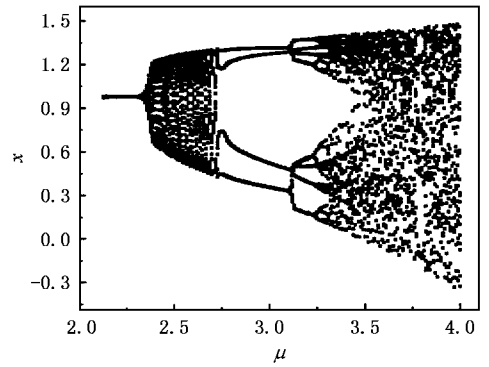


图10 复合系统(13)随系统参数 mu 变化的分岔图

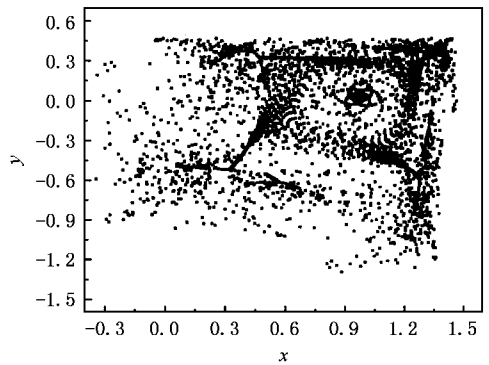


图11 复合系统(13)的吸引子

当系统参数 μ 由 2.1 逐步增加到 4 时,复合系统(13)的混沌吸引子将由稳定焦点到不变环,再收缩到低维流形上,最后在有限的范围内扩散为混沌.图11是复合混沌映射(13)式的吸引子.由图12可以更清楚地看出,复合系统(13)式具有吸引域,其吸引域的范围在 $y = -1.6 \sim 0.4$ 和 $x = -0.5 \sim 1.5$ 之间.

由复合形式(6)还可得到一维 logistic 映射与二维 Henon 映射的第三种复合系统形式,这种复合形式分别在两个差分方程中同时复合了一维 logistic

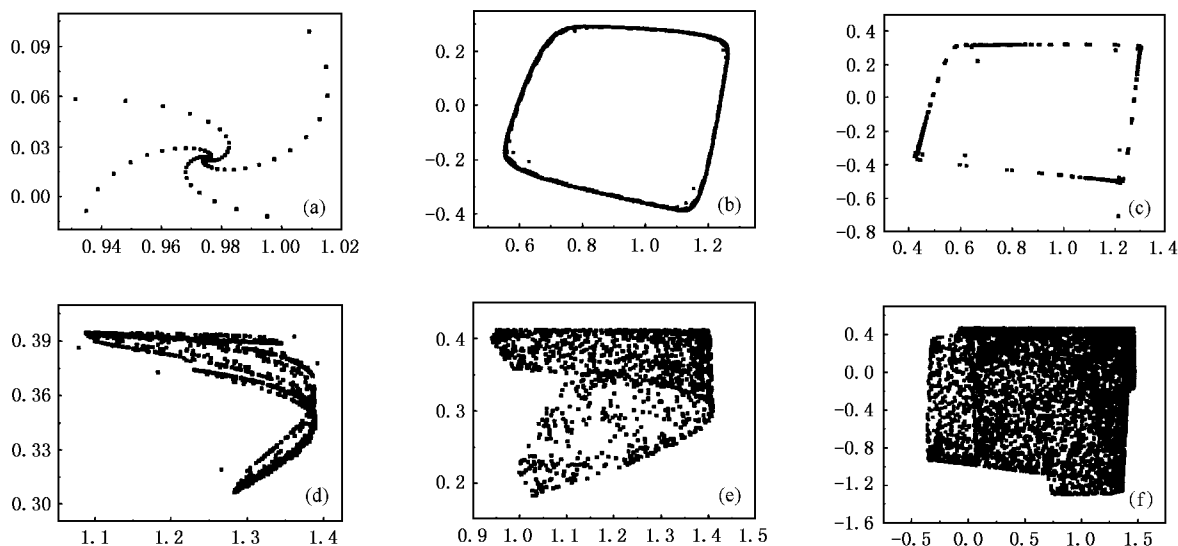


图 12 吸引子随复合系统参数 μ 的变化情况 (a) $\mu=2.1$ (b) $\mu=2.5$ (c) $\mu=2.752$ (d) $\mu=3.35$ (e) $\mu=3.5$ (f) $\mu=4$.

映射,复合系统为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - a\mu^2 x_n^2(1 - x_n)^2 + y_n, \\ y_{n+1} = b\mu x_n(1 - x_n), \end{cases} \quad (14)$$

复合系统(14)式的动力学行为与系统(12)的动力学行为相似,也具有混沌吸引子,并呈现倍周期分叉现象.当选取 Henon 映射的系统参数 $a=1, b=0.04$ 时,复合系统参数 μ 在 $[3.2, 3.8]$ 之间.如图 13 为(14)式的吸引子.吸引子的吸引域在 $y=0.015-0.04$ 和 $x=0.1-0.9$ 之间,它与前两种的复合系统形式的吸引子有所不同.

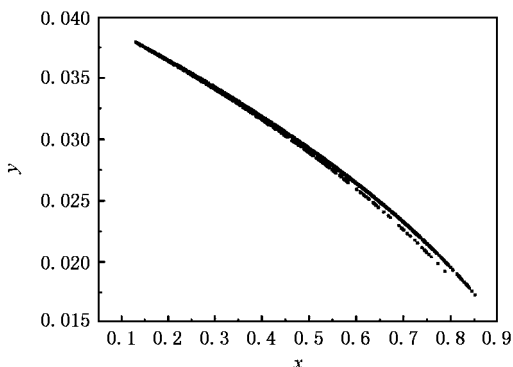


图 13 复合系统(14)的吸引子

通过以上的理论分析和计算机仿真的结果表明,复合系统(12)(13)和(14)具有不同的分岔序列.三种复合混沌系统的周期变化仍然是一种有序状态,改变某个系统参数使行为轨道分裂,继续改变系统参数,轨道的分裂继续发生,最后将失去周期性

而进入混沌状态.由(6)式和(7)式还可以看出,在一维与二维映射复合时,能够得到多种复合形式.不同的复合形式,其非线性动力学行为也不尽相同.

在复合混沌系统中,尤其是在高维的复合混沌系统中,由于两个或者多个系统的复合,使整个系统的参数不止一个.在研究过程中一般根据需要只选择一个系统参数作为研究对象,特殊条件下也可确定多个系统参数进行分析.

4. 结 论

本文通过对两个相同或不同结构的混沌系统复合而成的新系统进行了分析,研究了其混沌动力学行为,从计算机模拟和理论上分析了两个混沌系统所构成的系统仍然具有对初值的敏感性,其吸引子具有复杂的分形结构,而且两个简单系统复合构成的新系统也是一个混沌系统,两个以上的混沌系统复合时情况依然如此.本文还讨论了复合系统的分岔序列.对于两个相同或不同结构的一维混沌系统的复合形式,分岔序列出现缺边现象,并且有偶次复合成上下交替缺边的规律,这说明了复合而成的复杂系统与原系统有不同的动力学特征,复合系统的各种动力学行为是在简单系统的基础上演变而来的.

混沌系统的复合形式具有十分重要的实用价值,它不仅具有非常重要的理论意义,而且能够解决实践中两个或两个以上的复合混沌系统所涉及

的一些问题. 对于一个复杂的混沌系统可通过上述方法分解成两个或几个混沌系统进行分析, 从而简

化了研究过程. 此方法不仅可应用于离散系统, 在连续系统中仍然可以使用.

- [1] Li T Y , Yorke J A 1975 *Am. Math. Monthly* **82** 985
- [2] Kennedy M P 1993 *IEEE Trans Circ Syst.* **40** 657
- [3] Matian M A , Gumez J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1145
- [4] Liu Y , Barbosa L C , Rios Leite J R 1994 *Phys. Rev. Lett. A* **193** 259
- [5] Gan J C , Xiao X C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1085 (in Chinese) [甘建超、肖先赐 2003 物理学报 **52** 1085]
- [6] Yu J J , Zhang M X , Xu H B 2004 *Acta phys. Sin.* **53** 3701 (in Chinese) [于津江、张明轩、徐海波 2004 物理学报 **53** 3701]
- [7] Luo X S , Chen G R , Wang B H *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 790 (in Chinese) [罗晓曙、陈关荣、汪秉宏等 2003 物理学报 **52** 790]
- [8] He D H , Xu J X , Chen Y H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1611 (in Chinese) [何岱海、徐健学、陈永红 1999 物理学报 **48** 1611]
- [9] Qu S X , He D R 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1307 (in Chinese) [屈世显、何大韧 1997 物理学报 **46** 1307]
- [10] Yu S M , Lin Q H , Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **53** 2084 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084]
- [11] Yu S M 1999 *Acta Phys. Sin.* **53** 4111 (in Chinese) [禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111]

Nonlinear dynamic behaviors of complex chaotic systems *

Yu Jin-Jiang¹⁾²⁾ Cao He-Fei¹⁾ Xu Hai-Bo²⁾ Xu Quan³⁾

1) *Institute of Physics , Shijiazhuang Normal College , Shijiazhuang 050035 , China*)

2) *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics , Beijing 100088 , China*)

3) *Department of Physic , Daqing Academy College , Daqing 163712 , China*)

(Received 30 November 2004 ; revised manuscript received 13 June 2005)

Abstract

In this paper , the nonlinear dynamical behaviors and bifurcation series of complex systems are studied. Numerical simulation and theoretical inference show that there are chaotic attractors in complex chaotic system which are sensitive to the initial states and are short of a boundary line.

Keywords : complex system , attractor , bifurcation series

PACC : 0545