

实现混沌系统同步的非线性状态观测器方法

姚利娜^{1)†} 高金峰²⁾ 廖旋焕³⁾

1) 中国科学院自动化研究所, 北京 100080)

2) 郑州大学电气工程学院, 郑州 450002)

3) 华北水利水电学院, 郑州 450008)

(2004 年 12 月 10 日收到, 2005 年 3 月 22 日收到修改稿)

针对一类状态不能全部测量且含有不确定因素的混沌系统的同步问题, 设计了一个带有控制器的非线性观测器. 当系统的非线性项满足一定条件时, 不论系统是处于平衡点、周期、拟周期、混沌或超混沌状态, 都可使观测器的状态按照目标系统给定的轨道演化, 并且是大范围内可同步的. 计算机仿真结果表明了所提出方法的有效性.

关键词: 状态观测器, 混沌, 超混沌, 同步

PACC: 0545

1. 引言

自从 Pecora 和 Carrol^[1,2] 提出混沌同步原理以来, 混沌系统的同步问题已成为非线性动力学领域的研究热点之一. 由于非线性系统的混沌同步在通讯、信息科学、医学、生物、工程等领域中具有很大的应用潜力和发展前景, 已引起国内外的广泛关注与兴趣.

有关混沌同步的机理、方法已有很多报道. 文献 [3,4] 报道的实现混沌系统同步控制的方法, 解决了含有不确定性因素的两个混沌系统所有状态变量的同步问题. 但其都是以系统的所有状态变量都能得到并可以参加控制为前提的. 但从实际物理过程来看, 一般非线性系统的状态并不都是可以得到的, 因此很自然地可引入观测器理论进行混沌同步系统的设计. 基于状态观测器的混沌同步研究也取得了一些成果^[5-8], 其中文献 [5] 是基于 Lipschitz 观测器的混沌同步的研究, 当满足相对较弱条件时, 得到局部同步. 如果混沌系统能变换成 Brunowsky 标准型时, 则可能得到全局同步, 但该方法要求驱动系统的非线性部分满足 Lipschitz 条件, 具有一定的局限性. 文献 [6] 利用非线性控制理论提出了一种处理一类特殊超混沌系统的同步方法, 这种方法仅需传输一个标量信号, 并且不需要计算 Lyapunov 指数, 也不需要系统初始条件属于相同的吸引域, 但它要求参考

系统的输出由系统的非线性项与状态变量的线性组合组成, 且只能处理含一个非线性项的超混沌系统. 文献 [7] 将状态观测器设计与相空间重构结合起来, 用任意标量信号同步了一类(超)混沌系统. 但其所设计的控制器较复杂, 且需计算 δ_0 .

本文将状态观测器与混沌同步结合起来, 针对一类状态变量不能全部测量的混沌系统, 设计了一个带有控制器的非线性观测器. 以 Lyapunov 技术为基础设计的控制器, 当系统的状态变量都有界时, 不论系统是处于平衡点、周期、拟周期、混沌或超混沌状态, 都可使观测器的状态按照目标系统轨道演化, 并且是大范围可控和可同步的. 所设计的控制器简单, 能用于以往同步方法所不能实现的某些同步, 且具有较强的鲁棒性.

2. 状态观测器及其设计

所谓状态观测器, 就是一个在物理上可以实现的与被观测系统同阶的动力学系统, 它在被观测系统输出信号(这是可以物理测量到的)的驱动下, 实现所有的状态变量或输出都逼近于被观测系统的状态变量或输出. 对线性系统, 观测器设计理论已较成熟. 非线性系统的状态观测器的设计问题复杂且更富有挑战性. 近年来关于非线性观测器的设计问题做了大量工作, 也得出了一些具有应用价值的结

† E-mail: michelle_lnxq@126.com.

论^[9-11]就已有的非线性观测器设计方法而言,或依赖于严格的 Lipschitz 条件,或需要 Hölder 连续条件,要么需要构造合适的 Lyapunov 函数.本文利用非线性状态观测器概念建立一个同步系统,使其在控制器的控制下,实现混沌系统的同步控制.甚至被观测系统中可以包含有不确定因素.

给定如下系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + g(x(t), t), \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (1)$$

(1) 式为目标系统, A, C 满足可观性条件且(1)式的状态变量不能完全得到.

为实现混沌系统同步,设计上式的观测器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + f(\hat{x}(t), t) + L(y - C\hat{x}) + Bu, \\ \hat{y} &= C\hat{x}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 \hat{x} 为状态观测器的状态, L 为待定常向量, B 为合适的矩阵, u 为要设计的控制器.

传统的状态观测器是按和原系统相同的结构形式,复制出一个基本的系统,然后,取原系统输出 y 和复制系统输出 \hat{y} 之差值信号作为修正变量,并将其经增益矩阵 L 馈送到复制系统中积分器的输入端,而构成一个闭环系统.但当原系统有不确定因素,或系统的模型没有完全确定时(如参数未知时),则状态观测器就不能按与原来相同的结构形式复制.我们所设计的状态观测器(2)中的 f 与(1)式中的 g 可不相同,同时增加控制项 u ,选择 u 使设计的观测器实现观测目的.

在系统(1)(2)中

$$\begin{aligned} f, g: R^n \times R \rightarrow R^n, \text{ 且 } f, g \in C^1, L \in R^n, \\ B \in R^{n \times m}, \\ x(t), \hat{x}(t) \in R^n, y(t) \in R, u(t) \in R^m, \\ A \in R^{n \times n}, C \in R^{m \times n}. \end{aligned}$$

用 e, ε 分别表示状态观测误差向量和输出误差向量

$$e = \hat{x} - x, \quad (3)$$

$$\varepsilon = \hat{y} - y = Ce. \quad (4)$$

由(1)(2)式可得误差系统

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - LC)e + f(\hat{x}(t), t) \\ &\quad - g(x(t), t) + Bu. \end{aligned} \quad (5)$$

在 B 为列满秩条件下(5)式又可写为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= (A - LC)e + B[h(\hat{x}(t), t) \\ &\quad - k(x(t), t) + u(t)], \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$h = (B^T B)^{-1} B^T f,$$

$$l = (B^T B)^{-1} g.$$

于是(1)(2)式的同步控制问题,可以化为对误差系统(6)式进行研究,即寻找一个合适的 $u(t) = \varphi(\varepsilon, t)$ 使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}(t) - x(t)\| = 0. \quad (7)$$

3. 基于状态观测器的反馈控制器设计

为实现混沌系统同步,首先对混沌系统和混沌信号做出如下假设.

假设 1

$$\|h(\hat{x}(t), t)\| \leq \chi(\hat{x}(t)), \forall \hat{x}(t),$$

$$\|k(x(t), t)\| \leq \beta(x(t)), \forall x(t),$$

且 $\chi(t)$ 和 $\beta(t)$ 是连续的.

假设 2

选择观测器增益矩阵 L 满足如下条件

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q, \quad (8)$$

$$B^T P = \Gamma C, \quad (9)$$

其中 $P \in R^{n \times n}$, $Q \in R^{n \times n}$, $\Gamma \in R^{m \times m}$ 是三个正定矩阵.

一般情况下,不管系统是处于平衡点、周期或混沌情况下,对所有的时间 t 均有

$$\|\hat{x}(t)\| \leq M_1, \forall t \in [0, \infty), M_1 \in R^+,$$

$$\|x(t)\| \leq M_2, \forall t \in [0, \infty), M_2 \in R^+.$$

于是,在假设 1 满足的情况下,存在 $W, T \in R^+$ 有

$$\|h(\hat{x}(t), t)\| \leq W, \quad (10)$$

$$\|k(x(t), t)\| \leq T.$$

现设计一个具有如下形式的控制器 $u(t)$:

$$u(t) = -k_0 \tanh(\Gamma \varepsilon), \quad (11)$$

其中 $k_0 \in R^+$, Γ 由(9)式确定,称为控制器 $u(t)$ 的学习速率矩阵.

当考虑的两个系统分别满足假设 1, 2 及(10)式的前提下,有如下定理:

定理 1 若(6)式中的控制器取(11)式的形式,则当满足 $k_0 \geq 2(W + T)$ 时,对于任意的初始条件 $e(0)$ 都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

证明 选择标量函数

$$V(e) = e^T P e, \quad (12)$$

当 P 是一个正定对称阵时, $V(e)$ 对所有的 $e \in R^n$ 是正定函数. $V(e)$ 沿着(6)式对时间求导可得

$$\begin{aligned}
\dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}, \\
\dot{V}(e) &= [(A - LC)e + Bh(\hat{x}(t), t) \\
&\quad - Bk(x(t), t) - k_0 B \tanh[\Gamma \varepsilon]]^T P e \\
&\quad + e^T P[(A - LC)e + Bh(\hat{x}(t), t) \\
&\quad - Bk(x(t), t) - k_0 B \tanh(\Gamma \varepsilon)] \\
&= e^T(A - LC)^T P e + e^T P(A - LC)e \\
&\quad + h^T(\hat{x}(t), t) B^T P e + e^T P B k(\hat{x}(t), t) \\
&\quad - l^T(x(t), t) B^T P e - e^T P B k(x(t), t) \\
&\quad - k_0 [\tanh[\Gamma \varepsilon]]^T B^T P e - k_0 e^T P B \tanh(\Gamma \varepsilon) \\
&= -e^T Q e + 2h(\hat{x}(t), t) D^T P e \\
&\quad - 2k(x(t), t)^T P e - k_0 \tanh[\Gamma \varepsilon]^T D^T P e \\
&\quad - k_0 e^T P D \tanh[\Gamma \varepsilon] \\
&< -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + 2h(\hat{x}(t), t) D^T P e \\
&\quad - 2k(x(t), t) D^T P e - k_0 \operatorname{sgr}[\Gamma \varepsilon]^T \Gamma \varepsilon \\
&\leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 + \chi \|h(\hat{x}(t), t)\| \\
&\quad + \|k(x(t), t)\| \|\Gamma \varepsilon\| - k_0 \operatorname{sgr}[\Gamma \varepsilon]^T \Gamma \varepsilon.
\end{aligned}$$

由于

$$\operatorname{sgr}[\Gamma \varepsilon]^T \Gamma \varepsilon = \|\Gamma \varepsilon\|,$$

所以

$\dot{V}(e) < -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 - [k_0 - \chi(W + T)] \|\Gamma \varepsilon\|$. 因此, 当选择 $k_0 \geq \chi(W + T)$ 时, $\dot{V}(e)$ 为一负定函数, 于是得到 (6) 式的平衡点 $e = 0$ 是大范围渐近稳定的结论.

从 (11) 式可看出, 当选择的 k_0 不满足 $k_0 \geq \chi(W + T)$, 则不能实现同步控制. 当选择的 k_0 远大于 $\chi(W + T)$ 时, 虽然能实现同步控制且有较快的同步速度, 但所需的控制能量较大, 较大的控制能量在某些场合是不允许的, 因此正确估计出 k_0 的大小并实现同步控制是必要的. 可通过对 k_0 设计自适应调节律来实现. 我们给出如下定理:

定理 2 考虑的两个系统分别满足假设 1, 2 及 (10) 式的前提下, 设计如下形式的自适应控制律:

$$\begin{aligned}
\dot{k}(t) &= -k \tanh(\Gamma \varepsilon), \\
\dot{k} &= (\Gamma \varepsilon)^T \tanh(\Gamma \varepsilon).
\end{aligned} \quad (13)$$

对 $x(0) \in R^n$, $\varepsilon(0) \in R^n$, $k(0) \in R^+$, 我们能得出如下结论:

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k_0 < +\infty$,
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$.

证明

选择如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(e, k) = e^T P e + [k - \chi(W + T)]^2,$$

于是

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= e^T(A - LC)^T P e + e^T P(A - LC)e \\
&\quad + h^T(\hat{x}(t), t) B^T P e + e^T P B k(\hat{x}(t), t) \\
&\quad - l^T(x(t), t) B^T P e - e^T P B k(x(t), t) \\
&\quad - k \tanh(\Gamma \varepsilon)^T B^T P e - k e^T P B \tanh(\Gamma \varepsilon) \\
&\quad - \chi(W + T) \chi \Gamma \varepsilon^T \tanh(\Gamma \varepsilon) \\
&\quad + 2k(\Gamma \varepsilon)^T \tanh(\Gamma \varepsilon) \\
&= -e^T Q e + 2h(\hat{x}(t), t) B^T P e \\
&\quad - 2k(x(t), t) B^T P e - 2k(\Gamma \varepsilon)^T \tanh(\Gamma \varepsilon) \\
&\quad - \chi(W + T) \chi \Gamma \varepsilon^T \tanh(\Gamma \varepsilon) \\
&\quad + 2k(\Gamma \varepsilon)^T \tanh(\Gamma \varepsilon) \\
&< -e^T Q e + \chi(W + T) \|\Gamma \varepsilon\| \\
&\quad - \chi(W + T) \chi \Gamma \varepsilon^T \operatorname{sgr}(\Gamma \varepsilon).
\end{aligned}$$

将 $(\Gamma \varepsilon)^T \operatorname{sgr}(\Gamma \varepsilon) = \|\Gamma \varepsilon\|$ 代入上述不等式可得到

$$\dot{V} < -e^T Q e \leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2,$$

那么

$$\begin{aligned}
k &\rightarrow k_0, t \rightarrow \infty, \\
\varepsilon(t) &\rightarrow 0, t \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

即定理 2 得证.

4. 计算机模拟仿真

为验证上述结论, 以下给出蔡氏电路同步的计算机模拟结果. 所有模拟仿真结果中的初值是随机选取的.

描述蔡氏电路的方程为^[12].

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\alpha f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (14) \\
y &= Cx = x_1 + x_2,
\end{aligned}$$

其中 $f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a - b) \times (|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$.

当 $\alpha = 10$, $\beta = 14.87$, $a = -1.27$, $b = -0.68$ 时, 系统处于混沌状态. 显然 $C = (1 \ 1 \ 0)$, 容易验证 C 和 A 满足可观性条件.

观测器系统为

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}} &= \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} -\alpha f(\hat{x}_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + l(y - C\hat{x}) + Bu,
\end{aligned}$$

其中

$$L = (1.7387 \quad 1.5697 \quad -6.6915)^T,$$

$$B = (1.722 \quad 1.173 \quad 0.471)^T,$$

$$P = \begin{bmatrix} 39.4750 & -69.4024 & 49.8154 \\ -69.4024 & 157.9117 & -118.4371 \\ 49.8154 & -118.4371 & 112.9255 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 181.0134 & -29.2518 & -168.9438 \\ -29.2518 & 21.003 & 49.7614 \\ -168.9438 & 49.7614 & 236.8742 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = 10,$$

容易验证条件(8)(9)成立,当采用(11)式形式的控制器并取 $k_0 = 5$,可使误差系统的平衡点 $e = (0 \ 0 \ 0)^T$ 是大范围渐近稳定平衡点.

两个系统的变量误差为 $e_k = \hat{x}_k - x_k (k=1, 2, 3)$. e_k 随时间 t 的变化情况如图 1 所示.

为检验本文所提出的方法对不确定对象的同步能力,首先检验对噪声的鲁棒性.对响应系统的状态观测值施加方差为 σ 的正态分布白噪声,即 $\hat{x}_i = (1.0 + \sigma N(0, 1))\hat{x}_i$, $N(0, 1)$ 为标准正态分布, $i=1, 2, 3$.取 $\sigma = 0.01$,仿真结果如图 2 所示.

其次检验对参数不匹配的同步能力,选择参数失配率为 5% 时的仿真结果如图 3 所示.可见本文方法对参数不匹配具有一定的鲁棒性,能使两个混沌系统在参数不匹配或不不同的情况下同步.

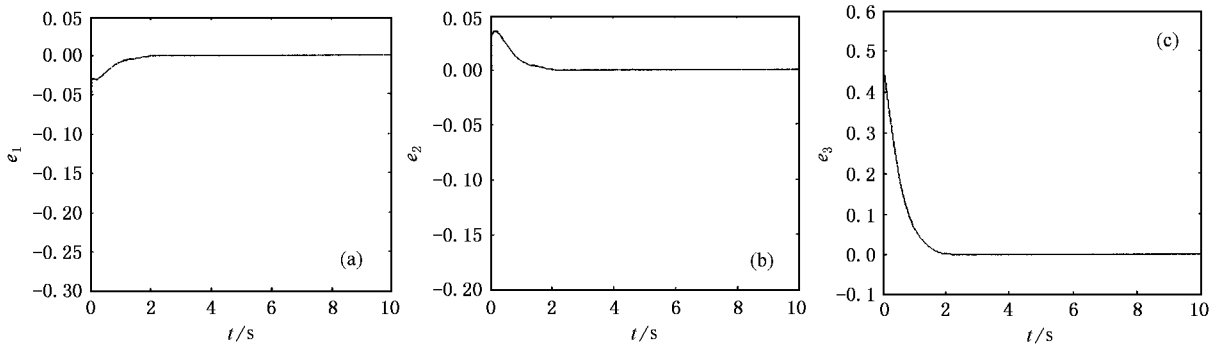


图 1 蔡氏电路同步误差变化图 (a) e_1-t (b) e_2-t (c) e_3-t

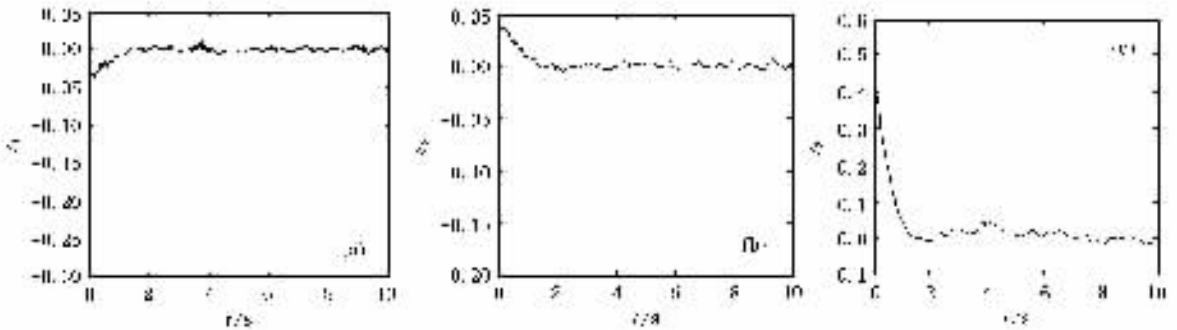


图 2 含干扰因素的同步误差 (a) e_1-t (b) e_2-t (c) e_3-t

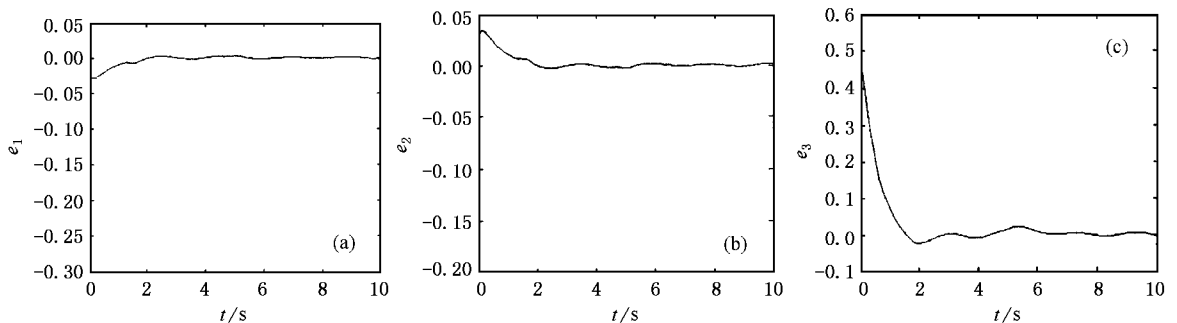


图 3 参数不匹配情况下的同步误差 (a) e_1-t (b) e_2-t (c) e_3-t

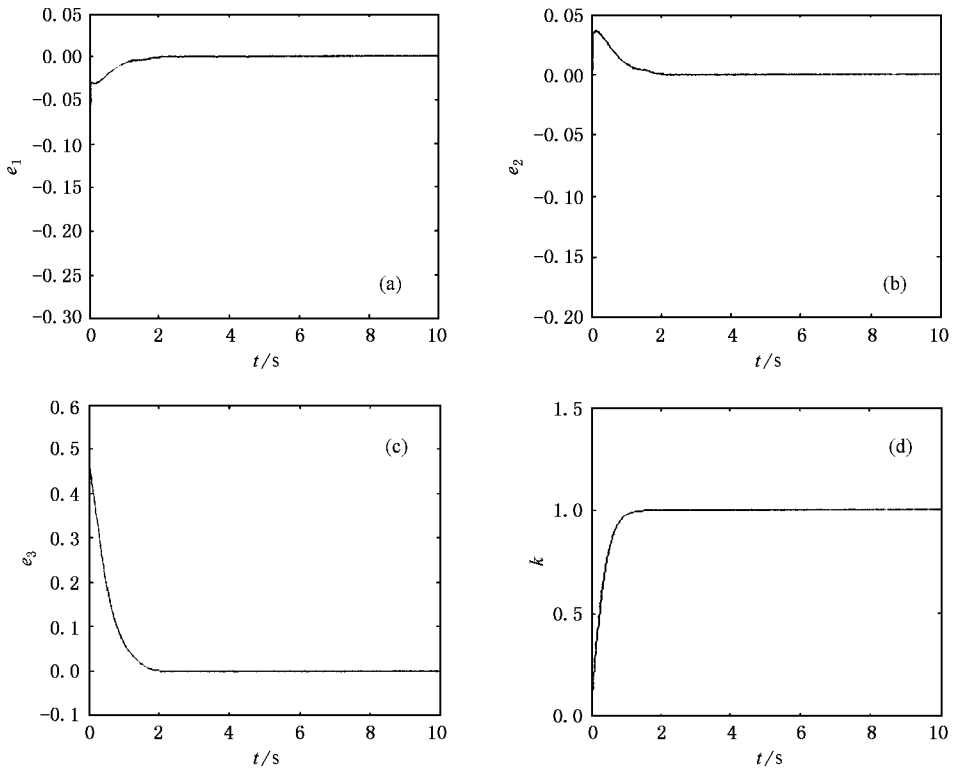


图4 采用自适应控制律时的同步误差及自适应增益的变化 (a) e_1-t (b) e_2-t (c) e_3-t (d) $k-t$

为正确估计出 k_0 的大小并实现同步控制,采用(13)式形式的自适应控制器,仿真结果如图4所示.

从图3和图4可看出本文的同步方案能实现状态不能全部测量混沌系统的同步控制,同步过程开始时,同步误差也有一定的振荡出现,但随着时间的增加,最终获得了 $e \rightarrow 0, k(t) \rightarrow k_0 \approx 1$ 的结果.

为检验本文同步方案对超混沌系统的有效性,以下给出四维超混沌电路同步的计算机模拟结果.描述四维超混沌电路的方程为^[13]

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0.7 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3\alpha(x_4 - 1)H(x_4 - 1) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$y = Cx = x_1 + x_2 + x_3,$$

其中 $H(z)$ 是亥维塞函数,且满足 $H(z < 0) = 0$ 及 $H(z \geq 0) = 1$. 显然 $C = (1 \ 1 \ 1 \ 0)$, 容易验证 C 和 A 满足可观性条件.

观测器系统为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} = & \begin{pmatrix} 0.7 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} \\ & + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3\alpha(\hat{x}_4 - 1)H(\hat{x}_4 - 1) \end{pmatrix} \\ & + K(y - C\hat{x}) + Bu, \end{aligned}$$

其中

$$L = (-0.4255 \ 0.3339 \ 2.7916 \ 1.4950)^T,$$

$$B = (0.3601 \ 0.2108 \ 1.9337 \ -0.8560)^T,$$

$$Q = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = 10.$$

采用(11)式形式的控制器并取 $k_0 = 5$, 同样可使误差系统的平衡点 $e = (0 \ 0 \ 0)^T$ 是大范围渐近稳定的.

设两系统的同步误差为 $e_k = \hat{x}_k - x_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$). e_k 随时间 t 的变化情况如图5所示.

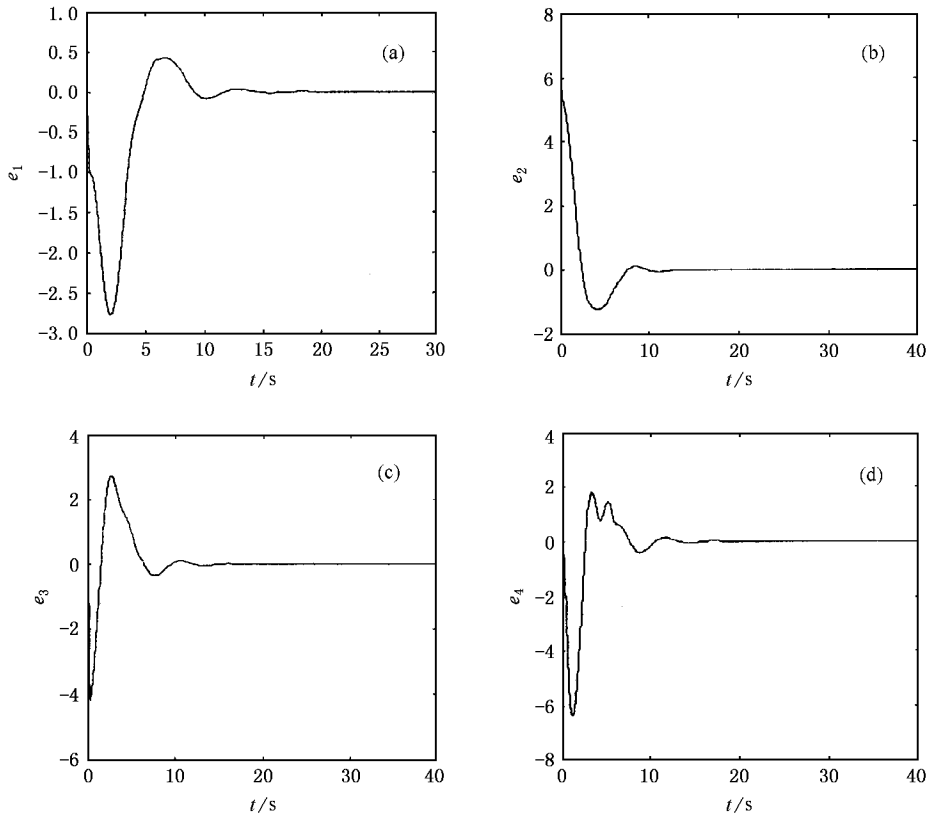


图 5 四维超混沌电路同步误差变化图 (a) e_1-t (b) e_2-t (c) e_3-t (d) e_4-t

可见本文所提出的方法不仅能实现状态不能全部测量混沌系统的同步,而且还可实现状态不能全部测量超混沌系统的同步。

5. 结 论

在系统状态变量有界的前提下,给出了一类状态不能全部测量的混沌系统的同步方案,设计了一

个带有控制器的非线性状态观测器,并对该非线性反馈控制器中的常参数引入了自适应控制机理,正确估计出了该参数大小。本文基于状态观测器的同步方案不需要计算 Lyapunov 指数,不需要初始条件属于相同的吸引域。理论分析和计算机模拟都证明,采用本文的方案可以实现两个相同或不同甚至目标系统中含有不确定因素时的同步,且同步是大范围渐近稳定的。

- [1] Pecora L M, Carrol T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Pecora L M, Carrol T L 1991 *Phys. Rev. Lett.* **A 44** 2374
- [3] Gao J F, Luo X J, Ma X K *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1618 (in Chinese)[高金峰、罗先觉、马西奎等 1999 物理学报 **48** 1618]
- [4] Wu C W, Chua L O 1994 *Int. J. Bifurc. Chaos.* **14** 979
- [5] Wang X F, Wang Z Q 1998 *IEEE Trans. CAS(I)* **45** 1101
- [6] Grassi G, Mascolo S 1997 *IEEE Trans. CAS(I)* **44** 1011
- [7] Bernardo M D 1996 *Int. J. Bifurc. Chaos.* **16** 557
- [8] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1305 (in Chinese)[高铁杠、陈增强、袁著祉等 2004 物理学报 **53** 1305]
- [9] Gauthier J P, Hammouri H, Othman S 1992 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **37** 875
- [10] Tsiniias J 1989 *Syst and Contr. Lett.* **13** 135
- [11] Tsiniias J 1990 *Syst and Contr. Lett.* **14** 411
- [12] Bernardo M D 1996 *Phys. Lett. A* **214** 139
- [13] Tamasevicius A, Namajunas A, Cenys A 1996 *Electron. Lett.* **11** 957

Synchronization of a class of chaotic systems using nonlinear observers

Yao Li-Na¹⁾ Gao Jin-Feng²⁾ Liao Ni-Huan³⁾

1) *Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China*

2) *School of Electric Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China*

3) *North China Institute of Water Conservancy and Hydroelectric Power, Zhengzhou 450008, China*

(Received 10 December 2004 ; revised manuscript received 22 March 2005)

Abstract

This paper investigates the synchronization design for a class of chaotic systems with uncertainties in which all state variables are not measured. The design makes use of an observer with a controller. Assuming the boundedness of chaotic attractors and limited cycles, the approach, which is both global and not relying on complete knowledge of the systems involved, is rigorously proved by means of Lyapunov theory. Computer simulation results illustrate the validity of the method.

Keywords : observer, chaos, hyperchaos, synchronization

PACC : 0545