第 55 卷 第 1 期 2006 年 1 月
1000-3290/2006/55(01)/0192-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.1,January,2006

Tavis-Cummings 模型中原子运动时光场的非经典特性*

王忠纯†

(盐城师范学院物理系,盐城 224002)

(2005 年 4 月 8 日收到;2005 年 5 月 8 日收到修改稿)

用全量子理论研究了原子运动时双原子 Tavis-Cummings 模型中光场的非经典特性. 分析了原子的运动、光场的初态和谐振腔的腔模结构对光场的压缩和反聚束效应的影响.

关键词:Tavis-Cummings 模型,原子运动,压缩,反聚束效应
PACC:4250

1. 引 言

近年来人们对描述多个二能级原子与单模光场相互作用的 Tavis-Cummings(T-C)模型[1]进行了广泛的研究. Joshi 研究了 T-C 模型中原子间的偶极相互作用[2],Bogoliubov 等人讨论了加入 Kerr 非线性介质或 Stark 移位项的 T-C 模型[3],田永红等人研究了考虑偶极相互作用时原子和光场的性质[4]. 我们也用全量子理论方法,研究了 T-C 模型中的原子受到外部经典场驱动时的情况,求出了经典外场驱动下 T-C 模型的能量本征值和波函数[5],研究了外场对原子和光场性质的影响[6]. 在以上的研究中,原子都是被看成静止的. 随着激光致冷和原子囚禁技术的发展,冷原子和超冷原子的获得必须考虑原子的空间运动. 在腔量子电动力学实验中,常使一原子束沿轴向通过谐振腔与腔场相互作用,从而研究场与原子耦合产生的各种量子效应[7]. Schlicher 在考虑到腔模的特殊结构和单原子运动的情况下研究了 Jaynes-Cummings 模型(J-C 模型)中原子粒子数反转的情况[8],Bartzis 研究了含原子运动的 J-C 模型中电场的统计性质[9],刘堂昆等人对含原子运动的 J-C 模型中的量子态保真度进行了研究[10],最近刘小娟等人研究了具有原子运动的双光子 J-C 模型的量子力学通道和量子互熵[11]. 关于 T-C 模型中原子的运动对光场非经典特性的影响尚未见报道.

本文研究双原子 T-C 模型中原子运动的情况,分析原子运动、腔模结构和光场的初态对光场压缩和反聚束效应的影响.

2. 原子运动时 T-C 模型中态矢的演化

设两个全同的二能级原子处于单模腔场中,构成双原子的 T-C 模型. 两原子以相同的速度 v 同时出发沿腔轴 z 方向运动. 为简单起见,这里不考虑原子间的偶极-偶极相互作用. 在偶极近似和旋波近似下,Schrödinger 绘景中此 T-C 系统的哈密顿为[12]

$$H = H_0 + V, \tag{1}$$

$$H_0 = \omega a^+ a + \frac{1}{2}\omega(\sigma_{z1} + \sigma_{z2}), \tag{2}$$

$$V = gf(z)\sum_{i=1}^{2}(a^+ \sigma_i^- + \sigma_i^+ a). \tag{3}$$

以上取 $\hbar = 1$;a^+,a 是光场的光子产生算符和湮没算符,σ_{zi},σ_i^+,σ_i^- 是第 i 个原子的赝自旋算符,考虑原子与光场共振的情况,取光场的频率和原子的本征频率均为 ω;$gf(z)$为原子与光场的耦合常数,与原子在谐振腔中的位置 z 有关. 设原子从腔模的波节处进入光场,腔模的形式函数为[9]

$$f(z) = f(vt) = \sin(qt), \tag{4}$$

其中 $q = \frac{p\pi v}{L}$,p 表示腔长为 L 的谐振腔中场模的半波数. 一般 T-C 模型可看成是(4)式中原子静止于 $z \equiv L/2p$ 处的特例.

在相互作用绘景中系统满足 Schrödinger 方程

* 江苏省高校自然科学研究项目和盐城师范学院教授基金资助的课题.

† E-mail:wz_chun@163.com

$$i\frac{\partial|\Phi(t)\rangle}{\partial t}=V|\Phi(t)\rangle. \tag{5}$$

由于$[V(t),V(t')]=0$，时间演化算符为

$$U(t)=\exp[-i\int_0^t V(t')dt']$$
$$=\exp[-i\tilde{V}F(t)], \tag{6}$$

其中，$\tilde{V}=g\sum_{i=1}^{2}(a^+\sigma_i^-+\sigma_i^+a)$ 为原子静止时，两原子与光场的相互作用哈密顿，

$$F(t)=\int_0^t\sin(qt')dt'=(1-\cos qt)/q. \tag{7}$$

将(6)式与原子静止时一般 T-C 模型的时间演化算符 $\tilde{U}(t)=\exp(-i\tilde{V}t)$对比可知，原子的运动等效于作了时间变换

$$t\Rightarrow F(t)=(1-\cos qt)/q. \tag{8}$$

设开始时原子系统处在基态$|g_1,g_2\rangle$和激发态$|e_1,e_2\rangle$的相干叠加态[4]，而光场处在相干态，即系统的初态

$$|\Phi(0)\rangle=[\cos(\theta/2)|g_1,g_2\rangle$$
$$-\sin(\theta/2)\exp(i\varphi)|e_1,e_2\rangle]|\alpha\rangle, \tag{9}$$

则 t 时刻系统的态矢为

$$|\Phi(t)\rangle=U(t)\Phi(0)$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}F_m(\alpha)U(t)[\cos(\theta/2)|g_1,g_2\rangle-\sin(\theta/2)\exp(i\varphi)|e_1,e_2\rangle]|m\rangle$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}F_m(\alpha)[D_{1,m-2}(t)|u_1,m-2\rangle+D_{2,m-1}(t)|u_2,m-1\rangle+D_{3,m}(t)|u_3,m\rangle$$
$$+C_{1,m}(t)|u_1,m\rangle+C_{2,m+1}(t)|u_2,m+1\rangle+C_{3,m+2}(t)|m_3,m+2\rangle], \tag{10}$$

其中

$$F_m(\alpha)=e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}}; \tag{11}$$

三个对两原子具有交换对称的波函数构成的基矢为[5]

$$|u_1\rangle=|e_1,e_2\rangle,\quad |u_3\rangle=|g_1,g_2\rangle,$$
$$|u_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}[|g_1,e_2\rangle+|e_1,g_2\rangle]; \tag{12}$$

$\{|n\rangle\}$为光场的 Fock 态矢集，$|u_k,m\rangle=|u_k\rangle|m\rangle$ $(k=1,2,3)$；

$$D_{1,m-2}(t)=\frac{\sqrt{m(m-1)}}{2m-1}\cos(\theta/2)[\cos\sqrt{4m-2}gF(t))-1], \tag{13}$$

$$D_{2,m-1}(t)=-\frac{i\sqrt{m}}{\sqrt{2m-1}}\cos(\theta/2)\sin(\sqrt{4m-2}gF(t)), \tag{14}$$

$$D_{3,m}(t)=\frac{1}{2m-1}\cos(\theta/2)[m\cos(\sqrt{4m-2}gF(t))+m-1], \tag{15}$$

$$C_{1,m}(t)=-\frac{1}{2m+3}\sin(\theta/2)e^{i\varphi}[(m+1)\cos(\sqrt{4m+6}gF(t))+m+2], \tag{16}$$

$$C_{2,m+1}(t)=\frac{i\sqrt{m+1}}{\sqrt{2m+3}}\sin(\theta/2)e^{i\varphi}\sin(\sqrt{4m+6}gF(t)), \tag{17}$$

$$C_{3,m+2}(t)=-\frac{\sqrt{(m+2)(m+1)}}{2m+3}\sin(\theta/2)e^{i\varphi}[\cos(\sqrt{4m+6}gF(t))-1]. \tag{18}$$

在(10)和(13)—(18)式中，若令 $F(t)\equiv t$，则过渡到原子静止时一般 T-C 模型的情况.

3. 原子运动时光场的压缩特性

为与实际测量相对应，在 Schrödinger 绘景中定义光场两个缓变的正交分量

$$X_1^{(s)}=\frac{1}{2}(ae^{i\omega t}+a^+e^{-i\omega t}),$$

$$X_2^{(s)}=\frac{1}{2i}(ae^{i\omega t}-a^+e^{-i\omega t}).$$

在相互作用绘景中这两个分量为

$$X_1=\frac{1}{2}(a+a^+),\quad X_2=\frac{1}{2i}(a-a^+), \tag{19}$$

满足对易关系

$$[X_1,X_2]=i/2, \tag{20}$$

定义描述光场压缩程度的函数

$$S_i=\langle(\Delta X_i)^2\rangle-1/4,\quad (i=1,2), \tag{21}$$

若 $S_i<0$，则光场的 X_i 分量被压缩. 不难求出

$$S_1 = \frac{1}{2}(\langle a^+ a\rangle + \mathrm{Re}\langle a^2\rangle) - (\mathrm{Re}\langle a\rangle)^2, \quad (22)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(\langle a^+ a\rangle - \mathrm{Re}\langle a^2\rangle) - (\mathrm{Im}\langle a\rangle)^2, \quad (23)$$

其中

$$\langle a^+a\rangle = \langle n\rangle = |F_1|^2 |D_{3,1}|^2 + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}(m+k-1)|F_{m+2}D_{k,m+k-1} + F_m C_{k,m+k-1}|^2, \quad (24)$$

$$\langle a\rangle = F_0^* F_1 D_{3,0}^* D_{3,1} + F_1^* D_{2,0}^*(F_2 D_{2,1} + F_0 C_{2,1}) + \sqrt{2}F_1^* D_{3,1}^*(F_2 D_{3,2} + F_0 C_{3,2}) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}[\sqrt{m+k}(F_{m+2}^* D_{k,m+k-1}^* + F_m^* C_{k,m+k-1}^*)(F_{m+3}D_{k,m+k} + F_{m+1}C_{k,m+k})], \quad (25)$$

$$\langle a^2\rangle = \sqrt{2}D_{3,0}^* F_0^*(F_2 D_{3,2} + F_0 C_{3,2}) + \sqrt{2}F_1^* D_{2,0}^*(F_3 D_{2,2} + F_1 C_{2,2}) + \sqrt{6}F_1^* D_{3,1}^*(F_3 D_{3,3} + F_1 C_{3,3}) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}\sqrt{(m+k+1)(m+k)}(F_{m+2}^* D_{k,m+k-1}^* + F_m^* C_{k,m+k-1}^*)(F_{m+4}D_{k,m+k+1} + F_{m+2}C_{k,m+k+1}). \quad (26)$$

图 1 给出了不同的光场初态下，原子以速度 $v = gL/\pi$ 运动时 S_1 的时间演化曲线，其中腔模结构参数 $p = 1$，原子初态为 $\varphi = \pi$，$\theta = \mathrm{arctg}(3/4)$. 图 2 为与图 1 对应的初态下一般 T-C 模型(原子静止) S_1 的时间演化曲线. 当光场初态为真空态时，原子运动和静止两种情况下光场均有最大压缩，且最大压缩量相同，光场的 X_1 分量最大压缩程度约为 44.4%(见图 1、图 2 中的曲线 a)；一般 T-C 模型在 $gt = (2k+1)\pi/\sqrt{6}(k = 0,1,2,\cdots)$ 时光场出现最大压缩[4]，而原子运动时，在 $gt\approx 0.593\pi$、即原子在腔中 $0.593L$ 处出现最大压缩. 随着光场初态时光子数的增大($|\alpha|^2$ 加大)，原子运动和静止两种情况下光场的最大压缩均变小，图 1,2 中的 S_1 曲线向上移动. 当 $\alpha > 2$ 后，光场已基本上不能压缩(见图 1、图 2 中的曲线 c). 在原子运动的 T-C 模型中，当 a 增大时，与光场最大压缩对应，原子在腔中的位置向前移动，其最大压缩小于同样初态下原子静止时的最大压缩(见图 1、图 2 中的曲线 b). 这是由于原子运动时受到腔长的限制,与场相互作用的时间较短的缘故.

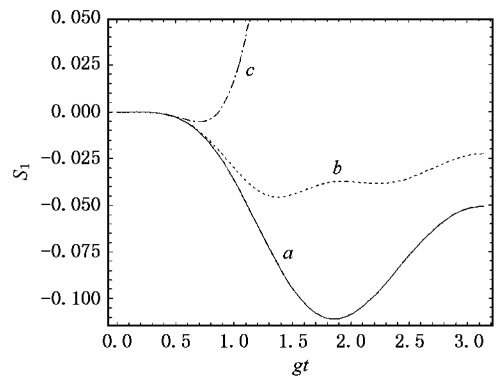

图 1 原子运动的 T-C 模型中 S_1 的时间演化与光场初态的关系($v = gL/\pi$, $p = 1$, $\theta = \mathrm{arctg}(3/4)$, $\varphi = \pi$) (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0.6$, (c) $\alpha = 2$

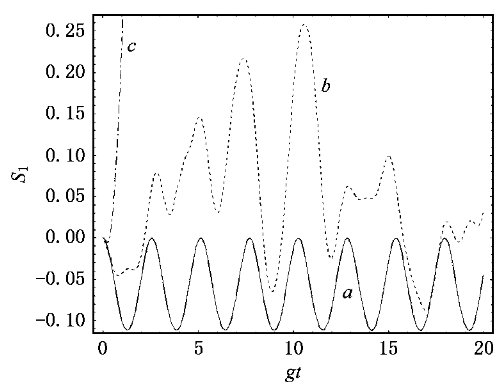

图 2 一般 T-C 模型中 S_1 的时间演化与光场初态的关系($\theta = \mathrm{arctg}(3/4)$, $\varphi = \pi$) (a) $\alpha = 0$, (b) $\alpha = 0.6$, (c) $\alpha = 2$

图 3 为光场初态为真空态、原子的速度一定($v = gL/\pi$)、改变腔模的结构参数 p 时，S_1 的时间演化曲线，曲线 a, b, c 分别对应于 $p = 1, 2, 3$. 由该图可见，腔模结构的改变影响光场的压缩. 随着 p 的增大，最大压缩减小，$p = 1$ 时光场压缩最大.

图 4 是光场初态为真空态、腔模结构一定($p = 1$)，原子以不同的速度运动时 S_1 的时间演化曲线. 图形表明，原子运动的快慢对光场的最大压缩没有影响. 当然，原子速度的加大使得原子与场相互作用的时间变短.

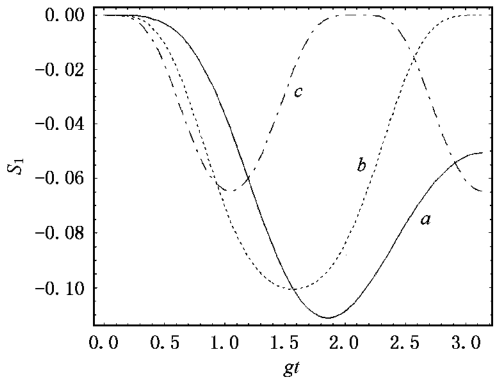

图 3　S_1 的时间演化与腔模结构参数的关系（$v = gL/\pi$，$\alpha = 0$，$\theta = \mathrm{arctg}(3/4)$，$\varphi = \pi$）　(a) $p = 1$，(b) $p = 2$，(c) $p = 3$

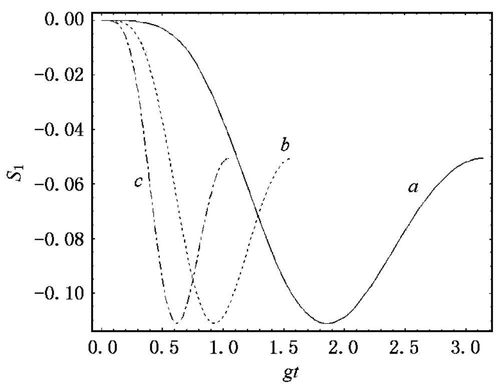

图 4　S_1 的时间演化与原子运动速度的关系（$p = 1$，$\alpha = 0$，$\theta = \mathrm{arctg}(3/4)$，$\varphi = \pi$）　(a) $v = gL/\pi$，(b) $v = 2gL/\pi$，(c) $v = 3gL/\pi$

4．原子运动对光子的反聚束效应的影响

为分析原子运动对光场光子数起伏的影响，我们研究 Q 参数，

$$Q(t) = \frac{\langle n^2\rangle - \langle n\rangle^2}{\langle n\rangle} - 1. \tag{27}$$

若 $Q(t) > 0$，则为超泊松分布；$Q(t) = 0$，为泊松分布；$Q(t) < 0$，为亚泊松分布．对于单模场，超泊松分布完全等价于聚束效应，亚泊松分布完全等价于反聚束效应[13]．不难导出

$$\langle n^2\rangle = |F_1|^2 |D_{3,1}|^2 + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{3}(m+k-1)^2 \times |F_{m+2}D_{k,m+k-1} + F_m C_{k,m+k-1}|^2. \tag{28}$$

将(24)和(28)式代入(27)式即可求出 $Q(t)$．

图 5 和图 6 分别给出了原子运动和原子静止两种情况下 T-C 模型中 Q 参数的演化．两图中初始时原子均处在激发态，即 $\theta = \pi$．初始光场为平均光子数不同的相干态．数值计算表明，两种情况下光子具有同样的最大反聚束效应．随着光场初态平均光子数的增大，最大反聚束效应将减小．光场初态为真空态时，反聚束效应最强（见图 5、图 6 中的曲线 a）．

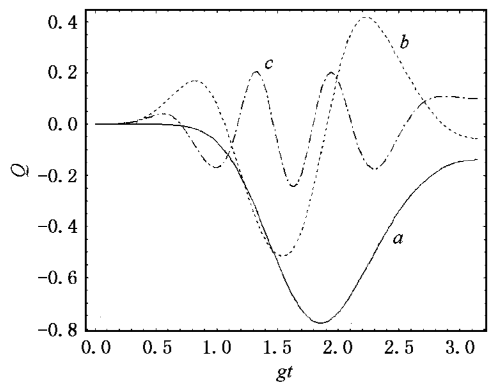

图 5　原子运动的 T-C 模型中 Q 参数的时间演化与光场初态的关系（$v = gL/\pi$，$p = 1$，$\theta = \pi$）　(a) $\alpha = 0$，(b) $\alpha = 2$，(c) $\alpha = 5$

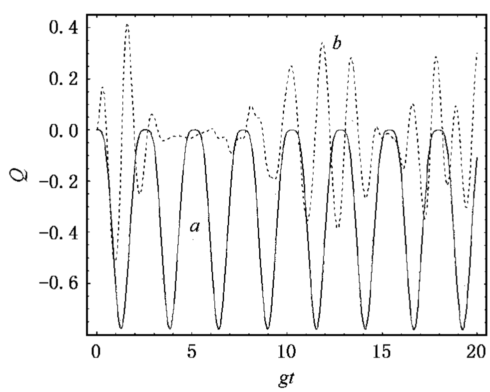

图 6　一般 T-C 模型中 Q 参数的时间演化与光场初态的关系（$\theta = \pi$）　(a) $\alpha = 0$，(b) $\alpha = 2$

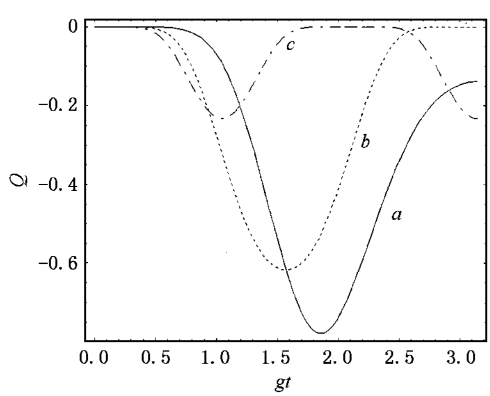

图 7　Q 参数的时间演化与腔模结构参数的关系（$v = gL/\pi$，$\alpha = 0$，$\theta = \pi$）　(a) $p = 1$，(b) $p = 2$，(c) $p = 3$

图 7 给出了 Q 参数与腔模的结构参数的关系．图形表明，腔模结构影响光子的反聚束效应．p 愈大，反聚束效应愈弱．$p=1$ 时反聚束效应最强．

与光场的压缩效应相似，原子运动的快慢对光子的最大反聚束效应没有影响．这里不再赘述．

5．结 论

本文运用全量子理论研究了原子运动时双原子 T-C 模型中光场的非经典特性．分析了原子的运动、光场的初态和谐振腔的腔模结构对光场压缩和反聚束效应的影响．结果表明，当初始时原子为相干叠加态而光场是 $\alpha\neq 0$ 的相干态时，原子的运动使得光场的最大压缩减小．初态为真空态时光场压缩最大，且不管原子是运动还是静止，光场的最大压缩量相同．腔模结构的改变影响光场的压缩，随着 p 的增大，最大压缩减小，$p=1$ 时光场压缩最大．初始时两原子均处于激发态而光场为相干态时，原子的运动不影响光子的最大反聚束效应．光场的初态影响光子的反聚束效应，初态为相干态时，平均光子数愈少，反聚束效应愈强．腔模结构也影响光子的反聚束效应，p 愈大，反聚束效应愈弱．光场初态为真空态时，原子运动的快慢对光场的最大压缩和光子的最大反聚束效应均没有影响．

[1] Tavis M，Cummings F W 1968 *Phys*. *Rev*. **170** 379

[2] Joshi A 1991 *Phys*. *Rev*. A **44** 2135

[3] Bogoliubov N M，Bulloughz R K，Timonenx J 1996 *J*. *Phys*. *A*：*Math*. *Gen*. **19** 6305

[4] Tian Y H，Peng J S 2000 *Acta Opt*. *Sin*. **20** 1187（in Chinese）［田永红、彭金生 2000 光学学报 **20** 1187］

[5] Wang Z C，Wang Q，Gu Y J *et al* 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 107（in Chinese）［王忠纯、王 琪、顾永建 2005 物理学报 **54** 107］

[6] Wang Z C，Wang Q，Zhang Y S *et al* 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 0137

[7] Meschede D，Walther H，Muller G 1985 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **54** 551

[8] Schlicher R R 1989 *Opt*. *Commun*. **70** 97

[9] Bartzis V 1992 *Physica* A **180** 428

[10] Liu T K，Wang J S 2001 *Chinese Journal of Atomic And Molecular Physics* **18** 58（in Chinese）［刘堂昆、王继锁 2001 原子与分子物理学报 **18** 58］

[11] Liu X J，Fang M F，Zhou Q P 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 0703（in Chinese）［刘小娟、方卯发、周清平 2004 物理学报 **54** 703］

[12] Scully M O，Zubairy M S 1997 *Quatum Optics*（Cambridge：Cambridge University Press）

[13] Gou G C 1990 *Quatum Optics*（Beijing：Higher Education Press）（in Chinese）［郭光灿 1990 量子光学（北京：高等教育出版社）］

Nonclassical feature of the field in the two-atom Tavis-Cummings model with atomic motion*

Wang Zhong-Chun

（*Department of Physics*，*Yancheng Teachers College*，*Yancheng* 224002，*China*）

（Received 8 April 2005；revised manuscript received 8 May 2005）

Abstract

We study the nonclassical feature of the field in the two-atom Tavis-Cummings model with atomic motion using the quantum theory. The influence of atomic motion，the field mode structure and the field initial states on the properties of the light squeezing and the photon antibunching are discussed.

Keywords：Tavis-Cummings model，atomic motion，squeezing，antibunching

PACC：4250

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province，China，and by the Professor Foundation of Yancheng Teachers College.