

# 声诱导电磁场的赫兹矢量表示与多极声电测井模拟<sup>\*</sup>

关 威<sup>1)</sup> 胡恒山<sup>1)†</sup> 储昭坦<sup>2)</sup>

1) 哈尔滨工业大学航天科学与力学系, 哈尔滨 150001)

2) 吉林大学物理学院, 长春 130023)

(2005 年 5 月 10 日收到, 2005 年 7 月 2 日收到修改稿)

在假设声场不受电磁场影响的前提下, 将 Pride 声电耦合方程组化为具有电流源的麦克斯韦方程组. 与空间位置固定的电流源产生的电磁场不同, 孔隙地层中声波诱导的电磁场是由空间波动的电流源产生的. 通过引入赫兹矢量, 将求解麦克斯韦方程组问题转化为求解关于赫兹矢量的非齐次矢量赫姆霍兹方程组. 通过求解该方程组, 得出电磁场表达式. 利用此方法, 针对声电效应测井, 分别计算了由单极声源、偶极声源、四极声源激发的井内声场及其诱导电磁场的全波波形.

关键词: 孔隙介质, 诱导电磁场, 测井, 多极声源

PACC: 4320, 0340K, 4110H, 0350D

## 1. 引言

流体饱和孔隙地层中, 由于固相骨架选择性地吸附孔隙电解质溶液中的某种离子, 使原本电中性的孔隙流体中出现净剩电荷, 形成双电层<sup>[1]</sup>. 当弹性波在孔隙地层中传播时, 引起流体相对于骨架的流动, 这种携带电荷的渗流波动可导致电流和电磁场<sup>[1]</sup>. 孔隙地层中弹性波与电磁波的这种耦合现象称为声电效应或震电效应. 随着微弱信号检测技术的提高, 人们认识到有可能利用这种效应进行地震监测、预报和资源勘探, 激发了物理学家和地球物理学家关于声电耦合现象发生机理和耦合波传播机理研究的兴趣<sup>[2]</sup>. Pride<sup>[3]</sup>从基本的力学和电磁学原理出发, 采用体积平均法, 在薄双电层条件下导出了声电耦合波的控制方程组. 胡恒山等<sup>[4,5]</sup>运用该方程组, 针对声电效应测井问题, 在轴对称条件下推导出了孔隙地层中井孔内、外声场和电磁场的计算公式, 采用实轴积分法<sup>[6]</sup>计算了井中声场和转换电磁场的全波波形. 把在考虑孔隙介质声电耦合情况下计算出的声场与采用 Biot 孔隙介质声学理论<sup>[7,8]</sup>计算的声场进行比较, 他们发现二者的差异极其微小. 此后, 胡恒山等<sup>[9]</sup>先独立地计算声场, 然后针对低频情况计算了声波诱导的似稳电磁场. 但在声场可以独

立求解的情况下, 如何计算孔隙介质中高频声波诱导的电磁场, 还未见报道. 本文研究这一问题, 并将波场推广到非井轴对称情形, 结合多极声电效应测井计算声波诱导的电磁场. 本文在忽略声波诱导电磁场对声场影响的前提下, 将 Pride 声电耦合方程组简化为求解具有波动电流源的麦克斯韦方程组; 然后引入赫兹矢量, 把求解具有空间波动电流源的麦克斯韦方程组问题转化为求解关于赫兹矢量的非齐次矢量赫姆霍兹方程组; 运用标量赫姆霍兹方程的解, 找出非齐次矢量赫姆霍兹方程组的一组特解, 与齐次赫姆霍兹方程组的通解叠加, 得出电场、磁场的表达式; 最后, 利用此方法, 分别计算由单极声源、偶极声源和四极声源激发的井内声场及其诱导电场、磁场的全波波形.

## 2. 赫兹矢量与电磁场表达式

### 2.1. 将问题转化为求解麦克斯韦方程组

Pride 针对流体饱和的均匀孔隙介质导出了如下声场-电磁场耦合方程组<sup>[3]</sup>:

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (3)$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10272038)和哈尔滨工业大学跨交研究基金(批准号: HIT-MD200204)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: hthhs@sina.com

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{I}(-\nabla p + \omega^2 \rho_f \mathbf{u}), \quad (5)$$

$$-i\omega \mathbf{W} = L\mathbf{E} + (-\nabla p + \omega^2 \rho_f \mathbf{u}) \chi k/\eta. \quad (6)$$

其中  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  分别是电场强度、电位移、磁感应强度、磁场强度,  $\mathbf{J}$  是电流密度,  $\omega$  是圆频率,  $\mathbf{u}$  是固相位移,  $\mathbf{w}$  是渗流位移,  $-i\omega \mathbf{w}$  是渗流速度,  $p$  是孔隙流体压强,  $\eta$  和  $\rho_f$  分别是孔隙流体黏度和密度,  $\sigma$ ,  $k$  和  $L$  分别是孔隙介质的电导率、动态渗透率和动电耦合系数,  $\epsilon$  和  $\mu$  分别是孔隙介质介电常数和磁导率. 电流密度  $\mathbf{J}$  由传导电流密度

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}, \quad (7)$$

和运流电流密度

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{I}(-\nabla p + \omega^2 \rho_f \mathbf{u}) \quad (8)$$

组成. (5) 式和 (6) 式体现着声电耦合, 说明压强梯度和固相位移加速度可以导致运流电流  $\mathbf{J}_s$ , 电场可以导致渗流. 当  $L = 0$  时 (1)–(5) 式退化为关于电磁场的麦克斯韦方程组.

当声波不受其诱导电磁场的影响时, 声场可依据 Biot 理论<sup>[7,8]</sup>独立求解. 这也可从 (6) 式看出: 当忽略右端第 1 项, 该式变为

$$-i\omega \mathbf{w} = (k/\eta) \chi (-\nabla p + \omega^2 \rho_f \mathbf{u}), \quad (9)$$

这正是 Biot 理论中的广义达西定律.

将 (9) 式代入 (8) 式可得

$$\mathbf{J}_s = -i\omega \chi (\eta/k) L \mathbf{w}. \quad (10)$$

将 (2) 式中  $\mathbf{J}$  的传导电流密度  $\mathbf{J}_c$  部分与电位移  $\mathbf{D}$  合并, 有

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \bar{\mathbf{D}} + \mathbf{J}_s, \quad (11)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \bar{\epsilon} \mathbf{E}, \quad (12)$$

其中  $\bar{\epsilon} = \epsilon + i\sigma/\omega$ . 至此, 我们看到当声场已知时, 问题转化为求解由 (1) (4) (11) 和 (12) 式组成的在已知空间波动电流源  $\mathbf{J}_s$  作用下的麦克斯韦方程组. 由 (10) 式可知,  $\mathbf{J}_s$  与渗流速度  $-i\omega \mathbf{w}$  成正比, 并取决于孔隙流体黏度  $\eta$ , 孔隙介质动态渗透率  $k$  和动电耦合系数  $L$ . 由于渗流速度场具有波动性, 导致电流源  $\mathbf{J}_s$  具有波动性, 这使得声波诱导的电磁场有别于以前常见的空间位置固定的电流源产生的电磁场, 也使得电磁场方程组的求解更困难些.

## 2.2. 将问题转化为求解非齐次的矢量赫姆霍兹方程组

依据孔隙介质声波理论,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{w}$  可用势函数表示为

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi_1 + \nabla \varphi_2 + \nabla \times \mathbf{G}_1 + \nabla \times \nabla \times \mathbf{G}_2 \quad (13)$$

$$\mathbf{w} = \alpha_{pf} \nabla \varphi_1 + \alpha_{pf} \nabla \varphi_2 + \alpha_s \nabla \times \mathbf{G}_1 + \alpha_s \nabla \times \nabla \times \mathbf{G}_2, \quad (14)$$

其中  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  分别是快纵波势和慢纵波势,  $\mathbf{G}_1 = \chi \hat{z}$  是 SH 波势,  $\mathbf{G}_2 = \xi \hat{z}$  是 SV 波势,  $\alpha_{pf}$ ,  $\alpha_{ps}$  和  $\alpha_s$  分别是与快纵波、慢纵波和横波对应的渗流位移与固相位移之比<sup>[3,4]</sup>.

将 (14) 式代入 (10) 式, 得到

$$\mathbf{J}_s = \nabla \phi_1 + \nabla \phi_2 + \nabla \times \mathbf{F}_1 + \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_2 \quad (15)$$

其中

$$\phi_1 = T \alpha_{pf} \varphi_1, \quad (16)$$

$$\phi_2 = T \alpha_{ps} \varphi_2, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_1 = T \alpha_s \chi \hat{z}, \quad (18)$$

$$\mathbf{F}_2 = T \alpha_s \xi \hat{z}, \quad (19)$$

其中  $T = -i\omega \chi (\eta/k) L$ .

另一方面, 根据电动力学理论, 任意电流源  $\mathbf{J}$  可表示成<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}, \quad (20)$$

其中  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$  是无旋部分,  $\nabla \times \mathbf{M}$  是无散部分. 电动力学理论还指出<sup>[10]</sup>, 如果赫兹电矢量  $\mathbf{II}^e$  与赫兹磁矢量  $\mathbf{II}^m$  分别满足

$$\left( \nabla^2 - \mu \bar{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{II}^e = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon}, \quad (21)$$

$$\left( \nabla^2 - \mu \bar{\epsilon} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{II}^m = -\mathbf{M}, \quad (22)$$

则用赫兹矢量表达的电场和磁场

$$\mathbf{E} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{II}^e + k_{em}^2 \mathbf{II}^e + i\omega \mu \nabla \times \mathbf{II}^m, \quad (23)$$

$$\mathbf{H} = -i\omega \bar{\epsilon} \nabla \times \mathbf{II}^e + \nabla \times \nabla \times \mathbf{II}^m \quad (24)$$

是麦克斯韦方程组的解. 比较 (15) 式和 (20) 式, 得到

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \nabla \phi_1 + \nabla \phi_2, \quad (25)$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times \mathbf{F}_1 + \nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_2. \quad (26)$$

将 (25) (26) 式代入 (21) (22) 式, 得到关于赫兹矢量的方程组

$$\nabla^2 \mathbf{II}^e + k_{em}^2 \mathbf{II}^e = \frac{\nabla \phi_1 + \nabla \phi_2}{i\omega \bar{\epsilon}}, \quad (27a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{II}^m + k_{em}^2 \mathbf{II}^m = -\mathbf{F}_1 - \nabla \times \mathbf{F}_2, \quad (27b)$$

其中  $k_{em}^2 = \omega^2 \mu \bar{\epsilon}$ ,  $k_{em}$  为孔隙介质电磁波波数. 至此, 我们把求解具有波动电流源的麦克斯韦方程组问题转化成了求解关于赫兹矢量的非齐次矢量赫姆霍兹方程组 (27).

### 2.3. 赫姆霍兹方程组的解

为了解方程组(27),需要找出其在有源情况下的一组特解,并与其在无源情况下的通解叠加。

首先,求有源情况下的特解.根据弹性波理论,(16)(17)式中的波动势函数 $\phi_1, \phi_2$ 分别满足波数为 $k_{pf}$ (快纵波波数)和 $k_{ps}$ (慢纵波波数)的标量赫姆霍兹方程(18)(19)式中的波动势函数 $\chi$ 和 $\xi$ 均满足波数为 $k_s$ (横波波数)的标量赫姆霍兹方程.可以证明 $\nabla\phi_1$ 和 $\nabla\phi_2$ 分别满足以 $k_{pf}$ 和 $k_{ps}$ 为波数的矢量赫姆霍兹方程, $F_1$ 和 $\nabla \times F_2$ 均满足以 $k_s$ 为波数的矢量赫姆霍兹方程。

当(27a)式中源 $\frac{\nabla\phi_1}{i\omega\epsilon}$ 单独作用时,即

$$\nabla^2 \Pi^e + k_{em}^2 \Pi^e = \frac{\nabla\phi_1}{i\omega\epsilon}, \quad (28)$$

将(28)式右端项移到左侧,变成

$$\nabla^2 \Pi^e + k_{pf}^2 \left( \frac{i\omega\epsilon k_{em}^2 \Pi^e - \nabla\phi_1}{i\omega\epsilon k_{pf}^2} \right) = 0. \quad (29)$$

令 $\Pi^e = \frac{i\omega\epsilon k_{em}^2 \Pi^e - \nabla\phi_1}{i\omega\epsilon k_{pf}^2}$ 时,解得

$$\Pi_1^e = \frac{\nabla\phi_1}{i\omega\epsilon(k_{em}^2 - k_{pf}^2)}. \quad (30)$$

由于 $\nabla\phi_1$ 满足波数为 $k_{pf}$ 的矢量赫姆霍兹方程,因此 $\Pi_1^e$ 是(28)式的一个特解.同理可求得方程组

(27)中源 $\frac{\nabla\phi_1}{i\omega\epsilon}, -F_1, -\nabla \times F_2$ 单独作用下的特解分别是

$$\Pi_2^e = \frac{\nabla\phi_2}{i\omega\epsilon(k_{em}^2 - k_{ps}^2)}, \quad (31)$$

$$\Pi_3^m = \frac{F_1}{k_s^2 - k_{em}^2}, \quad (32)$$

$$\Pi_4^m = \frac{\nabla \times F_2}{k_s^2 - k_{em}^2}. \quad (33)$$

这样,通过求解标量赫姆霍兹方程,得到 $\phi_1, \phi_2, \chi$ 和 $\xi$ ,即可利用(30)–(33)式来表示方程组(27)在有源情况下的一组特解。

然后,求解方程组(27)在无源情况下的通解.因为无源区域中的电磁场量只需两个独立的标量函数来表示<sup>[10]</sup>,所以在无源情况下可令 $\Pi^e = \Pi^e \hat{z}, \Pi^m = \Pi^m \hat{z}$ ,有

$$\nabla^2 \Pi^e + k_{em}^2 \Pi^e = 0, \quad (34a)$$

$$\nabla^2 \Pi^m + k_{em}^2 \Pi^m = 0. \quad (34b)$$

通过(34)式,易求 $\Pi^e$ 与 $\Pi^m$ ,方程组(27)在无源情况下的通解可表示为 $\Pi_0^e = \Pi^e \hat{z}, \Pi_0^m = \Pi^m \hat{z}$ 。

至此,将 $\Pi_1^e, \Pi_2^e, \Pi_3^m, \Pi_4^m, \Pi_0^e$ 和 $\Pi_0^m$ 的表达式分别代入(23)和(24)式,再将所得到的电场、磁场表达式按照下面两式的形式叠加,即为孔隙介质中声波诱导的电磁场。

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_0, \quad (35)$$

$$H = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_0. \quad (36)$$

在下文中,将利用此方法,以及本节得到的公式,模拟多极声源声电效应测井响应。

### 3. 多极声电效应测井响应模拟

井中的声源发射声波,进入井外孔隙地层的部分声波携带地层信息沿井壁传播并返回井内接收器<sup>[11]</sup>.在井内接收来自地层中的弹性波及其诱导电磁波信号的测井方法称为声电效应测井.胡恒山等模拟了单极声源激发的电磁场<sup>[4,5]</sup>,崔志文计算了井中多极声源激发的电磁场<sup>[12]</sup>,他们的计算都基于Pride声电耦合控制方程组.下面按照上一节给出的方法,计算声场及其诱导电磁场。

假设井中为流体,井外为流体饱和孔隙介质,位于井轴上的多极点声源激发声波.采用的 $n$ 级源由 $2n$ 个强度为 $1(2n)$ 的点声源等间隔地处于同一个半径 $r_0$ 的圆周上构成,其中相邻点源的相位相反<sup>[13]</sup>。

依据上一节的分析,可先计算声场,附录A给出了井内、外声场的计算公式.下面求多极声源激发时声波诱导的井内外电磁场解。

#### 3.1. 孔隙介质中电磁场的势函数解

取圆柱坐标系 $(r, \theta, z)$ ,以声源位置为原点,以井轴为 $z$ 轴,将(30)式代入(23)(24)式,并利用(16)和(A2)式,可得到(35)(36)式右端 $E_1$ 和 $H_1$ 的各分量表达式

$$E_{z1} = RT \frac{\alpha_{pf}}{i\omega\epsilon} (ik_{pf} K_n(\eta_{pf} r)) \cos(n\theta), \quad (37)$$

$$E_{r1} = RT \frac{\alpha_{pf}}{i\omega\epsilon} A_{pf} \left( \frac{n}{r} K_n(\eta_{pf} r) - \eta_{pf} K_{n+1}(\eta_{pf} r) \right) \cos(n\theta), \quad (38)$$

$$E_{\theta1} = RT \frac{\alpha_{pf}}{i\omega\epsilon} \left( -\frac{n}{r} A_{pf} K_n(\eta_{pf} r) \right) \sin(n\theta) \quad (39)$$

$$H_{z1} = H_{r1} = H_{\theta1} = 0, \quad (40)$$

其中  $R = (\eta_f r_0/2)^n/n!$ ,  $\eta_{pf} = \sqrt{k^2 - (\omega/v_{pf})^2}$ ,  $v_{pf}$  为孔隙介质快纵波速度.

同理可以得到 (35) (36) 式右端  $E_2, H_2, E_3, H_3, E_4$  和  $H_4$  的各分量表达式.  $E_0$  和  $H_0$  的各分量表达式可通过将  $\Pi_0^e = \Pi^e \hat{z}$ ,  $\Pi_0^m = \Pi^m \hat{z}$  代入 (23), (24) 式获得, 只须注意  $\Pi^e$  和  $\Pi^m$  是 (34) 的解:

$$\Pi^e = R \cdot A_e(k, \omega) K_n(\eta_{em} r) \cos(n\theta), \quad (41)$$

$$\Pi^m = R \cdot A_m(k, \omega) K_n(\eta_{em} r) \sin(n\theta), \quad (42)$$

其中  $\eta_{em} = \sqrt{k^2 - (\omega/v_{em})^2}$ ,  $v_{em}$  为孔隙介质电磁波速度.  $A_e, A_m$  和 3.2 节将要出现的  $B_e, B_m$  是由 4 个井壁边界条件确定的系数, 这些条件是: 井壁处电场与磁场的轴向分量和环向分量连续.

### 3.2. 井内流体中电磁场的势函数解

由于井壁边界条件起作用, 井内流体中也存在电磁场, 但它与声场是非耦合的. 井内电磁场也可用赫兹矢量  $\Pi^e = \Pi^e \hat{z}$  和  $\Pi^m = \Pi^m \hat{z}$  表示, 但由于井内无源, 关于赫兹势的波动方程是齐次的, 其解为

$$\Pi^e = R \cdot B_e(k, \omega) I_n(\eta_{fem} r) \cos(n\theta), \quad (43)$$

$$\Pi^m = R \cdot B_m(k, \omega) I_n(\eta_{fem} r) \sin(n\theta), \quad (44)$$

其中  $\eta_{fem} = \sqrt{k^2 - (\omega/v_{fem})^2}$ ,  $v_{fem}$  为井中流体电磁波速度.

将  $\Pi^e = \Pi^e \hat{z}$  和  $\Pi^m = \Pi^m \hat{z}$  代入 (23) (24) 式, 并利用 (43) 和 (44) 式, 可以得到井内电磁场

$$E_z = -R \cdot \eta_{fem}^2 B_e I_n(\eta_{fem} r) \cos(n\theta), \quad (45)$$

$$E_r = R \left[ ik B_e \left( \frac{n}{r} I_n(\eta_{fem} r) + \eta_{fem} I_{n+1}(\eta_{fem} r) \right) + \frac{n}{r} i \omega \mu B_m I_n(\eta_{fem} r) \right] \cos(n\theta), \quad (46)$$

$$E_\theta = R \left[ -i \omega \mu B_m \left( \frac{n}{r} I_n(\eta_{fem} r) + \eta_{fem} I_{n+1}(\eta_{fem} r) \right) - \frac{n}{r} ik B_e I_n(\eta_{fem} r) \right] \sin(n\theta), \quad (47)$$

$$H_z = -R \cdot \eta_{fem}^2 B_m I_n(\eta_{fem} r) \sin(n\theta), \quad (48)$$

$$H_r = R \left[ ik B_e \left( \frac{n}{r} I_n(\eta_{fem} r) + \eta_{fem} I_{n+1}(\eta_{fem} r) \right) + \frac{n}{r} i \omega \epsilon_f B_e I_n(\eta_{fem} r) \right] \sin(n\theta), \quad (49)$$

$$H_\theta = R \left[ i \omega \epsilon_f B_e \left( \frac{n}{r} I_n(\eta_{fem} r) + \eta_{fem} I_{n+1}(\eta_{fem} r) \right) + \frac{n}{r} ik B_m I_n(\eta_{fem} r) \right] \cos(n\theta). \quad (50)$$

其中  $\epsilon_f = \epsilon_f + i \sigma_f / \omega$ ,  $\epsilon_f$  和  $\sigma_f$  分别是井内流体介电常数和电导率.

## 4. 计算结果

### 4.1. 单极源情形

对于单极声源激发情形, 在 (45)–(50) 式中令多极源级数  $n=0$ , 并利用贝塞尔函数公式  $I_0(0)=1$ ,  $I_n(0)=0$  (当  $n$  为大于零的整数), 知井轴 ( $r=0$ ) 处非零电磁场分量只有  $E_z$ , 偏离井轴处非零分量有  $E_z, E_r, H_\theta$ . 这与文献 [5, 11] 的结论一致.

为了与文献 [5] 中的波形进行对比, 采用与文献 [5] 相同的介质参数、声源模型、声源函数和中心频率. 按照本文的公式计算了井内的声压与电磁场. 与文献 [5] 一样, 此处采用点声压源模型, 计算中是将 (45)–(50) 式以及附录 A 中的 (A1)–(A5) 式除以  $\rho_f \omega^2$  来实现的.

图 1 将本文的计算结果与文献 [5] 按 Pride 声电耦合方程组计算的结果画在同一幅图上. 可以看出, 在频率为 6 kHz 时, 两种算法的波形重合. 这首先证明了声源中心频率在 6 kHz 时, 假设声波不受其诱导电磁场的影响是可行的, 同时验证了本文引入赫兹矢量计算空间波动电流源诱导电磁场的方法和计算公式是正确的.

图 1 中电场与声压的量级都很小, 这是因为采用的声源强度太弱. 在文献 [5] 中, 假设了离点声源中央 0.01 m 处的声压是 100 Pa, 这比实际测井中采用的声源强度小得多. 由于声源强度对于预测实际测井信号具有重要意义, 有必要采用更贴近实际的声源强度. 关于井下声波测井换能器发射声压的实测资料, 国内外均未见介绍. 即使在理论模拟方面, 已发表的关于声波测井的研究论文一般也只给出声场的相对幅度, 而给出声波曲线绝对幅度的例子极少. 鉴于此, 我们参照法林等<sup>[14]</sup>关于薄球壳压电换能器激发特性的分析结果, 假定离声源中央 0.01 m 处的声压是  $10^7$  Pa, 由此模型计算的结果, 在中心频率为 4 kHz 时与 Kurkjian 关于硬地层井孔内单极源

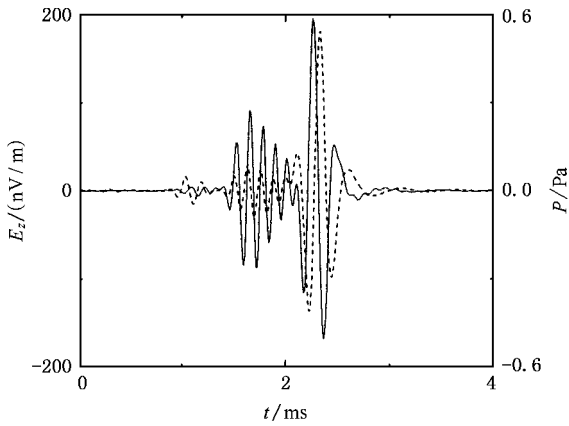


图1 单极声源激发时井轴上的压强与轴向电场强度,中心频率 6 kHz,源距 3 m(实线是压强,虚线是电场)

声场的计算结果<sup>[13]</sup>具有相同的量级.与此声压源相应,图1中的声压最大幅度为 0.056 MPa,电场强度的最大幅度应为 0.0186 V/m.下文中的多极源,是这种点声压源的组合.

#### 4.2. 多极源情形

Kurkjian<sup>[13]</sup>采用点声势源模型计算了偶极源和四极源激发的井内声场的全波波形,并做了详细地分析.张碧星等<sup>[15]</sup>分析了孔隙地层中的多极声测井响应.本文不研究多极源声场,只研究声波诱导的电磁场,着重分析偶极声源和四极声源激发的井内电磁场波形.

对于井轴处的电磁场,将贝塞尔函数的公式  $I_n(x)|_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{n!} \left( \frac{x}{2} \right)^n$  代入(45)–(50)式,可得出偶极源激发( $n=1$ )时井轴( $r=0$ )处的电磁场:电场和磁场的轴向分量均为零,即均位于 $(r, \theta)$ 平面内,电场沿声偶极子( $\theta=0$ )方向,磁场垂直于声偶极子方向,在频率-波数域电磁场为

$$E = \frac{\eta_f r_0}{2} \left[ \frac{\eta_{lem}}{2} \{ k B_e + \omega \mu B_m \} \right], \quad (51)$$

$$H = \frac{\eta_f r_0}{2} \left[ \frac{\eta_{lem}}{2} \{ k B_m + \omega \varepsilon_f B_e \} \right]. \quad (52)$$

文献[12]以为偶极声源激发时在井轴上电磁场均为零,是个疏忽.

同理可得出,当四极源激发( $n=2$ )时,井轴处电磁场的各个分量均为零.

依据(45)–(50)式,当接收器偏离井轴时,无论是偶极源、四极源或更高阶源,都可接收到电磁场的全部6个分量.与单极源激发场量的轴对称情况不

同,多极源激发的声场及其诱导电磁场具有方位性,即(除井轴上以外)任意一点的场量与该点的方位角 $\theta$ 有关.其中,分量 $E_z, E_r$ 和 $H_\theta$ ,当偶极源激发时,在 $\theta=0, \pi$ 的方位处幅度最大,当四极源激发时,在 $\theta=0, \pi/2, \pi$ 和 $3\pi/2$ 的方位处幅度最大.分量 $E_\theta, H_z, H_r$ ,当偶极源激发时,在 $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ 的方位处幅度最大,当四极源激发时,在 $\theta=\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ 的方位处幅度最大.

本文中井壁处任一场量的波形都是针对具有最大幅度的方位进行计算的.在图2至图6中均假设声源中心频率为 4 kHz,接收器距声源的轴向距离为 3.0 m.

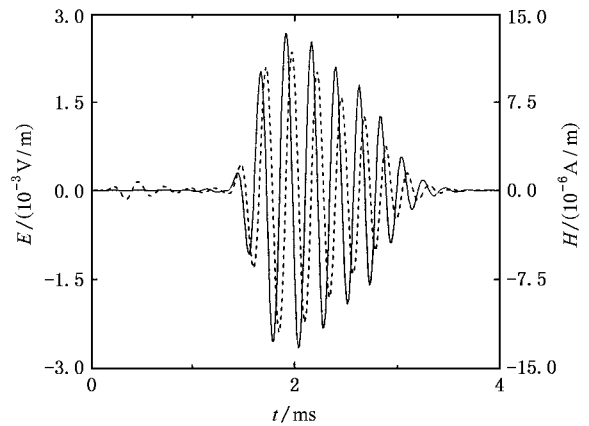


图2 偶极源激发时井轴上的电场和磁场(实线是电场,虚线是磁场),中心频率 4 kHz,源距 3 m

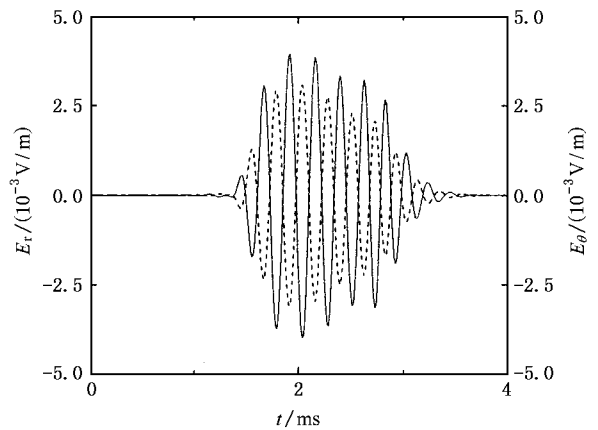


图3 偶极源激发时井壁上的电场(实线和虚线分别是电场的径向和环向分量)

图2是偶极源激发时离声源 3 m 处井轴上电磁场的波形.图3到图6分别是偶极源和四极源激发时离声源 3 m 处井壁上的电场和磁场波形.可以看

出,与单极源情形类似,偶极源和四极源激发时不仅出现了伴随声波的电磁场,而且出现了比快纵波更早到达的电磁信号.文献[16]计算了地层电磁波支点割线积分对应的波形,论证了这一出现于快纵波之前的信号不是计算错误引起的噪声,而是折射电磁波.当井中声波几乎垂直地入射到地层时,在地层中产生沿井壁传播的临界折射电磁波,其中部分能量返回井内到达接收器,这便是图1至图6中电场波形和磁场波形曲线上的首波,图2和图4中较明显.

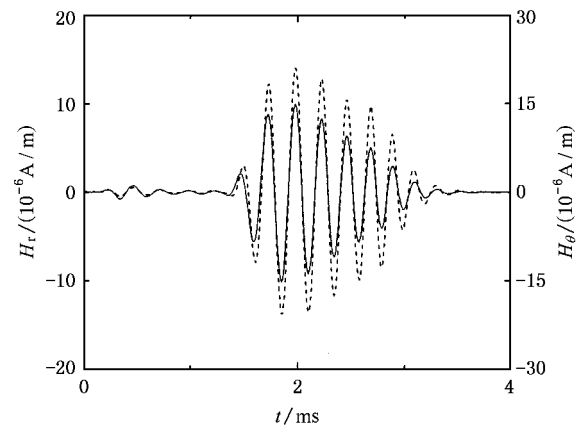


图4 偶极源激发时井壁上磁场(实线和虚线分别是磁场的径向和环向分量)

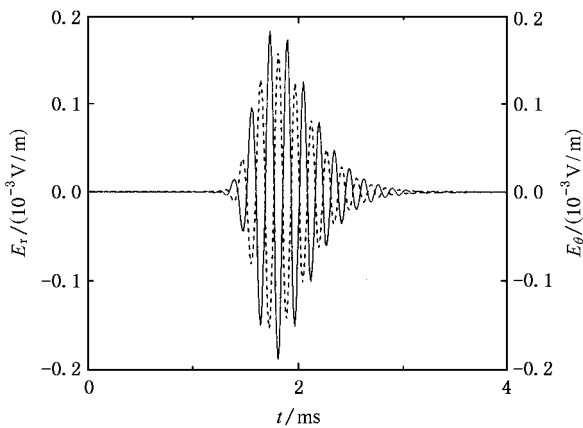


图5 四极源激发时井壁上的电场(实线和虚线分别是电场的径向和环向分量)

对比图2与图3,4可以看出,井轴处的电磁场量小于井壁处,这是由于井内电磁场是由井外传入井内的,随着波的传播,强度减弱.在井壁处,磁场径向分量的幅度小于环向分量,电场径向分量的幅度大于环向分量.通过图3与图5,以及图4与图6的

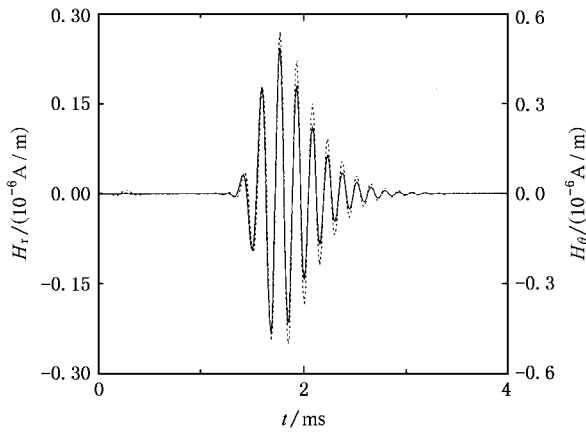


图6 四极源激发时井壁上磁场(实线和虚线分别是磁场的径向和环向分量)

对比,可以看出,相同强度的偶极点声源比四极点声源激发的电磁场强度大.

5. 结 论

声波在孔隙介质中传播时会诱导电磁场,这种电磁场又反过来影响声场.当这种影响可以忽略时,可以把求解声波诱导电磁场的问题归结为求解具有波动电流源的麦克斯韦方程组.引入赫兹矢量后,可将麦克斯韦方程组转化为易于求解的非齐次赫姆霍兹方程组.采用本文的方法,计算了单极声源激发的声场与诱导电磁场,通过与文献[5]中波形的比较,验证了本文方法和计算公式的正确性.与文献[5]相比,本文的方法易于理解,计算也更简单.该方法还可应用于求解其他由空间波动的电流源产生的电磁场问题,比如水平分层孔隙介质中的震电勘探问题.

计算了偶极源与四极源激发的非井轴对称声场与电磁场.与单极源激发情形类似,在诱导电磁场的波形中,有临界折射电磁首波和伴随声波的电磁场.偶极源激发时,井轴上的电场和磁场均在 $(r, \theta)$ 平面内,分别与偶极声源的方向平行和垂直.四极源激发时,井轴上电磁场为零,接收不到电磁信号.当接收器偏离井轴时,无论偶极源或四极源激发,都可以接收到电磁场的全部6个分量.

实际的测井问题中,声源偏心是难以避免的,而偏心声源产生的场可以看成是单极声源与各级多极声源的叠加.可采用本文的方法进一步模拟井内偏心声源激发时产生的电磁场.

## 附录 A 井内外声场的势函数解

多极源井中声场(直达场+反射场)的势函数为

$$\varphi_1(r, \theta, k, \omega) = \frac{1}{n!} \left( \frac{\eta_i r_0}{2} \right)^n [\varepsilon_n K_n(\eta_i r) + A_n(k, \omega) I_n(\eta_i r)] \cos(n\theta), \quad (\text{A1})$$

其中  $\varepsilon_n$  为纽曼常数, 当  $n=0$  时,  $\varepsilon_n=2$ ; 当  $n>0$  时,  $\varepsilon_n=1$ .  $I_n$  和  $K_n$  分别为  $n$  阶第 1 类虚宗量贝塞尔函数和  $n$  阶第 2 类虚宗量贝塞尔函数,  $k$  为轴向波数,  $\eta_i = \sqrt{k^2 - (\omega/v_i)^2}$ ,  $v_i$  是井中流体声速,  $\omega$  是圆频率,  $\theta$  为接收器的方位.

多极源井外声场势函数为

$$\varphi_1(r, \theta, k, \omega) = R [A_{pf}(k, \omega) K_n(\eta_{pf} r)] \cos(n\theta), \quad (\text{A2})$$

$$\varphi_2(r, \theta, k, \omega) = R [A_{ps}(k, \omega) K_n(\eta_{ps} r)] \cos(n\theta), \quad (\text{A3})$$

$$\chi(r, \theta, k, \omega) = R [A_{sh}(k, \omega) K_n(\eta_s r)] \sin(n\theta), \quad (\text{A4})$$

$$\xi(r, \theta, k, \omega) = R [A_{sv}(k, \omega) K_n(\eta_s r)] \cos(n\theta), \quad (\text{A5})$$

其中  $R = \frac{1}{n!} \left( \frac{n_i r_0}{2} \right)^n$ ,  $A_{pf}$ ,  $A_{ps}$ ,  $A_{sh}$  和  $A_{sv}$  为根据声场边界条件确定的系数.

关于声场边界条件, 文献 [12, 13] 做了详细分析, 这里不重复.

- [1] Pride S R, Morgan F D 1991 *Geophysics* **56** 914
- [2] Liu H 2002 *Progress in Geophysics* **17** 211 (in Chinese) [刘 洪 2002 地球物理学进展 **17** 211]
- [3] Pride S R 1994 *Phys. Rev. B* **50** 15678
- [4] Hu H S, Wang K X 1999 *Well Logging Technology* **23** 427 (in Chinese) [胡恒山、王克协 1999 测井技术 **23** 427]
- [5] Hu H S, Wang K X 2000 *Well Logging Technology* **24** 3 (in Chinese) [胡恒山、王克协 2000 测井技术 **24** 3]
- [6] Tsang L, Rader D 1979 *Geophysics* **44** 1706
- [7] Biot M A 1956 *J. Acoust. Soc. Am* **28** 168
- [8] Biot M A 1956 *J. Acoust. Soc. Am* **28** 179
- [9] Hu H S, Liu J Q, Wang H B, Wang K X 2003 *Chinese J. Geophys.* **46** 259 (in Chinese) [胡恒山、刘家琦、王洪滨、王克协 2003 地球物理学报 **46** 259]
- [10] Wang Y P, Chen D Z, Liu P C 1985 *Engineering electrodynamics* (Xi'an: Northwestern University of Telecommunication Engineering

- Press) p43 (in Chinese) [王一平、陈达章、刘鹏程 1985 工程电动力学 (西安: 西北电讯工程学院出版社)]
- [11] Hu H S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1954 (in Chinese) [胡恒山 2003 物理学报 **52** 1954]
- [12] Cui Z W 2004 *Doctoral thesis, Jilin University* p44 (in Chinese) [崔志文 2004 吉林大学博士学位论文, 第 44 页]
- [13] Kurkjian A E, Chang S K 1986 *Geophysics* **51** 148
- [14] Fa L, Zhang S Y 1996 *Well Logging Technology* **20** 169 (in Chinese) [法 林、张士勇 1996 测井技术 **20** 169]
- [15] Zhang B X, Wang K X, Dong Q D 1995 *Chinese J. Geophysics*, **38** (suppl. 1) 178 (in Chinese) [张碧星、王克协、董庆德 1995 地球物理学报 **38** (suppl. 1) 178]
- [16] Hu H S 2002 *Postdoctoral thesis* (Harbin Institute of Technology) p38 (in Chinese) [胡恒山 2002 哈尔滨工业大学博士后研究工作报告]

# Formulation of the acoustically-induced electromagnetic field in a porous formation in terms of Hertz vectors and simulation of the borehole electromagnetic field excited by an acoustic multipole source<sup>\*</sup>

Guan Wei<sup>1)</sup> Hu Heng-Shan<sup>1)†</sup> Chu Zhao-Tan<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> *Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*

<sup>2)</sup> *School of Physics, Jilin University, Changchun 130023, China*

( Received 10 May 2005 ; revised manuscript received 2 July 2005 )

## Abstract

The electromagnetic field induced by acoustic waves in a porous formation is investigated. By supposing the acoustic field is not influenced by its induced electromagnetic field, the governing equations for the coupled acoustic and electromagnetic fields are reduced to a set of Maxwell equations with a propagation current source. The Maxwell equations are then transformed into inhomogeneous vector Helmholtz equations by introducing Hertz vectors. Finally the electromagnetic field is formulated in terms of the solutions to the Helmholtz equations. This method is used to evaluate the electromagnetic field during seismoelectric logging in a porous formation. The full waveforms of the acoustic field and the electromagnetic field in the borehole are calculated when the borehole acoustic sources are respectively a monopole, a dipole and a quadrupole.

**Keywords :** porous medium, Induced electromagnetic field, well logging, multipole acoustic sources

**PACC :** 4320, 0340K, 4110H, 0350D

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10272038 ) and the Multidiscipline Scientific Research Foundation of Harbin Institute of Technology ( Grant No. HIT. MD200204 ).

<sup>†</sup> E-mail : hithhs@sina.com