第 55 卷 第 10 期 2006 年 10 月
1000-3290/2006/55(10)/4991-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.10,October,2006

利用杨辉三角形对称性推导高阶运动微分方程

施 勇 马善钧
(江西师范大学物理与通讯电子学院,南昌 330027)

(2006 年 2 月 27 日收到;2006 年 3 月 23 日收到修改稿)

利用 Mathematica 数学软件计算函数 $r=r(q(t),t)$ 各变量之间偏导和高阶导数的关系,发现具有杨辉三角形对称性.结合杨辉三角形的对称性规律和牛顿第二定律推导出了高阶运动微分方程,并讨论了理想约束系统下的高阶运动微分方程.

关键词:杨辉三角形,牛顿第二定律,高阶运动微分方程,高阶力变率,高阶速度能量,理想约束
PACC:0320

1. 引 言

高阶运动微分方程的研究经历了一个历史发展过程,主要是利用各种微分变分原理推导运动微分方程.从 D'Alembert-Lagrange 原理,Jourdain 原理和 Gauss 原理,逐步发展到由罗马学者 Mangeron 和 Deleanu 于 1960 年提出了万有 D'Alembert 原理[1],即系统的主动力和惯性力在 m 次速度空间中的虚位移上"元功"之和为零.利用万有 D'Alembert 原理可以推导出任意阶非完整系统的运动方程,但它们都没有涉及到力变率问题.近年来,人们开始研究力变率在虚位移中"元功"为零的情形,并取得了一些成果[2—8],力变率和加速度能的概念和物理意义日益得到重视.文献[6]提出了力学系统高阶速度能定理,阐明了系统高阶速度能量的物理意义,建立了高阶力变率和高阶速度能所满足的高阶运动微分方程.伴随着高阶力变率和高阶速度能的研究,理想约束的概念也取得了进一步的发展.本文利用 Mathematica 数学软件计算了函数 $r=r(q(t),t)$ 各变量之间偏导和高阶导数的关系,发现它们遵守杨辉三角形规律.结合杨辉三角形的对称性规律和牛顿第二定律,推导出 $n-1$ 阶力变率和 $n-1$ 阶速度能量所满足的高阶运动微分方程,它们描述了力学系统的 $2n-m+1$ 阶运动微分方程.通过进一步发展理想约束的概念,推导出了完整理想约束系统下的高阶运动微分方程.

2. 函数 $r=r(q(t),t)$ 所满足的杨辉三角形对称性

利用 Mathematica 数学软件计算 $\dfrac{\partial \overset{(n)}{r} / \partial \overset{(m)}{q}}{\overset{(n-m)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)}}$,式中 $r=r(q(t),t)$,$\overset{(n)}{r}=\dfrac{\mathrm{d}^n r}{\mathrm{d}t^n}$,$\overset{(m)}{q}=\dfrac{\mathrm{d}^m q}{\mathrm{d}t^m}\neq 0$,$\overset{(n-m)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)}=\dfrac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}t^{n-m}}\times\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)\neq 0$,可以得到下列各式:

当 $m=0$, n 分别取 $0,1,2,3\cdots$ 时 $\dfrac{\partial \overset{(n)}{r} / \partial q}{\overset{(n)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)}}$ 分别得到 $1,1,1,1\cdots\cdots$

当 $m=1$, n 分别取 $1,2,3,4,5\cdots$ 时 $\dfrac{\partial \overset{(n)}{r} / \partial \overset{(1)}{q}}{\overset{(n-1)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)}}$ 分别得到 $1,2,3,4,5\cdots$

当 $m=2$, n 分别取 $2,3,4,5,6\cdots$ 时 $\dfrac{\partial \overset{(n)}{r} / \partial \overset{(2)}{q}}{\overset{(n-2)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)}}$ 分别得到 $1,3,6,10,15\cdots$

当 $m=3$，n 分别取 $3,4,5,6,7\cdots$ 时 $\dfrac{\partial \overset{(n)}{r} \big/ \partial \overset{(3)}{q}}{\overset{(n-3)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)}}$ 分别得到 $1,4,10,20,35\cdots$

当 $m=4$，n 分别取 $4,5,6,7,8\cdots$ 时 $\dfrac{\partial \overset{(n)}{r} \big/ \partial \overset{(4)}{q}}{\overset{(n-4)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)}}$ 分别得到 $1,5,15,35,70\cdots$

当 $m=5$，n 分别取 $5,6,7,8,9\cdots$ 时 $\dfrac{\partial \overset{(n)}{r} \big/ \partial \overset{(5)}{q}}{\overset{(n-5)}{\left(\dfrac{\partial r}{\partial q}\right)}}$ 分别得到 $1,6,21,56,126\cdots$

观察当 m,n 取不同值时各行计算式所得到的结果,并将它们按三角形的斜边排列,我们发现这些数恰好构成一个数学上具有对称性的杨辉三角形.

$$
\begin{array}{c}
1\\
1 \quad 1\\
1 \quad 2 \quad 1\\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1\\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1\\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1\\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1
\end{array}
$$

用公式表达为

$$\frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}} = C_n^m \overset{(n-m)}{\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)} \quad \left(\overset{(m)}{q} \neq 0\right), \tag{1}$$

(1)式中当 $m=0$ 时,有 $C_n^0=1$,可以得到

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\mathrm{d}^n r}{\mathrm{d}t^n}\right) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right), \tag{2}$$

由数学公式可知

$$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m, \tag{3}$$

其中 $n=1,2,3\cdots \quad m=1,2,\cdots,n$.由(1)式得

$$\frac{\partial \overset{(n+1)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}} = C_{n+1}^m \overset{(n-m+1)}{\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m-1)}{q}} = C_n^{m-1} \overset{(n-m+1)}{\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}} = C_n^m \overset{(n-m)}{\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)}, \tag{6}$$

从(4)和(5)式可以得到

$$\frac{\partial \overset{(n+1)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}} = \frac{C_{n+1}^m}{C_n^{m-1}} \frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m-1)}{q}} = \frac{n+1}{m} \frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m-1)}{q}}, \tag{7}$$

即

$$\frac{\partial \overset{(n+1)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}} - \frac{n+1}{m} \frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m-1)}{q}} = 0, \tag{8}$$

(6)式两边对时间 t 求导,可以化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}}\right) = C_n^m \overset{(n-m+1)}{\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)}. \tag{9}$$

将(4),(5)和(9)式代入(3)式得

$$\frac{\partial \overset{(n+1)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}} = \frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m-1)}{q}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}}\right). \tag{10}$$

将(7)代入(10)式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m)}{q}} - \frac{n-m+1}{m} \frac{\partial \overset{(n)}{r}}{\partial \overset{(m-1)}{q}} = 0. \tag{11}$$

3. 高阶运动微分方程的推导

考虑一个由 N 个质点组成的力学系统,设第 i 个质点的质量为 m_i,位移为 $\boldsymbol{r}_i$,所受到的合外力为 $\boldsymbol{F}_{i合}$,其中主动力为 $\boldsymbol{F}_i$,约束反力为 $\boldsymbol{R}_i$,设质量 m_i 保持不变的情况下,对牛顿第二定律两边同时取时间的$(n-1)$阶导数,有

$$\overset{(n-1)}{\boldsymbol{F}}_{i合} = \overset{(n-1)}{\boldsymbol{F}}_i + \overset{(n-1)}{\boldsymbol{R}}_i = m_i \overset{(n+1)}{\boldsymbol{r}}_i \tag{12}$$

称 $\overset{(n-1)}{\boldsymbol{F}}_i$ 和 $\overset{(n-1)}{\boldsymbol{R}}_i$ 为主动力 $\boldsymbol{F}_i$ 和约束反力 $\boldsymbol{R}_i$ 的$(n-1)$阶力变率.

设 q_α 是坐标 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_\alpha(t),t)$ 的广义坐标,($\alpha=1,2,3\cdots S$),S 是系统的自由度.利用函数 $r=r(q(t),t)$ 所满足的杨辉三角形对称性规律,将 $\boldsymbol{r}_i$ 分别代替(1),(8),(11)式中的 r 得

$$\frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} = C_n^m \overset{(n-m)}{\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \overset{(n+1)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n+1}{m} \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n-m+1}{m} \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha} = 0, \tag{15}$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$；$m=1,2,\cdots,n$.

这里矢量 $\boldsymbol{r}_i$ 虽然不同于标量 r，但同样可以验证(13)—(15)式的正确性.

利用(12)式与(13)—(15)式，即将牛顿运动定律和数学规律相结合，可以推导出经典力学系统的高阶运动微分方程.

(14)式两边同乘以 $m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i$，并对 i 求和

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n+1)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n+1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha} = 0, \tag{16}$$

即

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{N} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{(n+1)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n+1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \overset{(n+1)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}, \tag{17}$$

令

$$S_{n-1} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i, \tag{18}$$

S_{n-1} 称为系统的 $n-1$ 阶速度能量[5].

将(12)，(18)式代入（17）式得

$$\frac{\partial \dot{S}_{n-1}}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n+1}{m}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \overset{(n-1)}{\boldsymbol{F}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} + \sum_{i=1}^{N} \overset{(n-1)}{\boldsymbol{R}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}, \tag{19}$$

把(19)式称为 $n-1$ 阶速度能量满足的高阶 Nielson 方程.

同理，(15)式两边同乘以 $m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i$，并对 i 求和

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n-m+1}{m}$$
$$\times \sum_{i=1}^{N} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha} = 0, \tag{20}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i\right)}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}$$
$$- \frac{n-m+1}{m}\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i\right)}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \overset{(n+1)}{\boldsymbol{r}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}, \tag{21}$$

将(12)和(18)式代入（21）式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n-m+1}{m}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \overset{(n-1)}{\boldsymbol{F}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} + \sum_{i=1}^{N} \overset{(n-1)}{\boldsymbol{R}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}. \tag{22}$$

把(22)式称为 $n-1$ 阶速度能量满足的高阶 Lagrange 方程.可以看出(19)，(22)式描述的是经典力学系统运动的 $2n-m+1$ 阶微分方程.

4. 完整力学系统的高阶运动微分方程

利用经典力学系统的高阶运动微分方程(19)，(22)式可以推导出完整理想力学系统的高阶运动微分方程.

定义　若在 $m-1$ 阶速度空间中，某个约束产生的约束反力及 $n-1$ 阶约束力变率的方向，沿着 $n-1$阶约束方程在 $m-1$ 阶速度空间所确定的超曲面的法线方向，则称之为理想约束[6].

根据理想约束定义，当 $\overset{(n-1)}{\boldsymbol{R}}_i$ 与 $\dfrac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}$ 方向垂直时，它们点乘等于零，即

$$\sum_{i=1}^{N} \overset{(n-1)}{\boldsymbol{R}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} = 0, \tag{23}$$

将(23)式代入(19)，(22)式得

$$\frac{\partial \dot{S}_{n-1}}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n+1}{m}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \overset{(n-1)}{\boldsymbol{F}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}, \tag{24}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha} - \frac{n-m+1}{m}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m-1)}{q}_\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \overset{(n-1)}{\boldsymbol{F}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}, \tag{25}$$

令

$$Q_\alpha^{(n-1,m)} = \sum_{i=1}^{N} \overset{(n-1)}{\boldsymbol{F}}_i \cdot \frac{\partial \overset{(n)}{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \overset{(m)}{q}_\alpha}, \tag{26}$$

$Q_\alpha^{(n-1,m)}$ 称为 $n-1$ 阶广义主动力变率，它表示在 m 阶广义坐标方向上的 $n-1$ 阶主动力变率.将(26)式

代入(24),(25)式得

$$\frac{\partial \dot{S}_{n-1}}{\partial \overset{(m)}{q_\alpha}} - \frac{n+1}{m}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\alpha}} = Q_\alpha^{(n-1,m)}, \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m)}{q_\alpha}} - \frac{n-m+1}{m}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial \overset{(m-1)}{q_\alpha}} = Q_\alpha^{(n-1,m)}. \tag{28}$$

(27)和(28)式称为理想约束下完整力学系统的$n-1$阶速度能量所满足的高阶 Nielson 方程和高阶 Lagrange 方程,它们描述了完整力学系统运动的$2n-m+1$阶微分方程.

如果先令(27)和(28)式中的 $n=m$,再取 $m=m+1$,有

$$\frac{\partial \dot{S}_m}{\partial \overset{(m+1)}{q_\alpha}} - \frac{m+2}{m+1}\frac{\partial S_m}{\partial \overset{(m)}{q_\alpha}} = \sum_{i=1}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{F}_i}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^m, \tag{29}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial S_m}{\partial \overset{(m+1)}{q_\alpha}} - \frac{1}{m+1}\frac{\partial S_m}{\partial \overset{(m)}{q_\alpha}} = \sum_{i=1}^{N}\overset{(m)}{\boldsymbol{F}_i}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha^m. \tag{30}$$

(29)和(30)式与文献[5]得到的结果一致,它描述了完整力学系统运动的 $m+2$ 阶微分方程.

本文研究了质点坐标 $\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_\alpha(t),t)$所满足的杨辉三角形对称性规律,并将它与牛顿运动定律结合,推导出来了经典力学系统的 $n-1$ 阶速度能量所满足的高阶 Lagrange 方程和高阶 Nielson 方程,同时也给出了定义理想约束系统下 $n-1$ 阶速度能量所满足的高阶 Nielson 方程和高阶 Lagrange 方程,它们是描述完整力学系统运动的 $2n-m+1$ 阶微分方程,进一步补充完善了文献[5]所给出的 $m+2$ 阶运动微分方程.

[1] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced analytical mechanics* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔、刘 端、罗 勇 1991 高等分析力学[M].(北京 北京理工大学出版社)]

[2] Cheng X J, Ma S J, Huang P T 2005 *Journal of JiangXi Normal University* (*Natura Science*) **29** (3) 255 (in Chinese) [程小金、马善钧、黄沛天 2005 江西师范大学学报(自然科学版) 29 (3) 255]

[3] Huang P T, Ma S J, Hu L Y 2003 *Journal of JiangXi Normal University* (*Natura Science*) **27** 338 (in Chinese) [黄沛天、马善钧、胡利云 2003 江西师范大学学报(自然科学版) 27 338]

[4] Ma S J, Xu X X, Huang P T, Hu L Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3648 (in Chinese) [马善钧、徐学翔、黄沛天、胡利云 2004 物理学报 53 3648]

[5] Zhang X W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3978 (in Chinese) [张相武 2005 物理学报 54 3978]

[6] Zhang X W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4483 (in Chinese) [张相武 2005 物理学报 54 4483]

[7] Ma S J, Liu M P, Huang P T 2005 *Chin. Phys.* **14** 244 [马善钧、刘明萍、黄沛天 2005 中国物理 14 244]

[8] Ma S J, Ge W G, Huang P T 2005 *Chin. Phys.* **14** 0879 [马善钧、葛卫国、黄沛天 2005 中国物理 14 0879]

Yang Hui Triangle symmetry and higher-order differential equations of motion

Shi Yong Ma Shan-Jun

(*College of Physics and Communication Electronics, Jiangxi Normal University, Nanchang* 330022, *China*)

(Received 27 February 2006; revised manuscript received 23 March 2006)

Abstract

In this paper, by using Mathematica software to disclose the relationship between partial derivative and high-order derivative of different variables in the function $r=r(q(t),t)$, the symmetry of Yang Hui Triangle of the function $r=r(q(t),t)$ is discovered. Combining the symmetry of Yang Hui triangle with the Newtonian second law, the high-order differential equations of motion are deduced. Finally the high-order differential equations of systems under ideal constraints are discussed.

Keywords: symmetry of Yang Hui Triangle, Newtonian second law, high-order differential equations of motion, high-order force, energy of high-order velocity, the ideal constraint

PACC: 0320