

Liu 混沌系统的线性反馈同步控制 及电路实验的研究

王发强 刘崇新

(西安交通大学电气工程学院, 西安 710049)

(2006 年 2 月 22 日收到, 2006 年 3 月 9 日收到修改稿)

研究了新型混沌系统——Liu 混沌系统的同步控制问题, 基于 Liu 混沌系统的混沌特性, 采用线性反馈控制方法, 给出了实现 Liu 混沌系统同步的控制参数取值范围, 数值仿真和电路实验证实了该方法的有效性.

关键词: Liu 混沌系统, 线性反馈控制, 混沌同步, 电路

PACC: 0545

1. 引 言

自从美国海军实验室的 Pecora 和 Carroll 提出了一种混沌同步方法^[1], 以及随后在电子电路中首次观察到混沌同步现象以来, 人们先后提出一系列有效的混沌同步控制方法, 例如, 相互耦合同步^[2], 连续变量反馈同步^[3,4], 自适应控制同步^[5]等, 这些方法各有特点和应用范围, 其中由于线性反馈控制同步简单且容易在物理上实现而得到广泛的应用. 此方法主要是基于李雅谱诺夫稳定性理论, 构造李雅谱诺夫函数, 进行数学推导, 得出同步控制参数的取值范围^[6,7]. 但是, 对于某些混沌系统, 要构造其李雅谱诺夫函数并不是一件很容易的事情. 因此, 研究采用其他方法来确定线性反馈控制同步的控制参数取值范围将具有重要的理论意义和实用价值.

本文则提出基于混沌系统本身李雅谱诺夫指数的特点, 采用线性反馈控制方法, 通过混沌系统的最大李雅谱诺夫指数确定控制参数的取值范围, 从而解决了某些混沌系统难以用李雅谱诺夫函数法来确定控制参数取值范围的问题, 实现了 Liu 混沌系统的同步控制, 并设计硬件电路实验, 证实了该控制方法的有效性和可行性.

2. 线性反馈同步控制机理

考虑如下的混沌系统:

$$\dot{X}_1 = F(X_1), \quad (1)$$

以系统 (1) 为主系统, 构造从系统为

$$\dot{X}_2 = F(X_2), \quad (2)$$

采用线性反馈控制后的受控系统为

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F(X_1), \\ \dot{X}_2 &= F(X_2) + K(X_1 - X_2), \end{aligned} \quad (3)$$

令 $X = X_1 - X_2$, 则 (3) 式可写为

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F(X_1), \\ \dot{X}_2 &= F(X, X_1, K), \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$, $X_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})^T$, $X_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})^T$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为 N 维状态向量, $K = \text{diag}[k_1, k_2, \dots, k_n]$ 为线性反馈控制参数.

目的就是要确定控制参数的取值范围, 使 (4) 式中第二个式子渐进稳定于零平衡点, 从而实现混沌同步.

定义 $D(X_1) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_{1i}}$ 为系统 (1) 的向量场散度, 由于系统 (1) 与 (2) 相同, 因此, $D(X_1) = D(X_2)$, 根据向量场散度与系统李雅谱诺夫指数的关系^[8], 可得

$$\begin{aligned} D(X_1) &= D(X_2) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(X_1) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i(X_2), \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\lambda_i(X_1)$, $\lambda_i(X_2)$ 分别为系统 (1) (2) 的李雅谱诺夫指数.

对于系统 (3) 有

$$D = D(X_1) + D(X_2) - \sum_{i=1}^n k_i, \quad (6)$$

对于系统 (4) 有

$$D = D(X_1) + D(X), \quad (7)$$

式中 $D(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ 为误差系统的向量场散度, $\lambda_i(X)$ 为误差系统的李雅谱诺夫指数,

由 (5)–(7) 式可得

$$D(X) = D(X_1) - \sum_{i=1}^n k_i, \quad (8)$$

要使两混沌系统达到同步, 就必须使误差系统的最大李雅谱诺夫指数小于零, 即所有的李雅谱诺夫指数小于零, 得

$$D(X) < 0, \text{ 即 } D(X_1) - \sum_{i=1}^n k_i < 0, \quad (9)$$

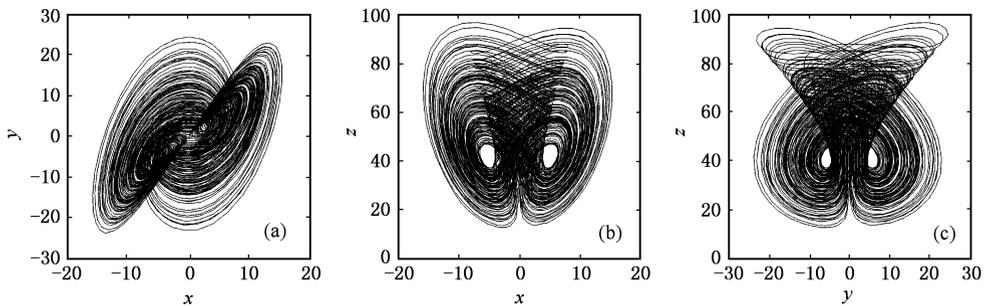


图 1 Liu 混沌系统的相图 (a) x - y , (b) x - z , (c) y - z

对其从系统加上控制项后的数学模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2) + k_1(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = bx_2 - x_2z_2 + k_2(y_1 - y_2), \\ \dot{z}_2 = -cz_2 + hx_2^2 + k_3(z_1 - z_2), \end{cases} \quad (11)$$

其中 k_1, k_2, k_3 为控制参数, 令 $e_1 = x_2 - x_1, e_2 = y_2 - y_1, e_3 = z_2 - z_1$, 则由 (11) 式减去 (10) 式可得其误差动力学系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) - k_1 e_1, \\ \dot{e}_2 = be_1 + x_1 z_1 - x_2 z_2 - k_2 e_2, \\ \dot{e}_3 = -ce_3 - h(x_1^2 - x_2^2) - k_3 e_3. \end{cases} \quad (12)$$

按照常规的方法, 基于李雅谱诺夫稳定性定理, 设计李雅谱诺夫函数, 求出能使误差动力学系统变量渐进稳定于零平衡点的控制参数取值范围, 这对 Lorenz 系统, Chen 系统, Lü 系统来说, 由于其混沌系统数学模型的特殊性, 构造相应的李雅谱诺夫函数并不困难^[6], 然而对于 Liu 混沌系统来说, 由于其平

令 $k = k_1 = \dots, k_n$, 设 $\lambda_{\max} = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, 可得如下结论:

当取控制参数 $k > \lambda_{\max}$, 采用线性反馈控制方法, 可以控制混沌系统达到同步。

3. Liu 混沌系统的线性反馈同步控制及数值仿真

Liu 混沌系统数学模型描述如下^[9], 并设为主系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = bx_1 - x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = -cz_1 + hx_1^2. \end{cases} \quad (10)$$

当 $a = 10, b = 40, c = 2.5, h = 4$ 时, 混沌吸引子的相图如图 1, Liu 混沌系统的详细分析见文献 [9].

方项的存在, 则很难构造一种李雅谱诺夫函数, 从而无法确定其控制参数的取值范围, 但根据数值计算, 则很容易计算出 Liu 混沌系统的最大李雅谱诺夫指数, 即 $\lambda_{\max} = 1.64328$.

令 $k = k_1 = k_2 = k_3$, 根据以上结论, 可知, 当 $k > 1.64328$ 时, 可实现 Liu 混沌系统的同步控制。

取步长 $h = 0.001$, 驱动系统的初始值为

$$x_1(0) = 0.01, y_1(0) = 0.01, z_1(0) = 0.01,$$

响应系统的初始值为

$$x_2(0) = 0.001, y_2(0) = 0.001, z_2(0) = 0.001,$$

设系统总的误差为

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (13)$$

当 $r = 0$ 时, 则两混沌系统达到同步, 其达到同步所需要的时间随控制参数 k 的关系如图 2. 当 $k = 1.2, 1.7, 3$ 时, 去掉 10^3 个暂态数据点后, 其主、从混沌系统相对应的状态变量 $x_1 - x_2$ 的相图如图

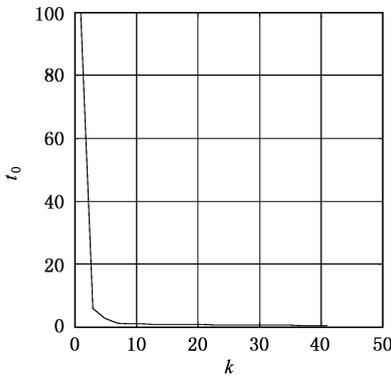


图 2 同步时间随着控制参数 k 的变化图

3 所示,可见,当 $k = 1.2 < 1.64328$ 时,系统不能达到同步,而 $k = 1.7$ 及 3 时,系统经过一个暂态过程后,

最终能达到同步.同时,还可以得出,反馈控制参数 k 越大,系统达到同步所需要的时间越短,且同步效果越好.如 $k = 1.7$ 时,达到同步所需要的时间为 162 s ,而当 $k = 3$ 时,仅需 8 s .

4. 电路实验研究

采用线性电阻、线性电容、运算放大器(LM741)模拟乘法器(AD633)来设计实现 Liu 混沌系统的电路,其中运算放大器是用来进行电路的加减运算,而模拟乘法器则用来实现 Liu 混沌系统中的非线性项.为了有效地进行电路实验,设

$$u = 10x_1, v = 10y_1, w = 10z_1. \quad (14)$$

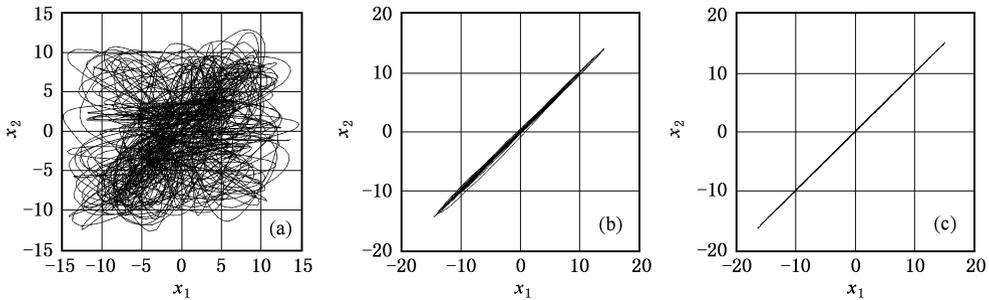


图 3 k 不同时,相应状态变量的相图 (a) $k = 1.2$, (b) $k = 1.7$, (c) $k = 3$

由于系统变量的变换,不影响系统的状态及性能,我们仍令

$$x_1 = u, y_1 = v, z_1 = w, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = bx_1 - 10x_1z_1, \\ \dot{z}_1 = -cz_1 + 10hx_1^2. \end{cases} \quad (16)$$

则(10)式可变为

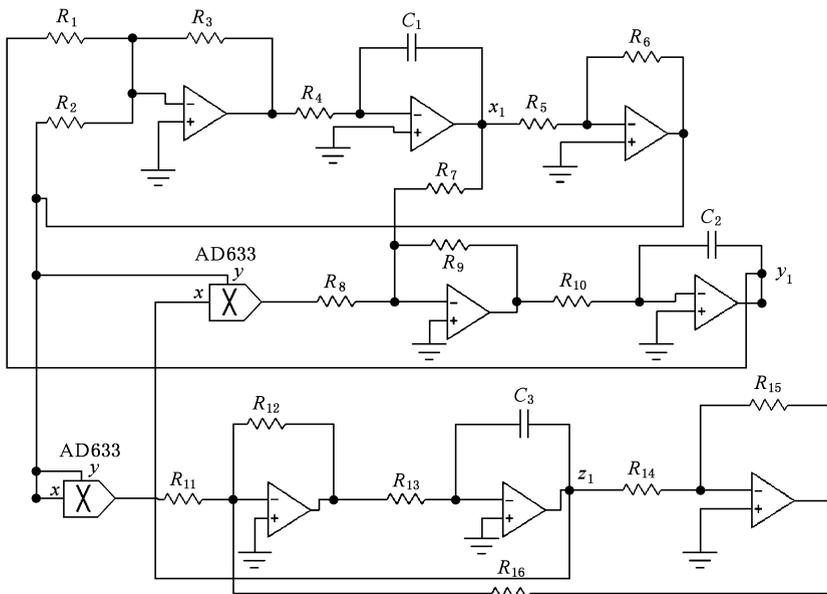


图 4 电路原理图

根据(16)式设计的电路原理图如图4.并由电路基本理论和各个元件特性,得其数学方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{R_3}{R_1 R_4 C_1} y_1 - \frac{R_6 R_3}{R_5 R_2 R_4 C_1} x_1, \\ \dot{y}_1 = \frac{R_9}{R_7 R_{10} C_2} x_1 - \frac{R_9 R_6}{10 R_5 R_8 R_{10} C_2} x_1 z_1, \\ \dot{z}_1 = -\frac{R_{12} R_{15}}{R_{13} R_{14} R_{16} C_3} z_1 + \frac{R_{12} R_6^2}{10 R_5^2 R_{11} R_{13} C_3} x_1^2. \end{cases} \quad (17)$$

令 $C_1 = C_2 = C_3 = C = 1 \mu\text{F}$, $R_2, R_6 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_1, R_5,$

$R_{12}, R_{14}, R_{15} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_8 = 8 \text{ k}\Omega$, $R_{11} = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4, R_{10}, R_{13} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_9 = 40 \text{ k}\Omega$, 把它们分别代入(17)式并与(16)式比较可得:

$$a = R_3 \times 10^{-3}, b = \frac{400 \times 10^3}{R_7}, c = \frac{100 \times 10^3}{R_{16}}. \quad (18)$$

当 $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{16} = 40 \text{ k}\Omega$, $R_7 = 10 \text{ k}\Omega$ 时,其实验相图如图5,与数值仿真图1一致.

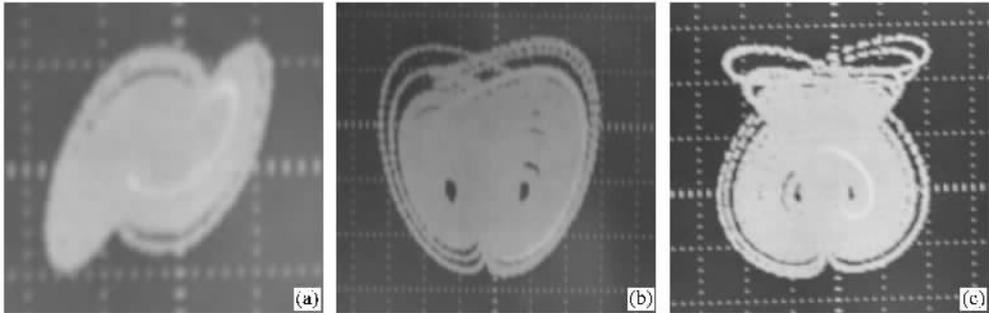


图5 Liu混沌系统电路实验相图(a) $x-y$ (1V/div, 2V/div), (b) $x-z$ (0.5V/div, 1V/div), (c) $y-z$ (1V/div, 2V/div)

反馈控制器如图6所示,其同步电路如图7所示.

$$\begin{aligned} u &= k'(x_1 - x_2) \\ &= -x_2 \frac{R_{21}}{R_{20}} + x_1 \frac{R_{18} R_{21}}{R_{17} R_{19}}, \end{aligned} \quad (19)$$

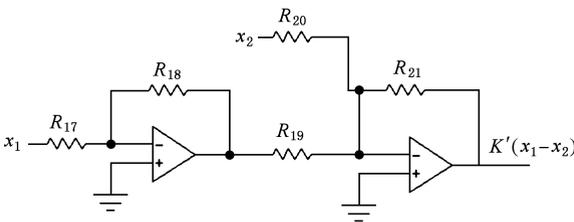


图6 反馈控制器

可得

$$k' = \frac{R_{21}}{R_{20}} = \frac{R_{18} R_{21}}{R_{17} R_{19}}, \quad (20)$$

令 $R_{17}, R_{18}, R_{19}, R_{20}, R_{21} = 10 \text{ k}\Omega$, 因此 $k' = 1$

$$k_1 = k' \frac{R_3}{R_{22} R_4 C_1}, \quad (21)$$

另外两个反馈控制器与图6一样,可得

$$k_2 = k' \frac{R_9}{R_{23} R_{10} C_2}, \quad (22)$$

$$k_3 = k' \frac{R_{12}}{R_{24} R_{13} C_3}, \quad (23)$$

由于 $k = k_1 = k_2 = k_3$ 得

$$4R_{22} = 4R_{24} = R_{23}, k = \frac{400 \times 10^3}{R_{23}}, \quad (24)$$

当 $R_{22}, R_{24} = 83.3 \text{ k}\Omega$, $R_{23} = 333.3 \text{ k}\Omega$ 时, $k = 1.2$, 当 $R_{22}, R_{24} = 58.8 \text{ k}\Omega$, $R_{23} = 235.3 \text{ k}\Omega$ 时, $k = 1.7$, 当 $R_{22}, R_{24} = 33.3 \text{ k}\Omega$, $R_{23} = 133.3 \text{ k}\Omega$ 时, $k = 3$, 当 k 分别为不同值时,相应状态变量的相图如图8.可见电路实验结果图8与数值仿真图3相一致,从而证实了该控制方法的有效性和可行性.

5. 结 论

基于线性反馈控制方法,利用混沌系统本身的混沌特性,推导出只要使控制参数大于混沌系统的最大李雅谱诺夫指数,则可以使混沌系统实现同步,且达到同步所需要的时间随着控制参数的增大而减小,并设计实际的硬件电路实现了Liu混沌系统以及主从Liu混沌系统之间的同步控制,数值仿真和硬件电路实验证实了线性反馈控制方法控制混沌同步的有效性和可行性.该控制方法以及控制参数取值范围的确定具有普适性,可应用于其他的混沌系统的同步控制当中.

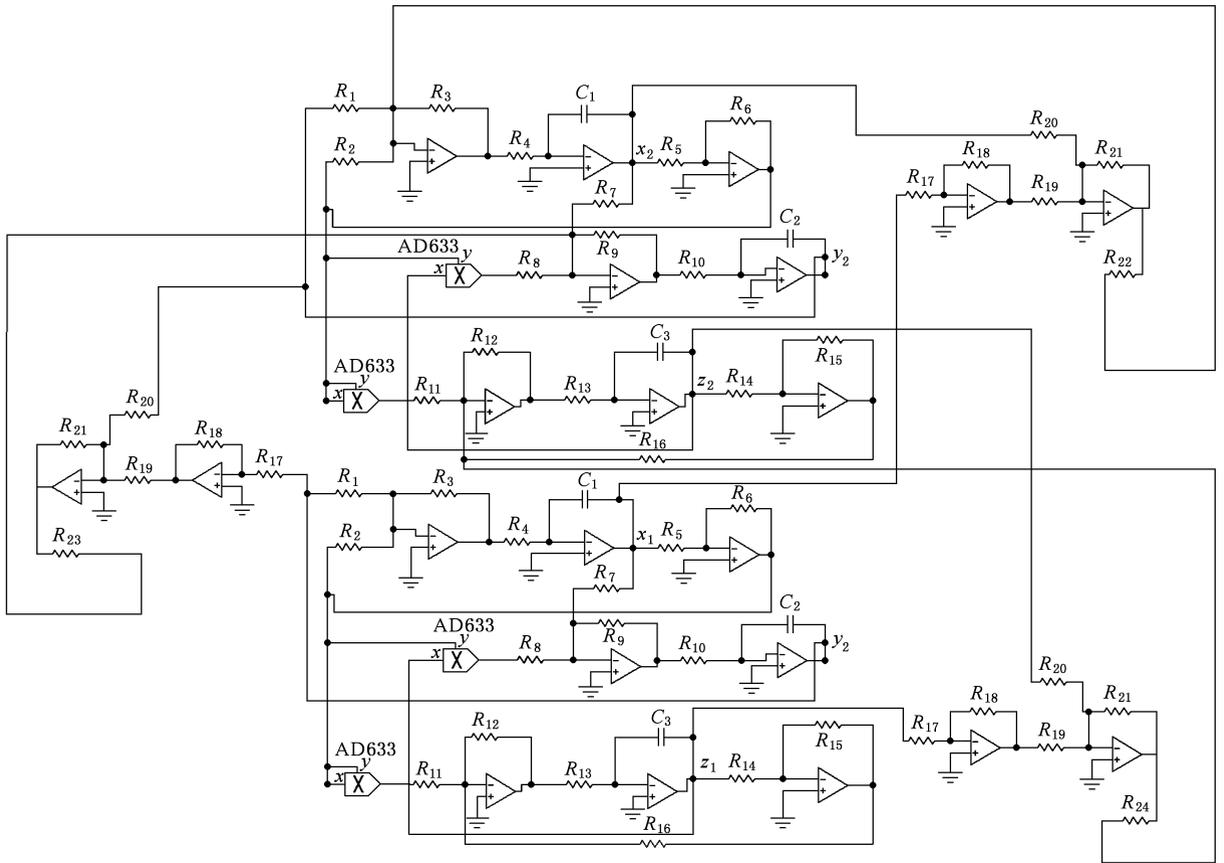
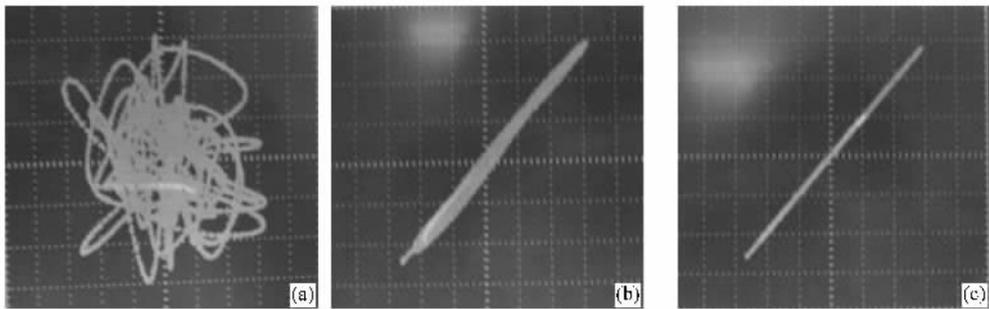


图 7 Liu 混沌同步电路

图 8 x_1 与 x_2 同步实验相图(500mV/div, 500mV/div) (a) $k=1.2$, (b) $k=1.2$, (c) $k=3$

- [1] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Wang T B , Qin T F , Chen G Z 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1851 (in Chinese) [王铁邦、覃团发、陈光旨 2001 物理学报 **50** 1851]
- [3] Chen Z S , Sun K H , Zhang T S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2580 (in Chinese) [陈志盛、孙克辉、张泰山 2005 物理学报 **54** 2580]
- [4] Gao T G , Chen Z Q , Yuan Z Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3274 (in Chinese) [高铁杠、陈增强、袁著祉 2004 物理学报 **53** 3274]
- [5] Guan X P , Huan Z P , Peng H P , Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2108 (in Chinese) [关新平、范正平、彭海朋、王益群 2001 物理学报 **50** 2108]
- [6] Wang J G , Zhao Y 2004 *Journal of Circuits and Systems* **9** 57 (in Chinese) [王建根、赵 怡 2004 电路与系统学报 **9** 57]
- [7] Ma J , Tang G N 2003 *Journal of Circuits and Systems* **8** 125 (in Chinese) [马 军、唐国宁 2003 电路与系统学报 **8** 125]

- [8] Chen G R , Lü J H 2003 *Analysis , Control and Synchronization of generalized Lorenz system* (Bei Jing : Science Press) p226 [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京 : 科学出版社)第 226 页]
- [9] Liu C X , Liu T , Liu K , Liu L 2004 *Chaos , Solitions and Fractals* **22** 1031

Synchronization of Liu chaotic system based on linear feedback control and its experimental verification

Wang Fa-Qiang Liu Chong-Xin

(*Institute of Electrical Engineering , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 ,China*)

(Received 22 February 2006 ; revised manuscript received 9 March 2006)

Abstract

Synchronization of Liu chaotic system is studied. Based on the characteristic of the chaotic system and linear feedback control method , the range of the controller parameter for synchronization is derived , the results of simulation and experiment are provided to show the effectiveness of the proposed method.

Keywords : Liu chaotic system , linear feedback control , chaos synchronization , circuit

PACC : 0545