

# Liu 混沌系统的混沌分析及电路实验的研究

王发强 刘崇新

(西安交通大学电气工程学院,西安 710049)

(2005 年 12 月 8 日收到,2006 年 2 月 15 日收到修改稿)

研究了一种新型混沌系统——Liu 混沌系统的基本动力学行为以及电路实现的问题,给出了相图、庞卡莱映射、功率谱以及李雅普诺夫指数,基于李雅普诺夫指数谱和分叉图分析了系统参数对 Liu 混沌系统的影响,最后设计硬件电路证实了 Liu 混沌系统以及 Liu 混沌系统随系统参数变化时的各种状态的存在,给出数值仿真和电路实验的结果.

关键词: Liu 混沌系统,分岔,电路实验

PACC: 0545

## 1. 引 言

自从 1963 年, Lorenz 在三维自治系统中发现了第一个混沌吸引子以来<sup>[1]</sup>,其混沌理论研究和实际应用得到了极大的关注<sup>[2-4]</sup>,但供研究的混沌系统并不多. 1999 年 Chen 等采用线性反馈控制方法控制 Lorenz 混沌系统而发现了一种与 Lorenz 混沌系统类似但不拓扑等价的 Chen 混沌系统<sup>[5]</sup>; 2001 年和 2002 年,吕金虎等人相继发现了 Li 混沌系统和连接上述三个混沌系统的统一混沌系统<sup>[6,7]</sup>; 2003 年, Liu 等发现了在三维连续自治混沌系统中能产生四螺旋混沌吸引子的混沌系统,并用实际的硬件电路证实了该混沌系统的存在<sup>[8]</sup>. 2005 年, Qi 等在 Lorenz 混沌系统的第一个式子上,加上一个非线性项,发现了一类变形 Lorenz 混沌系统,并对该混沌系统进行了详细的分析<sup>[9]</sup>. 2004 年, Liu 等提出了一类含有平方非

线性项的三阶连续自治混沌系统<sup>[10]</sup>,由于 Liu 混沌系统是一个新的混沌系统,开展其动力学特性及电路实现的研究具有重要的理论意义和实际价值.

## 2. Liu 混沌系统动力学分析及数值仿真

Liu 混沌系统是一类含有平方非线性项的混沌系统,其数学模型描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= bx - kxz, \\ \dot{z} &= -cz + hx^2. \end{aligned} \quad (1)$$

当  $a = 10, b = 40, k = 1, c = 2.5, h = 4$  时,混沌吸引子的相图如图 1 所示;庞卡莱映射如图 2 所示;功率谱图如图 3 所示. 利用 Jacobia 方法计算李雅普诺夫指数得

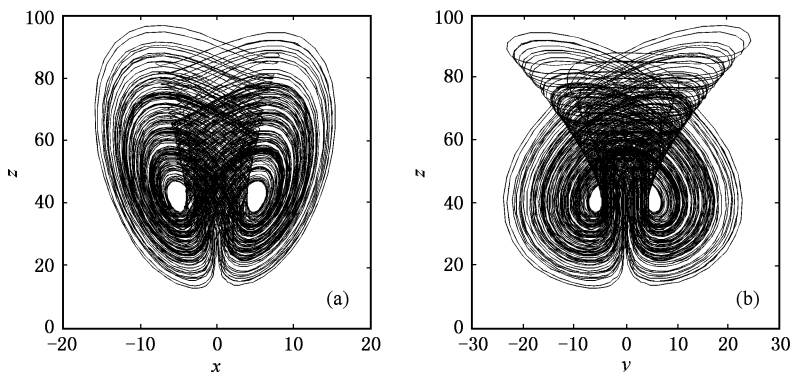


图 1 Liu 混沌系统的相图 (a)  $x-z$ , (b)  $y-z$

$$\lambda_{L_1} = 1.64328, \lambda_{L_2} = 0, \lambda_{L_3} = -14.42.$$

在本文中, 固定  $k=1, h=4$  不变. 因此, 从系统的各个相图、庞卡莱映射、功率谱以及系统的李雅普诺夫指数, 可知该系统为混沌系统.

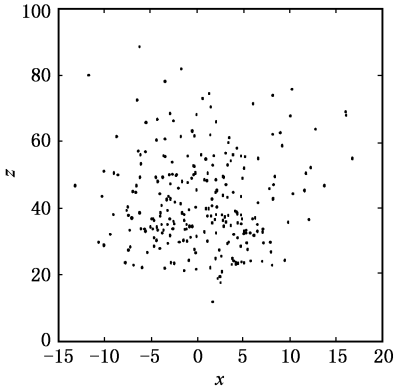


图2 庞卡莱映射

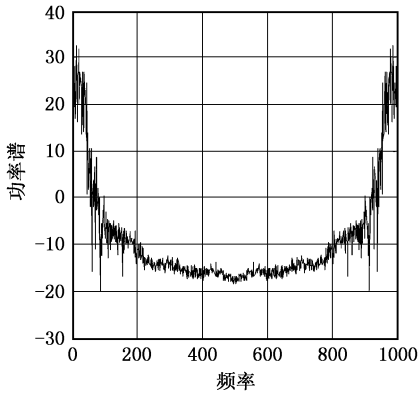


图3 功率谱

## 2.1. 基本的动力学分析

### (1) 对称性和不变性

由于在变换  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  系统的方程仍保持不变, 即系统的图象关于  $z$  轴对称, 且这种对称性对所有的系统参数都保持不变.

### (2) 耗散性和吸引子的存在性

由于

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \\ &= -a - c. \end{aligned} \quad (2)$$

当  $a+c>0$  时, 则系统(1)是耗散的, 且以指数形式收敛

$$\frac{dV}{dt} = e^{-(a+c)t}. \quad (3)$$

即体积元  $V_0$  在时刻  $t$  时收缩为体积元  $V_0 e^{-(a+c)t}$ . 这意味着, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨线的每个体积元以指数率  $-a-c$  收缩到零. 因此, 所有系统轨线最终会被限制在一个体积为零的集合上, 且它渐进运动固定在一个吸引子上.

### (3) 平衡点及稳定性

令(1)式的右边等于零, 即

$$\begin{aligned} a(y-x) &= 0, \\ bx - kxz &= 0, \\ -cz + hx^2 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

得三个平衡点为  $S_0 = (0, 0, 0)$ ;

$$S_+ = \left( \frac{\sqrt{bc}}{2}, \frac{\sqrt{bc}}{2}, b \right);$$

$$S_- = \left( -\frac{\sqrt{bc}}{2}, -\frac{\sqrt{bc}}{2}, b \right).$$

由其平衡点可知,  $a, c$  不变且都为正数, 当  $b>0$  时, 系统有三个平衡点; 当  $b<0$  时, 系统仅有一个平衡点, 可见在  $b=0$  处, 则出现叉式分岔.

把系统(1)在平衡点处线性化, 得其 Jacobia 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b - z_0 & 0 & -x_0 \\ 8x_0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其特征方程为

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\lambda + c)(\lambda^2 + a\lambda + az_0 - ab) + 8ax_0^2 \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

把  $S_0 = (0, 0, 0)$  代入(6)式, 得其特征多项式为

$$f_0(\lambda) = (\lambda + c)(\lambda^2 + a\lambda - ab) = 0, \quad (7)$$

其特征根为  $\lambda_1 = -c$ ;

$$\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2};$$

$$\lambda_3 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ab}}{2}.$$

若  $b>0$ , 则  $a^2 + 4ab > a^2$ , 从而  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0$ . 则  $S_0 = (0, 0, 0)$  平衡点是不稳定的且为三维空间中的一个鞍点.

若  $b<0$ , 则  $a^2 + 4ab < a^2$ , 从而  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$ . 则  $S_0 = (0, 0, 0)$  平衡点则唯一的平衡点且是稳定的汇.

把  $S_+$  代入(6)式, 得其特征多项式为

$$\begin{aligned} f_+(\lambda) &= \lambda^3 + (a+c)\lambda^2 + ac\lambda + 2abc \\ &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

由于  $a, c$  为正数, 若  $b>0$ , 则(8)式的所有系数

均为正,因此,对任意  $\lambda > 0$ ,则都有  $f_+(\lambda) > 0$ . 因此,要使平衡点不稳定,则(8)式必须有两个正实部的复共轭特征根. 若  $b = 0$ ,则(8)式有三个特征根:  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -a, \lambda_3 = -c$ . 当  $b$  从正趋近于零时,则  $\lambda$  的高阶项变的很小,忽略不计,则  $\lambda_1$  趋近于  $-2b$ , 因此,在极限状态的情况下,稳定性将失去. 在  $b$  从零逐渐增加的过程中,仅当  $\text{Re}(\lambda) = 0$  时,系统不稳定性才会发生. 此时(8)式的两个特征根则为  $\lambda_{1,2} = \pm wi$ ,其中  $w$  为实数.

从而可得  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -(a + c)$ ,因此,  $\lambda_3 = -a - c$ . 把它代入(8)式,有  $-a\lambda(a + c) + 2abc = 0$ , 即  $b_h = (a + c)/2$ ,若  $b < b_h$ ,则  $S_+$  和  $S_-$  均为稳定的汇. 若  $b > b_h$ ,则  $S_+$  和  $S_-$  均为不稳定的鞍焦点. 若  $b = b_h$  时,两个复共轭特征根为  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{ac}i$ , 由于

$$\lambda'(b) = \frac{-2ac}{3\lambda^2 + 2(a+c)\lambda + ac}, \quad (9)$$

因此

$$\alpha'(0) = \text{Re}\lambda'(b_h) = \frac{ac}{ac + (a+c)^2} > 0 \quad (10)$$

$$w'(0) = \text{Im}\lambda'(b_h) = \frac{(a+c)\sqrt{ac}}{ac + (a+c)^2} > 0. \quad (11)$$

所以,根据文献[11]有关霍普夫分岔的定理,则当  $b = b_h$  时,系统在平衡点  $S_+$  和  $S_-$  处将出现霍普夫分岔.

### 2.2. 系统参数的影响

从上面分析可知,随着系统参数的改变,系统平衡点的稳定性将会发生变化,从而该系统也将处于不同的状态. 下面利用数值仿真手段,分析各个系统参数变化时,系统的变化情况.

①当  $a, c$  不变,  $b$  改变时. 其李雅普诺夫指数谱如图 4 所示,分岔图如图 5 所示,可知:

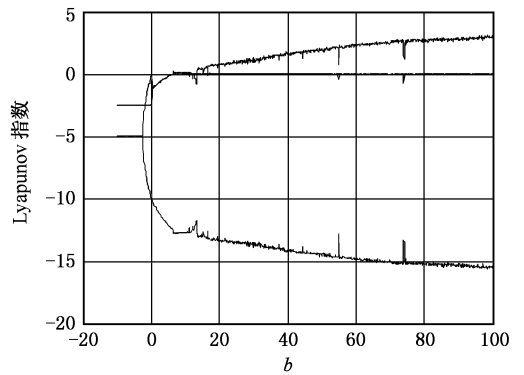


图 4 随  $b$  变化的李雅普诺夫指数谱

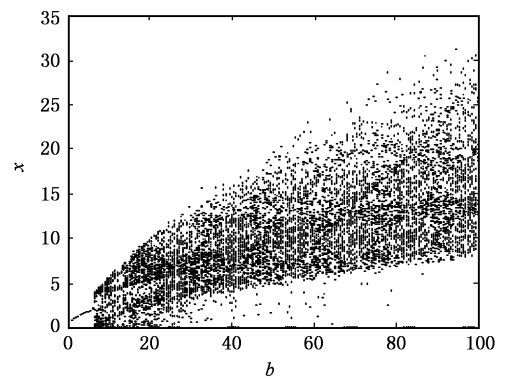


图 5 随  $b$  变化的分岔图

当  $b < 6.25$  时,系统为稳定状态,如图 6(a) 所示;

当  $b > 6.25$  时,系统为混沌状态,如图 6(b)和 (c)所示;

很显然,系统在  $b = 6.25$  时,发生了霍普夫分岔. 同时还可以得出,随着  $b$  的增大,系统的混沌性增强.

②当  $a, b$  不变,  $c$  改变时. 其李雅普诺夫指数谱如图 7 所示,分岔图如图 8 所示,可知:

当  $0 < c \leq 8$  时,系统为混沌状态,如图 9(a)所

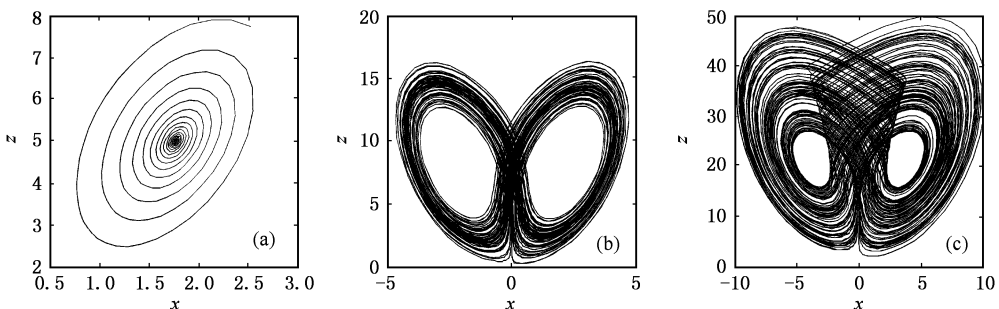


图 6  $b$  取不同值时的相图 (a)  $b = 5$  (b)  $b = 7$  (c)  $b = 20$

示；

当  $8 < c < 10.3$  时,系统为周期状态,如图 9(b) 所示；

当  $10.3 \leq c < 10.7$  时,系统为拟周期状态,如图

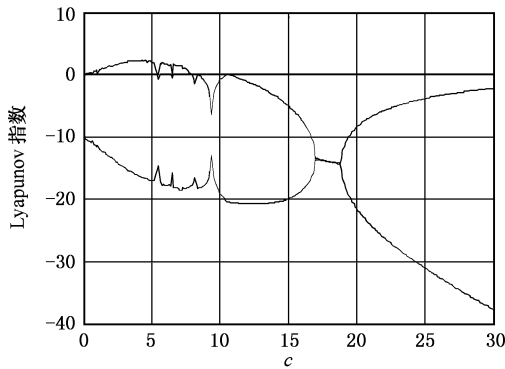


图 7 随  $c$  变化的李雅普诺夫指数谱

9(c) 所示；

当  $10.7 \leq c < 30$  时,系统为周期状态,如图 9(d) 所示.

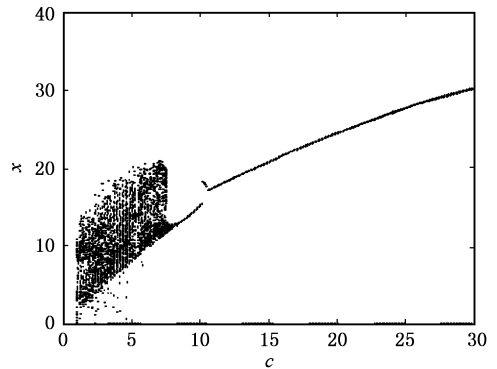


图 8 随  $c$  变化的分岔图

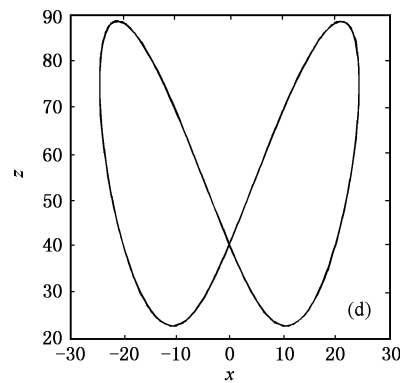
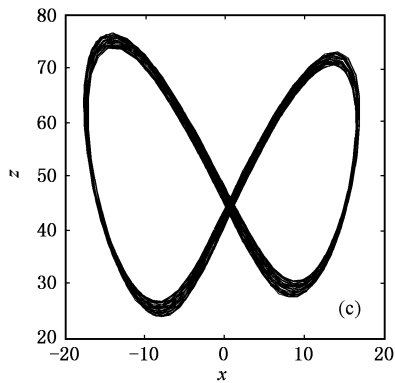
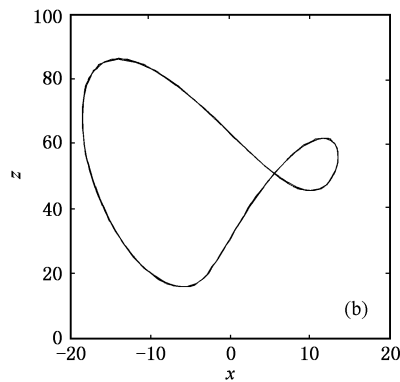
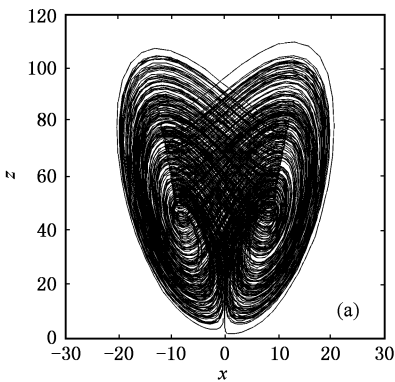


图 9  $c$  取不同值时的相图 (a)  $c=6$  (b)  $c=9$  (c)  $c=10.5$  (d)  $c=20$

③ 当  $b, c$  不变,  $a$  改变时,其李雅普诺夫指数谱如图 10 所示,分岔图如图 11 所示,可知：

当  $0 < a \leq 4$  时,系统为周期状态,如图 12(a) 所示；

当  $4 < a \leq 14$  时,系统为混沌状态,如图 12(b) 所示；

当  $14 < a \leq 18$  时,系统为周期状态,如图 12(c) 所示；

当  $18 < a \leq 42.5$  时,系统为混沌状态,如图 12(d) 所示；

当  $42.5 < a \leq 50$  时,系统为周期状态,如图 12(e) 所示.

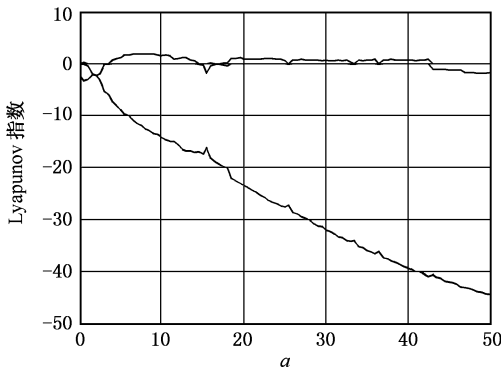


图 10 随  $a$  变化的李雅普诺夫指数谱

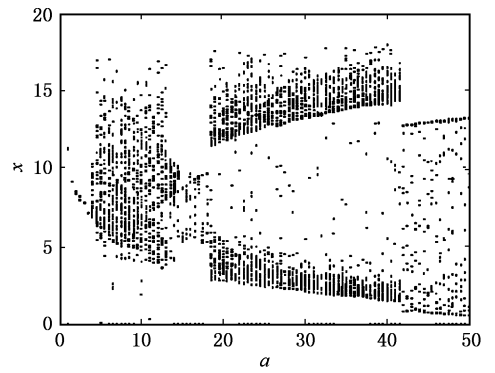


图 11 随  $a$  变化的分岔图

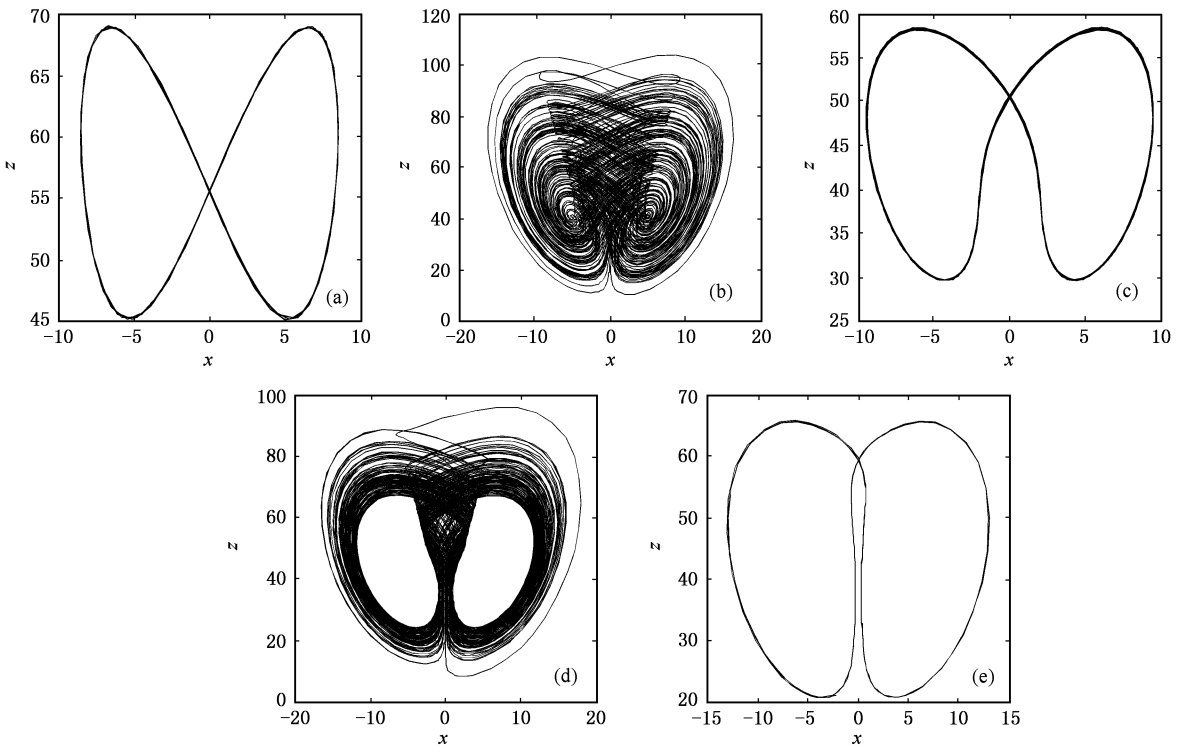


图 12  $a$  取不同值时的相图 (a)  $b=2$  (b)  $a=8$  (c)  $a=17$  (d)  $a=20$  (e)  $a=45$

### 3. Liu 混沌系统的电路实验研究

#### 3.1. 电路设计

采用线性电阻、线性电容、运算放大器 (LM741) 模拟乘法器 (AD633) 来设计实现 Liu 混沌系统的电路, 如图 13 所示, 其中运算放大器是用来进行电路的加减运算, 模拟乘法器则用来实现 Liu 混沌系统中的非线性项. 由于运算放大器 (LM741) 的容许电压仅为  $\pm 18V$ , 对于乘法器 (AD633) 来说, 其容许电压仅为  $\pm 10V$ . 为了有效的进行电路实验,

我们把混沌信号的输出电平调小为原来的  $1/10$ , 设

$$u = 10x, v = 10y, w = 10z. \quad (12)$$

又由于系统变量的变换, 不影响系统的状态及性能, 从而再令

$$x = u, y = v, z = w, \quad (13)$$

则式 (1) 可变为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= bx - 10kxz, \\ \dot{z} &= -cz + 10hx^2. \end{aligned} \quad (14)$$

根据电路理论以及各个元件的特性, 得其电路方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{R_3}{R_1 R_4 C_1} y - \frac{R_6 R_3}{R_5 R_2 R_4 C_1} x, \\ \dot{y} &= \frac{R_9}{R_7 R_{10} C_2} x - \frac{R_9 R_6}{10 R_5 R_8 R_{10} C_2} xz, \\ \dot{z} &= -\frac{R_{12} R_{15}}{R_{13} R_{14} R_{16} C_3} z + \frac{R_{12} R_6^2}{10 R_5^2 R_{11} R_{13} C_3} x^2. \end{aligned} \quad (15)$$

(15)与(14)式相比较,可得

$$a = \frac{R_3}{R_1 R_4 C_1} = \frac{R_6 R_3}{R_5 R_2 R_4 C_1}, \quad (16)$$

$$b = \frac{R_9}{R_7 R_{10} C_2}, \quad (17)$$

$$10k = \frac{R_9 R_6}{10 R_5 R_8 R_{10} C_2}, \quad (18)$$

$$c = \frac{R_{12} R_{15}}{R_{13} R_{14} R_{16} C_3}, \quad (19)$$

$$10h = \frac{R_{12} R_6^2}{10 R_5^2 R_{11} R_{13} C_3}, \quad (20)$$

令  $C_1 = C_2 = C_3 = C = 1\mu\text{F}$ ,  $R_2, R_6 = 20\text{ k}\Omega$ ,  $R_1, R_5, R_{12}, R_{14}, R_{15} = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_4, R_{10}, R_{13} = 100\text{ k}\Omega$ ,  $R_8 = 8\text{ k}\Omega$ ,  $R_{11} = 1\text{ k}\Omega$ ,  $R_9 = 40\text{ k}\Omega$ , 并分别代入(16)–(20)式可得

$$a = R_3 \times 10^{-3}; b = \frac{400 \times 10^3}{R_7}; k = 1;$$

$$c = \frac{100 \times 10^3}{R_{16}}; h = 4. \quad (21)$$

### 3. 2. 电路实验结果

当  $R_3 = 10\text{ k}\Omega$ ,  $R_{16} = 40\text{ k}\Omega$ ,  $R_7 = 10\text{ k}\Omega$  时, 有如图 14 的电路实验相图, 与数值仿真图 1 一致.

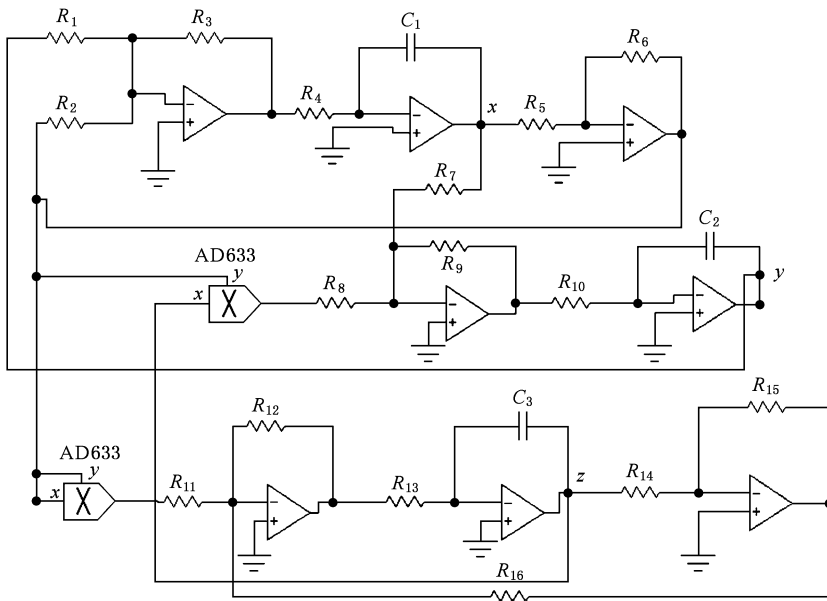


图 13 电路原理图

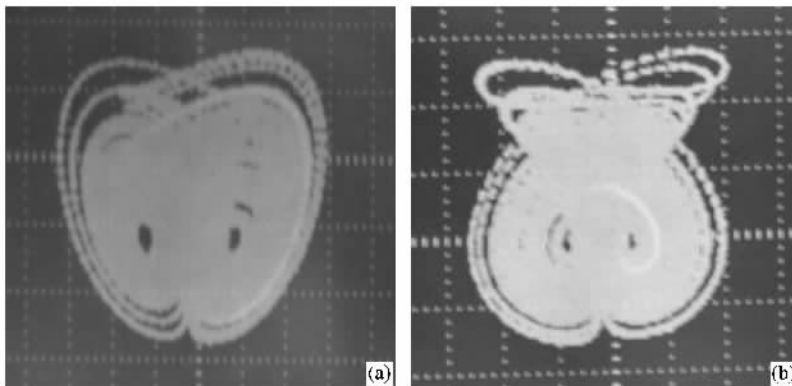


图 14 Liu 混沌系统的电路实验相图 (a)  $x-z$  ( $0.5\text{V}/\text{div}, 2\text{V}/\text{div}$ ); (b)  $y-z$  ( $1\text{V}/\text{div}, 2\text{V}/\text{div}$ )

(1) 令  $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{16} = 40 \text{ k}\Omega$ , 改变  $R_7$

根据(21)式知, 改变  $R_7$  就是改变系统参数  $b$ , 得其随着  $R_7$  减小的各个电路实验相图如图 15 所示. 与图 6 相比, 两者相一致.

(2) 令  $R_3 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_7 = 10 \text{ k}\Omega$ , 改变  $R_{16}$

根据(21)式知, 改变  $R_{16}$  就是改变系统参数  $c$ , 得其随着  $R_{16}$  减小的各个电路实验相图如图 16 所示. 与图 9 相比, 两者相一致.

(3) 令  $R_7 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R_{16} = 40 \text{ k}\Omega$ , 改变  $R_3$

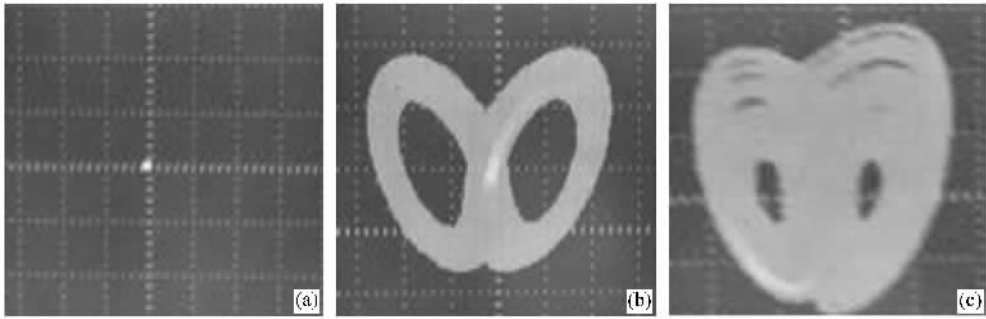


图 15  $R_7$  取不同值时的电路实验相图 (a)  $R_7 = 80 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div) (b)  $R_7 = 57.143 \text{ k}\Omega$  (0.2V/div, 0.5V/div); (c)  $R_7 = 20 \text{ k}\Omega$  (0.5V/div, 1V/div)

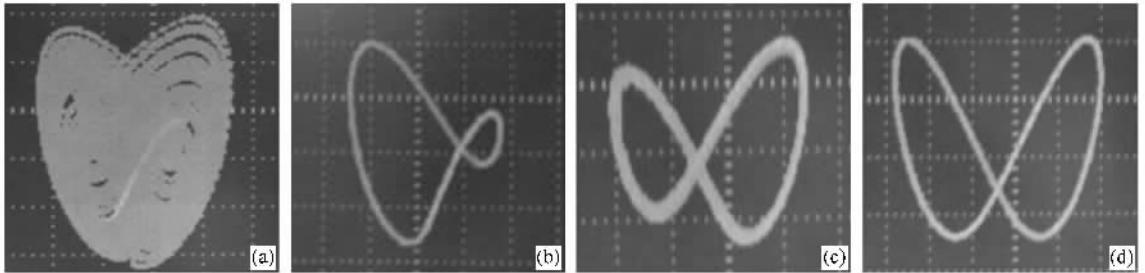


图 16  $R_{16}$  取不同值时电路实验的相图 (a)  $R_{16} = 16.67 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div) (b)  $R_{16} = 11.11 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div) (c)  $R_{16} = 9.5238 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div) (d)  $R_{16} = 5 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div)

根据(21)式知, 改变  $R_3$  就是改变系统参数  $a$ , 得其随着  $R_3$  增加的各个电路实验相图如图 17 所示. 与图 12 相比, 两者相一致.

## 4. 讨论与结论

仔细研究了 Liu 混沌动力学的基本动力学行为, 确定了 Liu 混沌系统的霍普夫分岔点和叉式分岔点, 重点分析了系统参数对整个混沌系统的影响, 给出了混沌系统关于随系统参数变化的李雅普诺夫指数谱、分岔图等. 据此得出系统参数在某一区间内的 Liu 混沌系统状态. 最后根据 Liu 混沌系统的数学模型设计具体的实际的电子电路, 给出各种参数值的电路实验相图. 得出结论如下:

(1) Liu 混沌系统在  $b = 0$  出现叉式分岔.  
(2) Liu 混沌系统在  $b = (a + c)/2$  出现霍普夫分岔.

(3) Liu 混沌系统当  $a, c$  不变,  $b$  改变时, 随着  $b$  的增大, 系统从稳定状态变为混沌状态, 且系统的混沌性增强.

(4) Liu 混沌系统当  $b, c$  不变,  $a$  改变时, 随着  $a$  的增大, 周期状态和混沌状态交替出现.

(5) Liu 混沌系统当  $a, b$  不变,  $c$  改变时, 随着  $c$  的增大, 系统则出现混沌、周期和拟周期三种状态.

(6) Liu 混沌系统电子电路实验相图与数值仿真相图保持一致, 证明了该设计电路的正确性, 同时也证明了 Liu 混沌系统的存在性以及 Liu 混沌系统随系统参数变化后的各种状态的存在性.

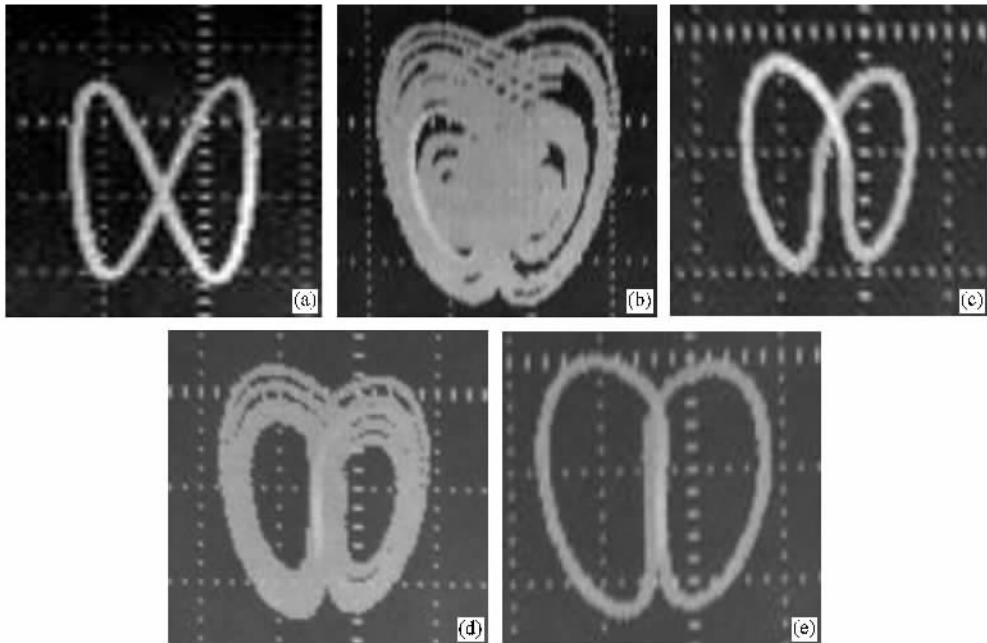


图 17  $R_3$  取不同值时的电路实验相图 (a)  $R_3 = 2 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 1V/div) (b)  $R_3 = 8 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div) (c)  $R_3 = 17 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div) (d)  $R_3 = 20 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div) (e)  $R_3 = 45 \text{ k}\Omega$  (1V/div, 2V/div)

- [ 1 ] Lorenz E N 1963 *J Atmos. Sci.* **20** 130
- [ 2 ] Wang L Z, Zhao W L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4038 (in Chinese)  
[ 王林泽、赵文礼 2005 物理学报 **54** 4038 ]
- [ 3 ] Yu L H, Fang J C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4012 (in Chinese)  
[ 于灵慧、房建成 2005 物理学报 **54** 4012 ]
- [ 4 ] Wu J G, Wu Z M, Lin X D *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4169  
(in Chinese) [ 吴加贵、吴正茂、林晓东等 2005 物理学报 **54** 4169 ]
- [ 5 ] Chen G R, Ueta T 1999 *Int J. Bifurcation and Chaos.* **9** 1465
- [ 6 ] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos.* **12** 659
- [ 7 ] Lü J H, Chen G R, Zhang S 2002 *Int. J. Bifurcation and Chaos.* **12** 2917
- [ 8 ] Liu W B, Chen G R 2003 *Int. J. Bifurcation and Chaos.* **13** 261
- [ 9 ] Qi G Y, Chen G R, Du S Z *et al* 2005 *Physical A* **352** 295
- [ 10 ] Liu C X, Liu T, Liu K *et al* 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 1031
- [ 11 ] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H 1981 *Theory and applications of Hopf Bifurcation* (London: Cambridge University Press) p14



# Studies on Liu chaotic system and its experimental confirmation

Wang Fa-Qiang Liu Chong-Xin

( *Institute of Electrical Engineering , Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 ,China* )

( Received 8 December 2005 ; revised manuscript received 15 February 2006 )

## Abstract

In this paper , the Liu chaotic system is discussed. Its basic dynamical behaviors , such as the phase portrait , Lyapunov exponents , Poincaré mapping , power spectrum are studied. The influence of system parameter on the chaotic system is discussed through Lyapunov exponents spectrum and bifurcation diagram. Various attractors are demonstrated not only by computer simulation but also by the realization of an electronic circuit.

**Keywords** : Liu chaotic system ; bifurcation ; circuit experiment

**PACC** : 0545