

变形耦合发电机系统中的混沌控制^{*}

王兴元[†] 武相军

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2005 年 12 月 8 日收到, 2006 年 3 月 11 日收到修改稿)

分别利用反馈和非反馈方法研究了变形耦合发电机系统的混沌控制问题, 并基于 Lyapunov 直接法和 Routh-Hurwitz 判据讨论了受控变形耦合发电机系统的混沌轨道达到不稳定平衡点或极限环时的条件, 同时给出了理论上的证明. 数值模拟进一步验证了这两种方法的有效性.

关键词: 变形耦合发电机系统, 反馈法, 非反馈法, 混沌控制

PACC: 0545, 0555

1. 引 言

1990 年, Ott, Grebogi 和 Yorke 基于有无穷多的不稳定周期轨道嵌入在奇怪吸引子中这一事实, 提出了一种利用混沌内在特性的控制策略(即 OGY 法)^[1]. 此后, 一些学者对 OGY 策略做了推广并用多种实验证实了其有效性, 从而在物理学界掀起了混沌控制的研究热潮^[2-4]. 现如今, 人们已尝试并提出了基于不同角度的各种混沌控制的方法^[5, 6]. 这些混沌控制方法可分为反馈和非反馈两类. 反馈方法主要是通过控制混沌系统中的不稳定周期轨道实现混沌控制, 非反馈方法是在控制参数或状态变量上施加一个弱的外部周期扰动, 使得混沌系统转化为周期轨道, 从而达到控制混沌的目的. 反馈控制方法有 OGY 法、自适应控制、线性反馈控制、变结构控制、模糊控制等^[7-21]; 非反馈控制法有弱周期参数扰动法、弱周期脉冲附加法、弱噪声信号附加法等^[22-28]. 需要指出的是: 上述方法并不是对所有混沌系统的控制都有效, 不同的方法有各自的优缺点, 具体情况要具体分析. 其他更有效、更方便的控制方法还有待发展. 为此, 本文分别利用反馈法和非反馈法实现了变形耦合发电机系统的混沌控制, 并给出了理论上的证明, 数值模拟验证了这两种控制方法的有效性.

2. 变形耦合发电机系统的描述

2.1. 混沌动力学行为分析

耦合发电机系统由一个具有混沌特征的三维自治方程组来描述, 它是由连接在一起的两台发电机组成, 其中任何一台发电机都处于另一台发电机产生的电流所形成的磁场之中^[29, 30]. 基于耦合发电机系统, 作者给出变形耦合发电机系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + y(z + \alpha), \\ \dot{y} = -\mu y + x(z - \alpha), \\ \dot{z} = z - xy, \end{cases} \quad (1)$$

这里 μ 和 α 是正的控制参数. 根据 Vaneeck 和 Celikovský 对三维自治系统的分类^[31], 可知系统(1)与耦合发电机系统拓扑不等价^[6].

当参数 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 时, 作者研究了系统(1)的动力学行为, 如图 1 所示. 图 1(a)反映出 $x(t)$ 的时间序列是非周期的. 图 1(b)表明 $x(t)$ 的功率谱的相对能量随频率的增加而减少, 符合 $1/f$ 分布; 功率谱在低频处出现了宽带的噪声背景. 这说明系统(1)可能具有混沌的动力学特征^[6]. 根据 Ramasubramanian 等计算微分方程组 Lyapunov 指数谱的方法^[32], 作者计算出系统(1)的 Lyapunov 指数谱(如图 1(c)所示). 由图 1(c)可知: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统(1)的三个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 0.507$, $\lambda_2 = -0.048$ 和 $\lambda_3 =$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60573172)和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(批准号: 20040081)资助的课题.

[†] E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

-3.459.再根据 Kaplan 和 Yorke 猜测^[6],可求出系统(1)的 Lyapunov 维数

$$d = j + \frac{1}{\lambda_{j+1}} \sum_{i=1}^j \lambda_i$$

$$= 2 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{|\lambda_3|} = 2.133.$$

上述分析表明此时系统(1)的运动是混沌的.

图 1(d)-(g)给出了当 $\mu=2$ 和 $\alpha=1$ 时,系统(1)的混沌吸引子及其二维投影.由图 1(d)-(g)可见,系统(1)的混沌吸引子除具有低维混沌吸引子的一般特点外,还具有其独特之处:吸引子的二维投影具有更复杂的折叠和拉伸轨线,这说明系统(1)在局部上比低维混沌系统具有更强的不稳定性,这使得对系统(1)的控制难度大大增加了.

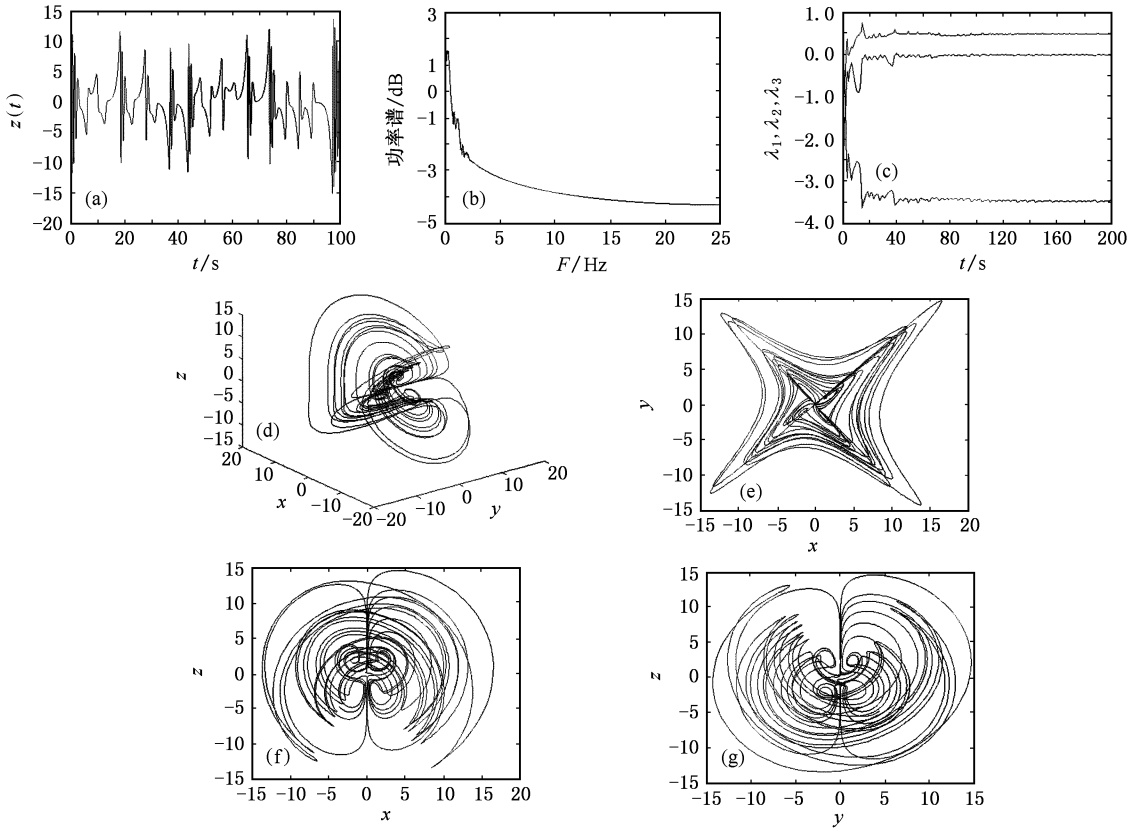


图 1 系统(1)的混沌动力学行为分析 (a) $z(t)$ 的变化曲线 (b) $z(t)$ 的功率谱图 (c) Lyapunov 指数谱图 (d) 混沌吸引子 (e) 吸引子在 $x-y$ 平面上的投影 (f) 吸引子在 $x-z$ 平面上的投影 (g) 吸引子在 $y-z$ 平面上的投影

2.2. 平衡点稳定性判断

令

$$\begin{cases} -\mu x + y(z + \alpha) = 0, \\ -\mu y + x(z - \alpha) = 0, \\ z - xy = 0, \end{cases} \quad (2)$$

求解方程(2),可得系统(1)的五个平衡点: $S_0(0,0,0)$, $S_1(\beta_1, \beta_2, \gamma)$, $S_2(-\beta_1, -\beta_2, \gamma)$, $S_3(-\beta_2, \beta_1, -\gamma)$ 和 $S_4(\beta_2, -\beta_1, -\gamma)$, 这里 $\beta_1 = \sqrt{\chi(\gamma + \alpha)\mu}$, $\beta_2 = \sqrt{\chi(\gamma - \alpha)\mu}$ 和 $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \mu^2}$.

当 $\mu > 1/2$ 时,系统(1)流的微分为

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

$$= -2\mu + 1 < 0,$$

这里 $F=(F_1, F_2, F_3)=(-\mu x + y(z + \alpha), -\mu y + x(z - \alpha), z - xy)$.可见系统(1)是受迫耗散系统.故 $\forall t \geq 0, \exists x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 全局有界并且连续可微.因此, $\forall t \geq 0$, 存在常数 $\xi > 0$, 使 $|x(t)| \leq \xi < \infty, |y(t)| \leq \xi < \infty$ 和 $|z(t)| \leq \xi < \infty$ 成立.

若将系统(1)的平衡点表示为 $S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 时, 则系统(1)的 Jacobi 矩阵为

$$J(S) = \begin{pmatrix} -\mu & \bar{z} + \alpha & \bar{y} \\ \bar{z} - \alpha & -\mu & \bar{x} \\ -\bar{y} & -\bar{x} & 1 \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$\lambda^3 + (2\mu - 1)\lambda^2 + (\alpha^2 + \mu^2 - 2\mu)\lambda$$

$$+(\mu \bar{z}^2 + \bar{z}^2 + 2\overline{xy}z - \mu^2 - \alpha^2) = 0. \quad (3)$$

命题 1 当参数 $\mu = 2, \alpha = 1$ 时, 系统(1)的平衡点 S_0 是鞍点, 且不稳定.

证明: 当 $\mu = 2, \alpha = 1$ 时, 将平衡点 S_0 的坐标代入(3)式, 可得

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 5 = 0. \quad (4)$$

方程(4)的特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2 + i$ 和 $\lambda_3 = -2 - i$. 由于存在正实根 λ_1 , 故 S_0 是鞍点且不稳定.

命题 2 当参数 $\mu = 2, \alpha = 1$ 时, 系统(1)的平衡点 S_1 是不稳定的.

证明: 当 $\mu = 2, \alpha = 1$ 时, 将平衡点 S_1 的坐标代入(3)式中, 可得

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 20 = 0. \quad (5)$$

方程(5)的特征根为 $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 0.5 + 2.1794i$ 和 $\lambda_3 = 0.5 - 2.1794i$. 由于存在负实根 λ_1 及共轭虚根 λ_2 和 λ_3 , 可见 S_1 是不稳定的.

同理可证系统(1)的平衡点 S_2, S_3 和 S_4 也是不稳定的.

3. 单反馈控制

受控变形耦合发电机系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + \gamma(z + \alpha) - u_1, \\ \dot{y} = -\mu y + \alpha(z - \alpha) - u_2, \\ \dot{z} = z - xy - u_3, \end{cases} \quad (6)$$

这里 u_1, u_2 和 u_3 是单反馈外部控制输入, 它们可使系统(1)的混沌运动轨道镇定到不稳定平衡点 $S_0, S_1 \sim S_4$ 或极限环上. 单变量反馈控制器为

$$\begin{cases} u_1 = k_1(x - \bar{x}), \\ u_2 = k_2(y - \bar{y}), \\ u_3 = k_3(z - \bar{z}), \end{cases} \quad (7)$$

(7)式中 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 代表系统(1)的不稳定平衡点, k_1, k_2 和 k_3 是正反馈增益. 将(7)式代入(6)式, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + \gamma(z + \alpha) - k_1(x - \bar{x}), \\ \dot{y} = -\mu y + \alpha(z - \alpha) - k_2(y - \bar{y}), \\ \dot{z} = z - xy - k_3(z - \bar{z}), \end{cases} \quad (8)$$

显然系统(8)有一个平衡点 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

3.1. 镇定到平衡点 S_0

命题 3 当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$, 且 $k_1 > 0, k_2 > 0$ 和

$k_3 > 1$ 时, 受控系统(8)渐进稳定并趋于平衡点 S_0 .

证明: 将平衡点 $S_0(0, 0, 0)$ 的坐标代入(8)式, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + \gamma(z + \alpha) - k_1 x, \\ \dot{y} = -\mu y + \alpha(z - \alpha) - k_2 y, \\ \dot{z} = z - xy - k_3 z, \end{cases} \quad (9)$$

受控系统(9)的 Lyapunov 函数定义为

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}z^2,$$

其满足如下条件:

(1) $V(0, 0, 0) = 0$;

(2) 对于平衡点 S_0 邻域内的任意点 (x, y, z) , 均有 $V(x, y, z) > 0$, 故 $V(x, y, z)$ 正定;

(3) 对函数 $V(x, y, z)$ 求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z \\ &= -\frac{\mu + k_1}{2}x^2 - \frac{\mu + k_2}{2}y^2 - (k_3 - 1)z^2, \end{aligned}$$

当 $k_1 > 0, k_2 > 0$ 和 $k_3 > 1$ 时, 有 $\dot{V} < 0$.

由条件(1)(2)和(3)可知, 受控系统(8)渐进稳定并趋于平衡点 S_0 .

3.2. 镇定到平衡点 S_1

命题 4 当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$, 且 $k_1 > 3.100688, k_2 = 0$ 和 $k_3 = 0$ 时, 系统(8)渐进稳定并趋于平衡点 S_1 .

证明: 将平衡点 $S_1(\beta_1, \beta_2, \gamma)$ 的坐标代入(8)式, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + \gamma(z + \alpha) - k_1(x - \beta_1), \\ \dot{y} = -\mu y + \alpha(z - \alpha) - k_2(y - \beta_2), \\ \dot{z} = z - xy - k_3(z - \gamma), \end{cases} \quad (10)$$

简便起见, 令 $X = x - \beta_1, Y = y - \beta_2$ 和 $Z = z - \gamma$, 则(10)式可改写为

$$\begin{cases} \dot{X} = -(\mu + k_1)X + (\gamma + \alpha)Y + \beta_2 Z \\ \quad + YZ + \beta_2(\gamma + \alpha) - \mu\beta_1, \\ \dot{Y} = (\gamma - \alpha)X - (\mu + k_2)Y + \beta_1 Z \\ \quad + XZ + \beta_1(\gamma - \alpha) - \mu\beta_2, \\ \dot{Z} = -\beta_2 X - \beta_1 Y + (1 - k_3)Z \\ \quad - XY + \gamma - \beta_1\beta_2. \end{cases} \quad (11)$$

(11)式的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_1) = \begin{pmatrix} -(\mu + k_1) & \gamma + \alpha & \beta_2 \\ \gamma - \alpha & -(\mu + k_2) & \beta_1 \\ -\beta_2 & -\beta_1 & 1 - k_3 \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + (k_1 + k_2 + k_3 + 2\mu - 1)\lambda^2 \\ & + [(\mu + k_2)k_3 - 1] + (\mu + k_1)(\mu + k_2 + k_3 - 1) \\ & + (\alpha^2 - \gamma^2) + \beta_1^2 + \beta_2^2 \lambda \\ & + [(\mu + k_1)(\mu + k_2)k_3 - 1] + (\mu + k_1)\beta_1^2 \\ & + (\alpha^2 - \gamma^2)k_3 - 1 + 2\gamma^2 \\ & + (\mu + k_2)\beta_2^2] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

令

$$\begin{cases} \theta_1 = k_1 + k_2 + k_3 + 2\mu - 1, \\ \theta_2 = (\mu + k_2)k_3 - 1 + (\mu + k_1)(\mu + k_2 + k_3 - 1) \\ \quad + (\alpha^2 - \gamma^2) + \beta_1^2 + \beta_2^2, \\ \theta_3 = (\mu + k_1)(\mu + k_2)k_3 - 1 + (\mu + k_1)\beta_1^2 \\ \quad + (\alpha^2 - \gamma^2)k_3 - 1 + 2\gamma^2 + (\mu + k_2)\beta_2^2. \end{cases} \quad (13)$$

当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 且 $k_1 > 3.100688$, $k_2 = 0$ 和 $k_3 = 0$ 时, 由 (13) 式可以得出 $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_3 > 0$ 和 $\theta_1\theta_2 > \theta_3$. 根据 Routh-Hurwitz 判据^[26]可知, 此时方程 (12) 的实根和复根的实部均为负值. 故受控系统 (8) 渐进稳定并趋于平衡点 S_1 .

3.3. 镇定到平衡点 S_2

命题 5 当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 且 $k_1 > 3.100688$, $k_2 = 0$ 和 $k_3 = 0$ 时, 系统 (8) 渐进稳定并趋于平衡点 S_2 .

模仿命题 4 的证明过程, 易证命题 5.

3.4. 镇定到平衡点 S_3

命题 6 当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 且 $k_1 = 0$, $k_2 > 3.100688$ 和 $k_3 = 0$ 时, 系统 (8) 渐进稳定并趋于平衡点 S_3 .

证明: 将平衡点 $S_3(-\beta_2, \beta_1, -\gamma)$ 的坐标代入 (8) 式, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + y(z + \alpha) - k_1(x + \beta_2), \\ \dot{y} = -\mu y + x(z - \alpha) - k_2(y - \beta_1), \\ \dot{z} = z - xy - k_3(z + \gamma). \end{cases} \quad (14)$$

为了简便起见, 令 $X = x + \beta_2$, $Y = y - \beta_1$ 和 $Z = z + \gamma$, 则 (14) 式可改写为

$$\begin{cases} \dot{X} = -(\mu + k_1)X + (\alpha - \gamma)Y + \beta_1 Z \\ \quad + YZ + \mu\beta_2 + (\alpha - \gamma)\beta_1, \\ \dot{Y} = -(\alpha + \gamma)X - (\mu + k_2)Y - \beta_2 Z \\ \quad + XZ + \beta_2(\alpha + \gamma) - \mu\beta_1, \\ \dot{Z} = -\beta_1 X + \beta_2 Y + (1 - k_3)Z \\ \quad - XY + \beta_1\beta_2 - \gamma. \end{cases} \quad (15)$$

(15) 式的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_3) = \begin{pmatrix} -(\mu + k_1) & \alpha - \gamma & \beta_1 \\ -(\alpha + \gamma) & -(\mu + k_2) & -\beta_2 \\ -\beta_1 & \beta_2 & 1 - k_3 \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$\begin{aligned} & \lambda^3 + (k_1 + k_2 + k_3 + 2\mu - 1)\lambda^2 \\ & + [(\mu + k_2)k_3 - 1] + (\mu + k_1)(\mu + k_2 \\ & + k_3 - 1) + (\alpha^2 - \gamma^2) + \beta_1^2 + \beta_2^2 \lambda \\ & + [(\mu + k_1)(\mu + k_2)k_3 - 1] + (\mu + k_1)\beta_1^2 \\ & + (\alpha^2 - \gamma^2)k_3 - 1 + 2\gamma^2 \\ & + (\mu + k_2)\beta_1^2] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

令

$$\begin{cases} \theta_1 = k_1 + k_2 + k_3 + 2\mu - 1, \\ \theta_2 = (\mu + k_2)k_3 - 1 + (\mu + k_1)(\mu + k_2 \\ \quad + k_3 - 1) + (\alpha^2 - \gamma^2) + \beta_1^2 + \beta_2^2, \\ \theta_3 = (\mu + k_1)(\mu + k_2)k_3 - 1 + (\mu + k_1)\beta_1^2 \\ \quad + (\alpha^2 - \gamma^2)k_3 - 1 + 2\gamma^2 + (\mu + k_2)\beta_1^2. \end{cases} \quad (17)$$

当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 且 $k_1 = 0$, $k_2 > 3.100688$ 和 $k_3 = 0$ 时, 由 (17) 式可以得出 $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_3 > 0$ 和 $\theta_1\theta_2 > \theta_3$. 根据 Routh-Hurwitz 判据^[26]可知, 此时方程 (16) 的实根和复根的实部均为负值. 故受控系统 (8) 渐进稳定并趋于平衡点 S_3 .

3.5. 镇定到平衡点 S_4

命题 7 当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 且 $k_1 = 0$, $k_2 > 3.100688$ 和 $k_3 = 0$ 时, 系统 (8) 渐进稳定并趋于平衡点 S_4 .

模仿命题 6 的证明过程, 易证命题 7.

3.6. 镇定到极限环

1) 镇定到围绕点 S_1 和 S_2 的极限环 令 $k_2 = 0$ 和 $k_3 = 0$, 则在平衡点 S_1 上 (8) 式可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + y(z + \alpha) - k_1(x - \beta_1), \\ \dot{y} = -\mu y + x(z - \alpha), \\ \dot{z} = z - xy. \end{cases} \quad (18)$$

(18) 式的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_1) = \begin{pmatrix} -(\mu + k_1) & \gamma + \alpha & \beta_2 \\ \gamma - \alpha & -\mu & \beta_1 \\ -\beta_2 & -\beta_1 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 时, 其特征方程为

$$\lambda^3 + (k_1 + 3)\lambda^2 + (k_1 + 1)\lambda$$

$$+ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} k_1 + 20 \right) = 0.$$

当 $k_1 = 3.100688$ 时,可求出特征根为 $\lambda_1 = -6.1007$, $\lambda_2 = 2.0250i$ 和 $\lambda_3 = -2.0250i$,故此时受控系统(8)的运动趋于一个围绕点 S_1 的极限环.同理,当 $k_1 = 3.100688$ 时,受控系统(8)的运动趋于一个围绕点 S_2 的极限环.故系统(8)的运动趋于围绕点 S_1 和 S_2 的极限环.

2) 镇定到围绕点 S_3 和 S_4 的极限环 令 $k_1 = 0$ 和 $k_3 = 0$,则在平衡点 S_3 上(8)式可写为

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + \gamma(z + \alpha), \\ \dot{y} = -\mu y + \alpha(z - \alpha) - k_2(y - \beta_1), \\ \dot{z} = z - xy. \end{cases} \quad (19)$$

(19)式的 Jacobi 矩阵为

$$J(S_3) = \begin{pmatrix} -\mu & \alpha - \gamma & \beta_1 \\ -(\gamma + \alpha) & -(\mu + k_2) & -\beta_2 \\ -\beta_1 & \beta_2 & 1 \end{pmatrix},$$

当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 时,其特征方程为

$$\lambda^3 + (k_2 + 3)\lambda^2 + (k_2 + 1)\lambda + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} k_2 + 20 \right) = 0.$$

当 $k_2 = 3.100688$ 时,可求出特征根为 $\lambda_1 = -6.1007$, $\lambda_2 = 2.0250i$ 和 $\lambda_3 = -2.0250i$,故此时受控系统(8)的运动趋于一个围绕点 S_3 的极限环.同理,当 $k_2 = 3.100688$ 时,受控系统(8)的运动趋于一个

围绕点 S_4 的极限环.故系统(8)的运动趋于围绕点 S_3 和 S_4 的极限环.

3.7. 数值模拟结果

选取 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$,初始值为 $x(0) = 1$, $y(0) = 2$ 和 $z(0) = 3$,时间步长为 $\tau = 0.002s$,采用四阶 Runge-Kutta 法去求解方程(8),作者利用单反馈法模拟了将系统(1)镇定到平衡点的过程(图2所示).其中图2(a)给出了 $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.4$ 和 $k_3 = 2$ 时,系统(8)镇定到 $S_0(0, 0, 0)$ 上的结果,图2(b)给出了 $k_1 = 38$, $k_2 = 0$ 和 $k_3 = 0$ 时,系统(8)镇定到 $S_1(1.9021, 1.1756, 2.2361)$ 上的结果,图2(c)给出了 $k_1 = 36$, $k_2 = 0$ 和 $k_3 = 0$ 时,系统(8)镇定到 $S_2(-1.9021, -1.1756, 2.2361)$ 上的结果,图2(d)给出了 $k_2 = 30$, $k_1 = 0$ 和 $k_3 = 0$ 时,系统(8)镇定到 $S_3(-1.1756, 1.9021, -2.2361)$ 上的结果,图2(e)给出了 $k_2 = 35$, $k_1 = 0$ 和 $k_3 = 0$ 时,系统(8)镇定到 $S_4(1.1756, -1.9021, -2.2361)$ 上的结果.

由图2(a)可见:在18s的时间内,系统(8)的 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 都稳定到了0,即被镇定到 $S_0(0, 0, 0)$ 上;由图2(b)可见:当 $t = 15s, 44s$ 和 $36s$ 时, $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳定到了1.9021, 1.1756 和 2.2361,即系统(8)被镇定到 $S_1(1.9021, 1.1756, 2.2361)$ 上;由图2(c)可见:当 $t = 21s, 32s$ 和 $31.5s$ 时, $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳定到了 $-1.9021, -1.1756$ 和 2.2361,即系统(8)被镇定

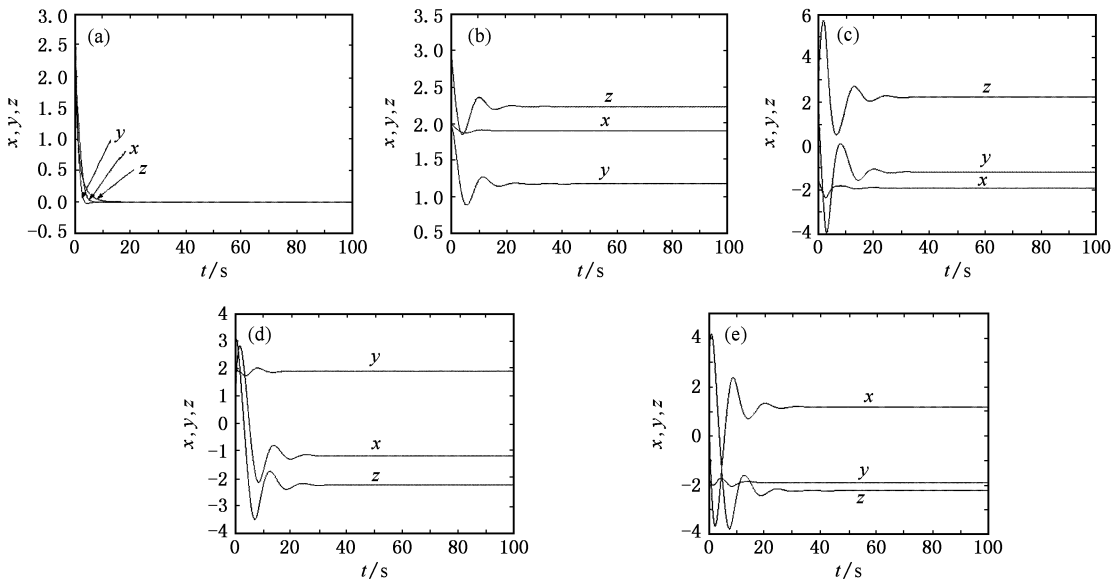


图2 利用单反馈镇定系统(1)到平衡点时 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 的变化曲线 (a) 镇定到点 S_0 (b) 镇定到点 S_1 (c) 镇定到点 S_2 (d) 镇定到点 S_3 (e) 镇定到点 S_4

到 $S_2(-1.9021, -1.1756, 2.2361)$ 上; 由图 2(d) 可见: 当 $t = 29\text{ s}$, 20 s 和 31 s 时, $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳定到了 -1.1756 , 1.9021 和 -2.2361 , 即系统 (8) 被镇定到 $S_3(-1.1756, 1.9021, -2.2361)$ 上; 由图 2(e) 可见: 当 $t = 35\text{ s}$, 18 s 和 45 s 时, $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳定到了 1.1756 , -1.9021 和 -2.2361 , 即系统 (8) 被镇定到 $S_4(1.1756, -1.9021, -$

$2.2361)$ 上.

由图 3 可见, 此时受控系统 (8) 的稳定状态是围绕着平衡点 S_1, S_2, S_3 和 S_4 的四个极限环, 这四个稳定极限环均为一个闭合环, 邻近的轨道都向它收敛. 这符合上述理论分析结果: 系统 (8) 的运动轨道将收敛到围绕点 S_1 和 S_2 的二个极限环, 或围绕点 S_3 和 S_4 的二个极限环.

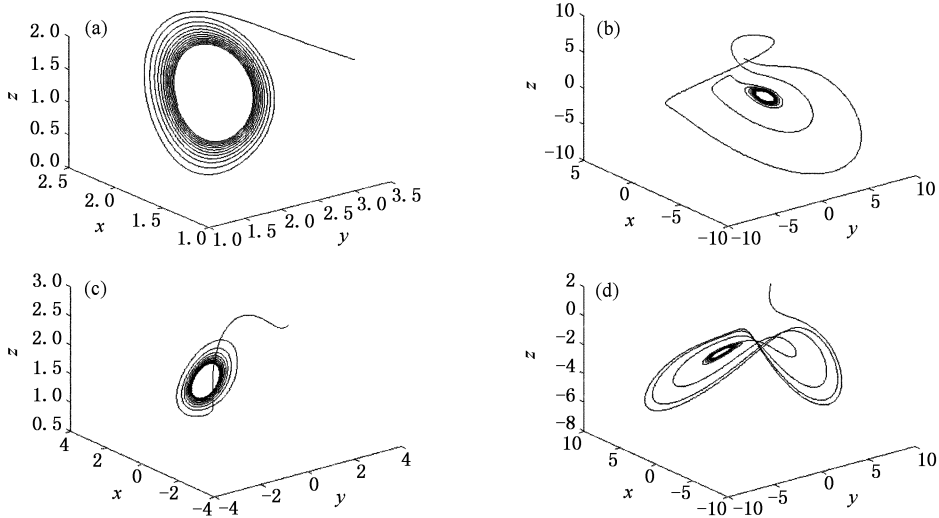


图 3 利用单反馈镇定系统 (1) 到极限环的模拟结果 (a) 围绕平衡点 S_1 的极限环 (b) 围绕平衡点 S_2 的极限环 (c) 围绕平衡点 S_3 的极限环 (d) 围绕平衡点 S_4 的极限环

4. 双反馈控制

利用双反馈控制也可将系统 (1) 的混沌运动镇定到不稳定平衡点 S_0, S_1-S_4 或极限环上. 双反馈控制器为

$$\begin{cases} u_1 = k_1[-\mu x + y(z + \alpha)], \\ u_2 = k_2(y - \bar{y}), \end{cases} \quad (20)$$

(20) 式中 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ 为系统 (1) 的不稳定平衡点, k_1 和 k_2 是正反馈增益.

4.1. 镇定到平衡点 S_0

仅对系统 (1) 的第三式施加控制, 可得受控系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + y(z + \alpha), \\ \dot{y} = -\mu y + x(z - \alpha), \\ \dot{z} = z - xy - k_1[-\mu y + x(z - \alpha)] \\ \quad - k_2(z - \bar{z}). \end{cases} \quad (21)$$

命题 8 当 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 时, 且 $k_1 > 0$ 和 $k_2 > 1$, 受控系统 (21) 渐进稳定并趋于平衡点 S_0 .

证明 将平衡点 $S_0(0, 0, 0)$ 的坐标代入 (21) 式, 可得 (21) 式的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & \alpha & 0 \\ -\alpha & -\mu & 0 \\ ak_1 & \mu k_1 & 1 - k_2 \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$\lambda^3 + (k_2 + 2\mu - 1)\lambda^2 + (\mu^2 + 2\mu k_2 - 2\mu + \alpha)\lambda + (\mu^2 k_2 + \alpha k_2 - \mu^2 - \alpha) = 0. \quad (22)$$

将 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 带入 (22) 式, 可得

$$\lambda^3 + (k_2 + 3)\lambda^2 + (4k_2 + 1)\lambda + (5k_2 - 5) = 0. \quad (23)$$

当 $k_1 > 0$ 和 $k_2 > 1$ 时, 有 $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_3 > 0$ 和 $\theta_1 \theta_2 > \theta_3$. 根据 Routh-Hurwitz 判据^[26]可知, 方程 (23) 的实根和复根的实部均为负值, 受控系统 (21) 渐进稳定并趋于平衡点 S_0 .

4.2. 镇定到平衡点 S_1, S_2, S_3 和 S_4

仅对系统 (1) 的第二式施加控制, 可得受控系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + y(z + \alpha), \\ \dot{y} = -\mu y + x(z - \alpha) \\ \quad - k_1[-\mu x + y(z + \alpha)] - k_2(y - \bar{y}), \\ \dot{z} = z - xy. \end{cases} \quad (24)$$

(24) 式的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\mu & \bar{z} + \alpha & \bar{y} \\ \mu k_1 + (\bar{z} - \alpha) & -\mu - k_2 - (\bar{z} + \alpha)k_1 & \bar{x} - \bar{y}k_1 \\ -\bar{y} & -\bar{x} & 1 \end{pmatrix},$$

特征方程为

$$\begin{aligned} &\lambda^3 + [\bar{z}k_1 + \alpha k_1 + k_2 + 2\mu - 1]\lambda^2 \\ &+ (\mu^2 - 2\mu + \mu k_2 - k_2 - 2\bar{z}k_1 - \alpha k_1 + \alpha^2)\lambda \\ &+ (\mu\bar{z}^2 + 3\bar{z}^2 - \alpha^2 + \bar{y}^2 k_2 \\ &- \mu k_2 - \mu^2) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

令

$$\begin{cases} \theta_1 = \bar{z}k_1 + \alpha k_1 + k_2 + 2\mu - 1, \\ \theta_2 = \mu^2 - 2\mu + \mu k_2 - k_2 \\ \quad - 2\bar{z}k_1 - \alpha k_1 + \alpha^2, \\ \theta_3 = \mu\bar{z}^2 + 3\bar{z}^2 - \alpha^2 \\ \quad + \bar{y}^2 k_2 - \mu k_2 - \mu^2. \end{cases} \quad (26)$$

1) 镇定到平衡点 S_1 将平衡点 $S_1(\beta_1, \beta_2, \gamma)$ 的坐标代入(25)式, 可得

$$\begin{aligned} &\lambda^3 + [(\gamma + 1)k_1 + k_2 + 3]\lambda^2 \\ &+ [k_2 - (2\gamma + 1)k_1 + 1]\lambda \\ &+ [(\beta_2^2 - 2)k_2 + 20] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

将 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 代入(26)式, 并基于 Routh-Hurwitz 判据^{26]}: $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_3 > 0$ 和 $\theta_1\theta_2 > \theta_3$, 可求得

$$\begin{cases} k_1 > 0, \\ k_2 > 0, \\ (\beta_2^2 - 2)k_2 + 20 > 0, \\ k_2 - (2\gamma + 1)k_1 + 1 > 0, \\ [(\gamma + 1)k_1 + k_2 + 3][k_2 - (2\gamma + 1)k_1 + 1] \\ > [(\beta_2^2 - 2)k_2 + 20]. \end{cases} \quad (28)$$

由(28)式可得 k_1-k_2 平面上稳定区与不稳定区分布如图 4. 若点 (k_1, k_2) 取自稳定区, 则方程(25)的实根和复根的实部均为负值, 系统(24)渐进稳定并趋于平衡点 S_1 ; 若点 (k_1, k_2) 取自不稳定区, 则系

统(24)不稳定; 若点 (k_1, k_2) 取自稳定区和不稳定区的分界线上, 则系统(24)的运动轨道将趋于一个极限环.

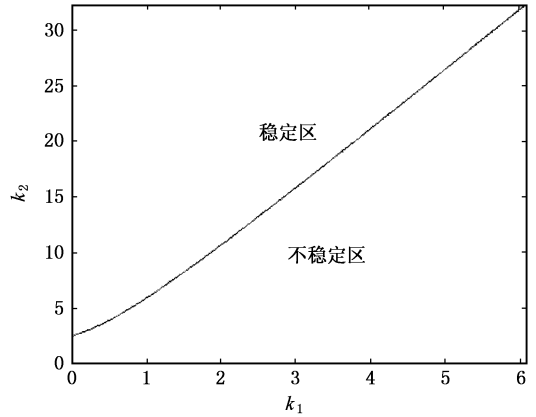


图 4 利用双反馈镇定系统(1)到平衡点 S_1 上时稳定区与不稳定区的分布

2) 镇定到平衡点 S_2 将平衡点 $S_2(-\beta_1, -\beta_2, \gamma)$ 的坐标代入(25)式, 可得方程(27), 故此时系统(24)的运动与被镇定到平衡点 S_1 时相同.

3) 镇定到平衡点 S_3 将平衡点 $S_3(-\beta_2, \beta_1, -\gamma)$ 的坐标代入(25)式, 可得

$$\begin{aligned} &\lambda^3 + [(1 - \gamma)k_1 + k_2 + 3]\lambda^2 \\ &+ [k_2 + (2\gamma - 1)k_1 + 1]\lambda \\ &+ [(\beta_1^2 - 2)k_2 + 20] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

将 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$ 代入(26)式, 并基于 Routh-Hurwitz 判据^{26]}: $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \theta_3 > 0$ 和 $\theta_1\theta_2 > \theta_3$, 可求得

$$\begin{cases} k_1 > 0, \\ k_2 > 0, \\ (1 - \gamma)k_1 + k_2 + 3 > 0, \\ [(1 - \gamma)k_1 + k_2 + 3][k_2 + (2\gamma - 1)k_1 + 1] \\ > [(\beta_1^2 - 2)k_2 + 20]. \end{cases} \quad (30)$$

由(30)式可得 k_1-k_2 平面上稳定区与不稳定区分布如图 5. 若点 (k_1, k_2) 取自稳定区, 则方程(29)的实根和复根的实部均为负值, 系统(24)渐进稳定并趋于平衡点 S_3 ; 若点 (k_1, k_2) 取自不稳定区, 则系统(24)不稳定; 若点 (k_1, k_2) 取自稳定区和不稳定区的分界线上, 则系统(24)的运动轨道将趋于一个极限环.

4) 镇定到平衡点 S_4 将平衡点 $S_4(\beta_2, -\beta_1, -$

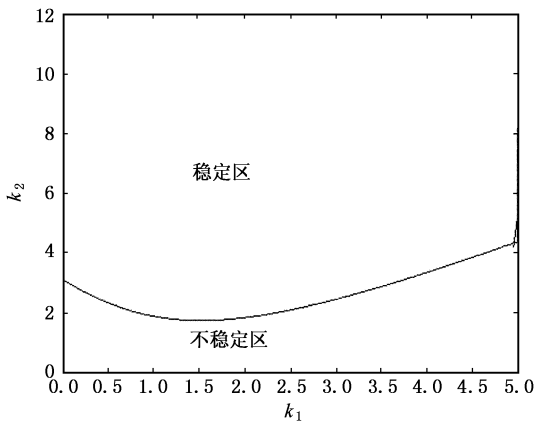


图 5 利用双反馈镇定系统(1)到平衡点 S_3 上时稳定区与不稳定区的分布

γ 的坐标代入式(25),可得方程(29),故此时代系统(24)的运动与被镇定到平衡点 S_3 时相同。

4.3. 镇定到极限环

若点 (k_1, k_2) 取自图 4 的稳定区和不稳定区的分界线上,则系统(24)的运动轨道将趋于围绕点 S_1 和 S_2 的极限环;若点 (k_1, k_2) 取自图 5 的稳定区和不稳定区的分界线上,则系统(24)的运动轨道将趋于围绕点 S_3 和 S_4 的极限环。

4.4. 数值模拟

选取 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$, 初始值为 $x(0) = 1, y(0) =$

2 和 $z(0) = 3$, 时间步长为 $\tau = 0.002$ s, 采用四阶 Runge-Kutta 法去求解方程(21)和(24), 本文利用双反馈法模拟了将系统(1)镇定到平衡点的过程(图 6 所示)。其中图 6(a)给出了 $k_1 = 1$ 和 $k_2 = 2$ 时, 系统(21)镇定到平衡点 $S_0(0, 0, 0)$ 上的结果; 图 6(b)给出了 $k_1 = 0.5$ 和 $k_2 = 12$ 时, 系统(24)镇定到平衡点 $S_1(1.9021, 1.1756, 2.2361)$ 上的结果; 图 6(c)给出了 $k_1 = 0.1$ 和 $k_2 = 6$ 时, 系统(24)镇定到平衡点 $S_2(-1.9021, -1.1756, 2.361)$ 上的结果; 图 6(d)给出了 $k_1 = 0.6$ 和 $k_2 = 10$ 时, 系统(24)镇定到平衡点 $S_3(-1.1756, 1.9021, -2.2361)$ 上的结果; 图 6(e)给出了 $k_1 = 0.4$ 和 $k_2 = 9$ 时, 系统(24)镇定到平衡点 $S_4(1.1756, -1.9021, -2.2361)$ 上的结果。

由图 6(a)可见: 在 19 s 的时间内, 系统(21)的 $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 都稳定到了 0, 即被镇定到 $S_0(0, 0, 0)$ 上; 由图 6(b)可见: 当 $t = 55$ s, 64 s 和 70.5 s 时, $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳定到了 1.9021, 1.1756 和 2.2361, 即系统(24)被镇定到 $S_1(1.9021, 1.1756, 2.2361)$ 上; 由图 6(c)可见: 当 $t = 49$ s, 51 s 和 58 s 时, $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳定到了 -1.9021, -1.1756 和 2.2361, 即系统(24)被镇定到 $S_2(-1.9021, -1.1756, 2.2361)$ 上; 由图 6(d)可见: 当 $t = 33$ s, 23 s 和 34 s 时, $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳定到了 -1.1756, 1.9021 和 -2.2361, 即系统(24)被镇定到 $S_3(-1.1756, 1.9021, -2.2361)$ 上; 由图 6(e)可见: 当 $t = 38$ s, 32 s 和 43 s 时, $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 分别稳

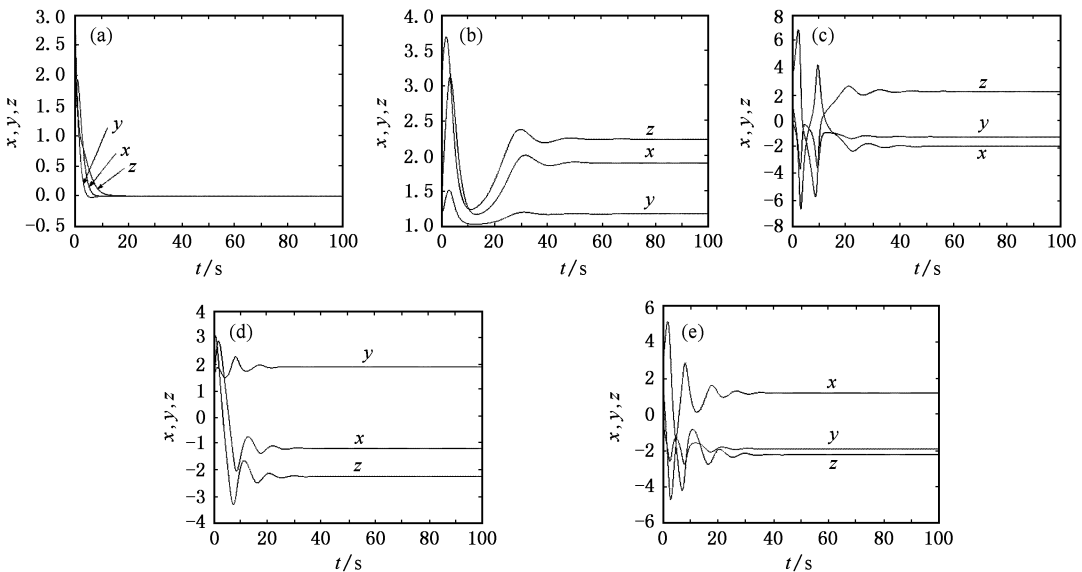


图 6 利用双反馈镇定系统(1)到平衡点时 $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 的变化曲线 (a) 镇定到点 S_0 (b) 镇定到点 S_1 (c) 镇定到点 S_2 (d) 镇定到点 S_3 (e) 镇定到点 S_4

定到了 1.1756, -1.9021 和 -2.2361, 即系统 (24) 被镇定到 $S_4(1.1756, -1.9021, -2.2361)$ 上。

由图 7 可看到, 此时受控系统 (24) 的稳定状态是围绕平衡点 S_1, S_2, S_3 和 S_4 的四个极限环, 这四

个稳定极限环均是一个闭环, 邻近的轨道都向它收敛。这符合上述理论分析结果: 系统 (24) 的运动轨道将收敛到围绕点 S_1 和 S_2 的二个极限环, 或围绕点 S_3 和 S_4 的二个极限环。

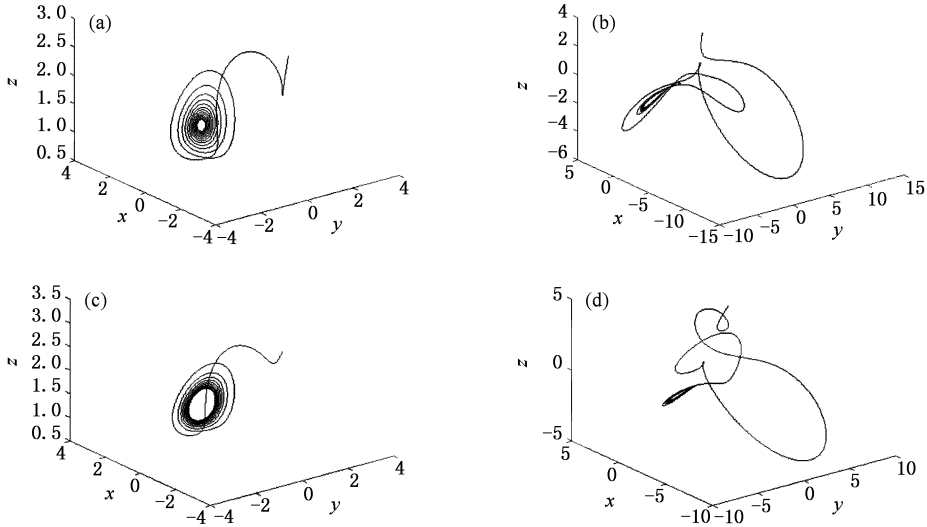


图 7 利用双反馈镇定系统 (1) 到极限环的模拟结果 (a) 围绕平衡点 S_1 的极限环 (b) 围绕平衡点 S_2 的极限环 (c) 围绕平衡点 S_3 的极限环 (d) 围绕平衡点 S_4 的极限环

5. 非反馈控制

5.1. 控制器设计

常用的非反馈控制函数为

$$u = f_1 + f_2 \sin(\omega t), \quad (31)$$

式中 f_1 是常数偏量, f_2 是幅度值, ω 是外部周期信号的频率。

1) 方法一 将控制器加到系统 (1) 的第二式上, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + y(z + \alpha), \\ \dot{y} = -\mu y + x(z - \alpha) \\ \quad + f_1 + f_2 \sin(\omega t), \\ \dot{z} = z - xy. \end{cases} \quad (32)$$

受控系统 (32) 是耗散的, 并且是连续有界的。当 f_1, f_2 和 ω 取某个确定的值时, 系统 (1) 将被控制到某一周期轨道上。

2) 方法二 将控制器施加到系统 (1) 的第三式上, 可得

$$\begin{cases} \dot{x} = -\mu x + y(z + \alpha), \\ \dot{y} = -\mu y + x(z - \alpha), \\ \dot{z} = z - xy + f_1 + f_2 \sin(\omega t). \end{cases} \quad (33)$$

当 f_1, f_2 和 ω 取某个确定的值时, 系统 (1) 将被控制到某一周期轨道上。

5.2. 数值模拟

选取 $\mu = 2$ 和 $\alpha = 1$, 初始值为 $x(0) = 1, y(0) = 2$ 和 $z(0) = 3$, 时间步长为 $\tau = 0.002s$, 采用四阶 Runge-Kutta 法去求解方程 (32) 和 (33), 本文利用非反馈法模拟了将系统 (1) 控制到某一周期轨道上的过程 (图 8 所示)。图 8(a) 给出了: 当选取 $f_1 = 2.379, f_2 = 0.118$ 和 $\omega = 0.0512$ 时, 利用方法一可将系统 (1) 控制到一个极限环上; 图 8(b) 给出了: 当选取 $f_1 = 1.379, f_2 = 0.118$ 和 $\omega = 0.0512$ 时, 利用方法二可将系统 (1) 控制到另一个极限环上。

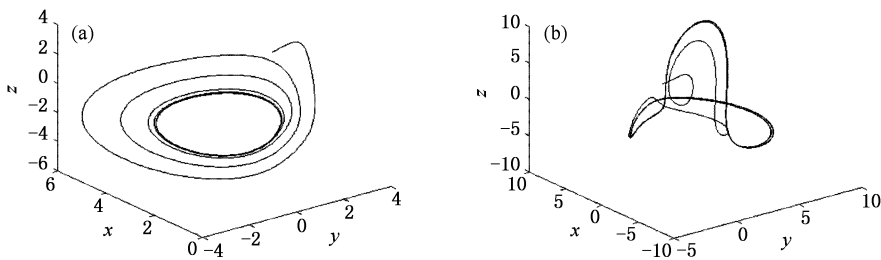


图 8 利用非反馈法控制系统(1)到极限环上的模拟结果 (a)采用控制方法一 (b)采用控制方法二

6. 结 论

分别利用单反馈、双反馈和非反馈方法实现了变形耦合发电机的混沌控制,并基于 Lyapunov 直接法和 Routh-Hurwitz 判据讨论了受控变形耦合发

电机系统的混沌状态轨道达到平衡点或不稳定周期轨道时的条件,同时给出了理论上的证明.数值模拟进一步验证了这三种控制方法均可成功将变形耦合发电机的混沌运动轨道镇定到不稳定平衡点或不稳定周期轨道——极限环上.

- [1] Ott E , Grebogi C , Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Chen G , Dong X 1998 *From Chaos to Order : Methodologies , Perspectives and Applications* (Singapore : World Scientific) chapt. 1
- [3] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Chaotic Control , Synchronization and Utilizing* (Beijing : National Defence Industry Press) chapt. 7 (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第七章]
- [4] Guan X P , Fan Z P , Chen C L , Hua C C 2002 *Chaotic Control and its Application on Secure Communication* (Beijing : National Defence Industry Press) chapt. 9 (in Chinese) [关新平、范正平、陈彩莲、华长春 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北京:国防工业出版社)第九章]
- [5] Chen G R , Lü J H 2003 *Dynamical Analyses , Control and Synchronization of the Lorenz system family* (Beijing : Science Press) chapt. 2 (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)第二章]
- [6] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* (Beijing : Electronics Industry Press) chapt. 2 (in Chinese) [王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第二章]
- [7] Singer J , Wang Y Z , Bau H H 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1123
- [8] Chen G , Dong X 1993 *Circuits Syst. Comput.* **3** 139
- [9] Chen G , Dong X 1992 *Int. J. Bifur. Chaos.* **2** 407
- [10] Chen G 1997 *Chaos , Solitons Fract.* **8** 1461
- [11] Pyragas K 1995 *Phys. A* **206** 323
- [12] Vassiliadis D 1994 *Phys. D* **71** 319
- [13] Hwang C , Chow H , Wang Y 1996 *Phys. D* **92** 95
- [14] Wang X Y , Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 (in Chinese) [王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605]
- [15] Liu J , Chen S H , Lu J A 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1595 (in Chinese) [刘杰、陈士华、陆君安 2003 物理学报 **52** 1595]
- [16] Tian Y , Gao F 1998 *Phys. D* **117** 1
- [17] Pavlica V , Petrovacki D 1999 *Fuzzy Sets and Systems* **101** 41
- [18] Wang X , Chen G , Yu X 2000 *Chaos* **10** 771
- [19] Wang X Y , Liu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 118 (in Chinese) [王兴元、刘明 2005 物理学报 **54** 118]
- [20] Ömer M , Ercan S 1996 *Phys. Rev. E* **54** 4803
- [21] Wang Y W , Guan Z H , Wang H O 2003 *Phys. Lett. A* **320** 154
- [22] Rajasekar S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 775
- [23] Rajasekar S , Murraali K , Lakshmanan M 1997 *Chaos , Solitons Fract.* **8** 1545
- [24] Rameshi M , Narayanan S 1999 *Chaos , Solitons Fract.* **10** 1473
- [25] Ramirez J 1994 *IEEE Trans Circuits Syst.* **42** 168
- [26] Franz M , Zhang M H 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3558
- [27] Gills Z , Iwata C , Roy R 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 3169
- [28] Braiman Y , Goldhirsch I 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2545
- [29] Agiza H N 2002 *Chaos , Solitons Fract.* **13** 341
- [30] Agiza H N 2004 *Int. J. Modern Phys. C* **15** 873
- [31] Vanecek A , Celikovský S 1996 *Control systems : From linear analysis to synthesis of chaos* (London : Prentice-Hall) chapt. 3
- [32] Ramasubramanian K , Sriram M S 2000 *Phys. D* **139** 72

Chaos control of a modified coupled dynamos system^{*}

Wang Xing-Yuan[†] Wu Xiang-Jun

(School of Electronic & Information Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China)

(Received 8 December 2005 ; revised manuscript received 11 March 2006)

Abstract

This paper studies the problem of controlling the chaotic behavior of a modified coupled dynamos system. Two different methods, namely the feedback and non-feedback methods are used to control chaos in the modified coupled dynamos system. Based on the Lyapunov direct method and Routh-Hurwitz criteria, the conditions of suppressing chaos to unstable equilibrium points or unstable periodic orbits (limit cycles) are discussed, and they are proved theoretically. Numerical simulations show the effectiveness of the two different methods.

Keywords : modified coupled dynamos system, feedback method, non-feedback method, chaos control

PACC : 0545, 0555

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Superior University Science Technology Research Project of Liaoning Province (Grant No. 20040081).

[†] E-mail : wangxy@dlut.edu.cn