

# 改进的二维分形模型在海面电磁散射中的应用<sup>\*</sup>

王运华 郭立新<sup>†</sup> 吴振森

(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

(2005 年 12 月 21 日收到, 2006 年 3 月 10 日收到修改稿)

提出了一种改进的二维分形海面模型, 其表面谱函数在空间波数小于基波波数及大于基波波数时分别满足正幂率关系和负幂率关系. 通过比较可以发现, 在不同风速时, 改进模型的空间自相关函数及表面轮廓谱和有关文献结果有较好的吻合. 在满足 Kirchhoff 近似条件下推导了改进分形模型的散射系数及散射强度系数的计算公式并进行了数值计算, 比较了改进模型和经典模型的后向散射强度系数角分布并详细讨论了它们随入射频率、海上风速和风向的变化.

关键词: 改进分形模型, 粗糙海面, 电磁散射, Kirchhoff 近似

PACC: 4120, 4753

## 1. 引言

风驱海面电磁散射的研究在遥感、环境监测及海上目标跟踪与识别等领域中都有极其重要的意义. 在研究海面电磁散射过程中提出一种合适的海面模型非常关键, 以往人们多是根据海谱反演海面的表面轮廓<sup>[1,2]</sup>. 由于处理问题的简单性, 近年来国内外很多学者应用经典带限 Weierstrass 分形模型模拟粗糙(海)面<sup>[3-11]</sup>, 但是, 这些分形模型其表面谱函数与空间波数之间只满足负幂率关系, 并且在应用分形模型模拟海面时, 高度起伏均方根、空间基频、基波波数和分维数等参与与实际海况参数(主要是风速和风向)之间的关系也未具体给出. 然而, 根据有关海面谱函数的实测结果<sup>[12]</sup>可知, 当海浪的空间波数大于海面基波波数时海谱与空间波数近似满足负幂率关系, 而当海浪的空间波数小于基波波数时海谱与空间波数之间近似满足正幂率关系, 因此文献<sup>[3-11]</sup>中的分形海面模型只能模拟空间波数大于基波波数的波浪而体现不出空间波数小于基波波数的波浪对海面表面轮廓的影响. 另外, 众所周知, 应用分形模型模拟海面时, 其空间基频、基波波数、分维数等参量同时决定了模拟海面的表面轮廓及其粗糙度, 但是, 由于风速给定时, 实际海面的粗糙度

也是确定的, 因此, 必须分析分形模型中的各参量与风速及风向的关系. 本文提出了一种改进的二维分形海面模型, 这种改进的模型不但同时考虑了空间波数大于和小于基波波数的两种波浪对海面表面轮廓的影响, 同时还给出了模型中的各个参量和风速及风向之间的关系. 经过数值模拟发现这种模型的相关函数及表面轮廓谱同文献<sup>[13]</sup>中的结果吻合的较好. 另外, 基于这种分形模型, 在 Kirchhoff 近似条件下, 本文导出了海面散射系数及散射强度系数并进行了数值计算, 比较了改进二维分形海面模型和经典模型下散射强度系数角分布, 并讨论了入射频率、海上风速和风向对后向散射强度系数分布的影响.

## 2. 改进的二维海面分形模型及相关函数和表面谱函数

### 2.1. 改进的二维海面分形模型

Mandelbrot 指出 Weierstrass 函数<sup>[14]</sup>

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[1 - \exp(ib^n t)] \exp(i\varphi_n)}{b^{(2-D)n}} \quad (1)$$

具有分形的性质, 这是一个处处连续, 但处处不可导的函数,  $\varphi_n$  为任意随机的相位函数,  $D$  近似等于豪斯道夫维. Weierstrass 函数的实部  $\text{Re}[W(t)]$  也是具有分形性质的函数, 但是是一种统计上的分形函数, 其

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60571058)、国防科技预研基金和西安电子科技大学研究生创新基金资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: lxguo@mail.xidian.edu.cn

分形特征不直观.在此为了说明问题我们取  $\varphi_n$  为零时 Weierstrass 函数的实部,即

$$\alpha(t) = \text{Re} \{ W(t) \}_{\varphi_n=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{[1 - \cos(b^n t)]}{b^{(2-d)n}}, \quad (2)$$

由(2)式易证明  $\alpha(bt) = b^{2-d}\alpha(t)$ , 无论是空间基频  $b > 1$  还是  $b < 1$  该函数都满足自相似性,基于(2)式,通常用经典的带限 Weierstrass 分形函数来模拟二维动态海面,该模型通常表示为<sup>[7]</sup>

$$\begin{aligned} f(x, y, t) = & \sigma\eta \sum_{n=0}^{N-1} b^{(d-3)n} \sin\{K_0 b^n [(x + V_x t) \\ & \times \cos\beta_{2n} + (y + V_y t) \sin\beta_{2n}] \\ & - \Omega_n t + \phi_n\}, \quad (3) \end{aligned}$$

其中  $\sigma$  为海面的高度起伏均方根,  $\eta$  为归一化因子,  $d$  是分形模型的分维数 ( $2 < d < 3$ ),  $b$  为尺度因子 ( $b > 1$ ),  $K_0$  为海表面的空间波数,它决定空间频谱的位置,  $\Omega_n$  为第  $n$  个谱分量的角速度,  $\phi_n$  是  $[-\pi, \pi]$  上均匀分布的随机相位,  $V_x, V_y$  是雷达平台在  $x$  和  $y$  方向上的运动速度.由(3)式所模拟分形粗糙海面的功率谱满足负幂率指数谱,正好对应于海面 PM 谱中的一段,它并不能反映整个海面的完全海谱.事实上对于整个 PM 谱而言,它可以表示为<sup>[1]</sup>

$$S_{\text{PM}}(K, \phi) = \frac{\alpha}{2|K|^3} \exp\left(-\frac{\beta g^2}{K^2 U_{19.5}^4}\right) G_{\text{PM}}(K, \phi), \quad (4)$$

其中  $G_{\text{PM}}(K, \phi)$  为方向分布函数<sup>[13]</sup>,  $\alpha = 8.10 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 0.74$ ,  $U_{19.5}$  为距离海面高度为 19.5m 处的海上风速,  $g$  为重力加速度,  $\phi$  为风向和  $x$  正半轴的夹角.根据上式可知,无论风速的取值大小,PM 谱中总有一个峰值,其对应的频率为  $K_p$ , 风速越大,  $K_p$  越小.这表明海表面受两种波谱共同影响,当  $K_x < K_p$  时,表面的相关长重力波起主要作用,功率谱满足正幂律谱,而当  $K_x > K_p$  时,短重力波及张力波起主要作用,功率谱满足负幂律谱,这就启发我们应用下面的改进二维分形模型来模拟满足全域 PM 谱的实际海面,它表示为

$$\begin{aligned} f(x, y, t) = & \sigma\eta \sum_{m=0}^{N-1} a^{-(d-\varepsilon)m} \sin\{K_0 a^m [(x + V_x t) \cos\beta_{1m} \\ & + (y + V_y t) \sin\beta_{1m}] - \Omega_m t + \alpha_{1m}\} \\ & + \sigma\eta \sum_{n=0}^{N-1} b^{(d-3)n} \sin\{K_0 b^n [(x + V_x t) \cos\beta_{2n} \\ & + (y + V_y t) \sin\beta_{2n}] - \Omega_n t + \alpha_{2n}\}, \quad (5) \end{aligned}$$

其中  $\sigma$  为海面的起伏均方根,  $\eta$  为归一化因子,  $d$  分

形模型的分维数,  $a$  是空间波数小于基频时的尺度因子,  $b$  为空间波数大于基频时的尺度因子,  $V_x, V_y$  是雷达平台在  $x$  和  $y$  方向上的运动速度,  $\beta_{1m}$  和  $\beta_{2n}$  为波浪的运动方向角,  $\Omega_m, \Omega_n$  是圆频率.显然与经典分形模型(3)式相比,改进模型在等号右边增加了一项,经过数值模拟可以发现该模型的功率谱可以更为准确地反映整个海面的全域 PM 谱.一般来说,上式中的  $\beta_{1m}$  和  $\beta_{2n}$  是时间的函数,在较短时间内为简单起见可以认为和时间无关,且  $\beta_{1m}$  和  $\beta_{2n}$  满足  $E[\beta_{1m}] = E[\beta_{2n}] = \bar{\beta}_0$ ,  $\bar{\beta}_0$  是风向和  $x$  轴的夹角,同时  $\psi_{1m} = \beta_{1m} - \bar{\beta}_0$  和  $\psi_{2n} = \beta_{2n} - \bar{\beta}_0$  的一阶概率密度函数满足最适合中国海域的 Donelan 方向函数模型<sup>[15]</sup>

$$P(K, \psi) = \frac{1}{2} \alpha \text{sech}^2(\alpha\psi), \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = 2.61(K/K_0)^{-1.3}, & 0.65 \leq K/K_0 \leq 0.95, \\ \alpha = 2.28(K/K_0)^{-1.3}, & 0.95 < K/K_0 < 1.6, \\ \alpha = 1.24, & \text{其他.} \end{cases} \quad (7)$$

### 2.2. 空间相关函数及表面轮廓谱的求解

在求解(5)式所模拟的分形海面空间相关函数的过程中可以取  $V_x = V_y = 0$ , 根据相关函数的定义可得

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{r}, \tilde{r}') = & E_{\beta} E_a [f(x, y, t) f(x + \tilde{r}_x, y + \tilde{r}_y, t + \tilde{t})] \\ = & E_{\beta} \left[ \frac{\sigma^2 \eta^2}{2} \sum_{m=0}^{N-1} a^{-\chi(d-\varepsilon)m} \cos\{K_0 a^m [\tilde{r}_x \cos\beta_{1m} \right. \\ & \left. + \tilde{r}_y \sin\beta_{1m}] - \Omega_m \tilde{t}\} \right. \\ & \left. + \frac{\sigma^2 \eta^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} b^{\chi(d-3)n} \cos\{K_0 b^n [\tilde{r}_x \cos\beta_{2n} \right. \\ & \left. + \tilde{r}_y \sin\beta_{2n}] - \Omega_n \tilde{t}\} \right], \quad (8) \end{aligned}$$

一般情况下海面的时变过程是一个广义平稳随机过程,这样可令  $\tilde{t} = 0$ , 上式可化为

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{r}) = & E_{\beta} E_a [f(x, y) f(x + \tilde{r}_x, y + \tilde{r}_y)] \\ = & \frac{\sigma^2 \eta^2}{2} \sum_{m=0}^{N-1} E_{\beta} [a^{-\chi(d-\varepsilon)m} \\ & \times \cos\{K_0 a^m \tilde{r} \cos(\beta_{1m} - \theta)\}] \\ & + \frac{\sigma^2 \eta^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} E_{\beta} [b^{\chi(d-3)n} \\ & \times \cos\{K_0 b^n \tilde{r} \cos(\beta_{2n} - \theta)\}], \quad (9) \end{aligned}$$

其中  $\theta = \arctan(\tilde{r}_y/\tilde{r}_x)$ . 经过冗长的数学推导可以求

得改进分形海面模型的空间相关函数为

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{r}, \theta) = & \pi\sigma^2\eta^2 \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a^{-\chi(d-\xi)m}}{2\pi} J_0(K_0 a^m \tilde{r}) \right. \\ & + \sum_{m=1}^{N-1} 2a^{-\chi(d-\xi)m} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l J_{2l}(K_0 a^m \tilde{r}) U(K, 2l) \\ & \times \cos[2l(\phi - \bar{\beta}_0 + \theta)] + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{b^{\chi(d-3)n}}{2\pi} J_0(K_0 b^n \tilde{r}) \\ & + \sum_{n=1}^{N-1} 2b^{\chi(d-3)n} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^h J_{2h}(K_0 b^n \tilde{r}) \\ & \left. \times U(K, 2h) \cos[2h(\phi - \bar{\beta}_0 + \theta)] \right\}, \quad (10) \end{aligned}$$

其中

$$U(K, 2l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(K, \psi) \exp(-j2l\psi) d\psi, \quad (11)$$

$$\eta = \left\{ \frac{\mathbb{I}[1 - a^{-\chi(D-\xi)}] \mathbb{I}[1 - b^{\chi(D-3)}]}{[\mathbb{I}[1 - a^{-\chi(D-\xi)^N}] \mathbb{I}[1 - b^{\chi(D-3)}]] + [\mathbb{I}[1 - a^{-\chi(D-\xi)}] \mathbb{I}[1 - b^{\chi(D-3)^N}]]} \right\}^{1/2}. \quad (14)$$

由于表面轮廓谱函数为相关函数的二维傅里叶变换,因此由(10)式可得表面谱函数为

$$\begin{aligned} W(K, \phi) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \tilde{r} \rho(\tilde{r}, \theta) \exp[-jk\tilde{r} \\ & \times \cos(\theta - \phi)] d\tilde{r} d\theta, \quad (15) \end{aligned}$$

将(10)式代入上式并进行求解可得

$$\begin{aligned} W(K, \phi) = & \pi\sigma^2\eta^2 \sum_{n=0}^{N-1} a^{-\chi(d-\xi)n} \frac{1}{K_0 a^n} \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} U(K, 2l) \mathbb{I} \right. \\ & \times \cos[2l(\phi - \bar{\beta}_0)] + \frac{1}{2\pi} \left. \right\} \delta(K_0 a^n - K) \\ & + \pi\sigma^2\eta^2 \sum_{n=0}^{N-1} b^{\chi(d-3)n} \frac{1}{K_0 b^n} \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} U(K, 2h) \mathbb{I} \right. \\ & \times \cos[2h(\phi - \bar{\beta}_0)] + \frac{1}{2\pi} \left. \right\} \delta(K_0 b^n - K), \quad (16) \end{aligned}$$

上式中的二维海谱通常又可以写成如下形式:

$$W(K, \phi) = W_1(K) \left[ 1 + \frac{W_2(K, \phi)}{W_1(K)} \right], \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} W_1(K) = & \frac{\sigma^2\eta^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} a^{-\chi(d-\xi)n} \frac{1}{K_0 a^n} \delta(K_0 a^n - K) \\ & + \frac{\sigma^2\eta^2}{2} \sum_{n=0}^{N-1} b^{\chi(d-3)n} \frac{1}{K_0 b^n} \delta(K_0 b^n - K), \quad (18) \end{aligned}$$

$$W_2(K, \phi) = 2\pi\sigma^2\eta^2 \sum_{n=0}^{N-1} a^{-\chi(d-\xi)n} \frac{1}{K_0 a^n}$$

$$U(K, 2h) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(K, \psi) \exp(-j2h\psi) d\psi, \quad (12)$$

$J_0(\cdot)$ ,  $J_{2l}(\cdot)$  和  $J_{2h}(\cdot)$  是不同阶的第一类 Bessel 函数。(10)式中零阶 Bessel 函数决定的部分为一阶各向同性海面的空间相关函数,由高阶 Bessel 函数决定的部分是由于风向的影响而引起的二阶修正部分。在(10)式中取  $\tilde{r} = 0$  可以求得海面的高度起伏方差为

$$\rho(0) = \sigma^2 = \pi\sigma^2\eta^2 \left[ \sum_{m=0}^{N-1} \frac{a^{-\chi(d-\xi)m}}{2\pi} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{b^{\chi(d-3)n}}{2\pi} \right], \quad (13)$$

这样就可以求得归一化因子为

$$\begin{aligned} & \times \left\{ \sum_{l=1}^{\infty} U(K, 2l) \cos[2l(\phi - \bar{\beta}_0)] \right\} \\ & \times \delta(K_0 a^n - K) \\ & + 2\pi\sigma^2\eta^2 \sum_{n=0}^{N-1} b^{\chi(d-3)n} \frac{1}{K_0 b^n} \\ & \times \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} U(K, 2h) \cos[2h(\phi - \bar{\beta}_0)] \right\} \\ & \times \delta(K_0 b^n - K), \quad (19) \end{aligned}$$

而对于通常意义下的二维海谱而言,存在下面的关系:

$$W(K, \phi) K dK d\phi = S(K) \alpha(K, \phi) K dK d\phi, \quad (20)$$

其中  $\alpha(K, \phi)$  称为方向分布函数。对比(17)和(20)式可以得到

$$S(K) = KW_1(K), \quad (21)$$

$$\alpha(K, \phi) = 1 + \frac{W_2(K, \phi)}{W_1(K)}, \quad (22)$$

由(18)和(21)式可以求得

$$S(K) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2\eta^2}{2\ln a} K_0^{\chi(d-\xi)} K^{[-\chi(d-\xi)-1]}, & K < K_0, \\ \frac{\sigma^2\eta^2}{2\ln b} K_0^{\chi(d-3)} K^{[\chi(d-3)-1]}, & K \geq K_0, \end{cases} \quad (23)$$

由(18)(19)和(22)式并经过有关推导可以得到二维分形海面的方向分布函数为

$$\alpha(K, \phi) = 1 + \frac{4\pi}{K} \sum_{l=1}^{\infty} U(K, 2l) \cos[2l(\phi - \bar{\beta}_0)], \quad (24)$$

海面风速和海面的起伏方根及其基波波数满足下面的关系<sup>[16]</sup>：

$$\sigma = 0.0212 U_{19.5}^2 / 4, \quad (25)$$

$$K_0 = \frac{\omega_0^2}{g} = \frac{0.877^2 g}{U_{19.5}^2}. \quad (26)$$

将(25)(26)式代入(23)式中,在同为不考虑方向分布函数情况下,将(23)式和不同风速下各向同性 PM 谱进行比较,可以较容易地确定分形模型中的正幂率因子  $\xi = 3.9$ ,尺度因子  $b = 1.015$ ,  $a = 1/b$ ,分维数  $D = 2.62$  及迭代次数  $N = 400$ .由于分形模型更为精细的反映了粗糙海表面的细微结构,这样就使得模拟出的分形海面的表面谱能量向较大的空间波数方向移动,为了使得分形海面模型在基波波数附近的谱和 PM 海谱能更好的拟合,经过两种谱的数值模拟与比对,发现需在(25)式中加入修正因子  $\zeta$ ,这样就有

$$\sigma = 0.0212 \zeta U_{19.5}^2 / 4, \quad (27)$$

通过数值求解(5)式所模拟的分形海表面轮廓的功率谱,可以确定  $\zeta \approx 1.65$ .在选取以上参数条件下,本文提出的二维改进分形模型其功率谱与全域 PM 谱有较好的吻合.

### 3. 散射系数及散射强度系数的求解

考虑一平面电磁波入射到由(5)式所模拟的改进分形模型海面上(如图1所示),在此定义散射系数为<sup>[4]</sup>

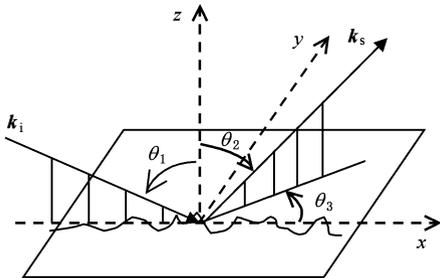


图1 海面散射几何示意图

$$\chi(t) = \frac{E_s(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{E_{s0}} \cos\theta_1 \quad (28)$$

其中  $E_s(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  为粗糙面的散射场,  $E_{s0}$  为理想导体平面的镜像散射场,  $\theta_1, \theta_2$  和  $\theta_3$  分别为入射角、散射角和散射方位角.在求解散射系数的过程中应用基尔霍夫近似(KA)求解分形粗糙面的散射场,该散射场可以表示为<sup>[17]</sup>

$$E_s(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{-jk e^{jkr}}{4\pi r} 2F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \times \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y e^{jk(x, y, t)} dx dy + \psi_e, \quad (29)$$

其中

$$F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2} \left( \frac{Aa}{C} + \frac{Bb}{C} + c \right), \quad (29a)$$

$$A = \sin\theta_1 - \sin\theta_2 \cos\theta_3, \quad (29b)$$

$$B = -\sin\theta_2 \sin\theta_3, \quad (29c)$$

$$C = -(\cos\theta_1 + \cos\theta_2), \quad (29d)$$

$$a = \sin\theta_1(1 - R_0) + \sin\theta_2 \cos\theta_3(1 + R_0), \quad (29e)$$

$$b = \sin\theta_2 \sin\theta_3(1 + R_0), \quad (29f)$$

$$c = \cos\theta_2(1 + R_0) - \cos\theta_1(1 - R_0), \quad (29g)$$

$$\phi(x, y, t) = Ax + By + C\phi(x, y, t), \quad (29h)$$

$R_0$  为菲涅尔反射系数,边缘绕射场为

$$\psi_e = \frac{jk \exp(jkr)}{4\pi r} A_m \left( \frac{Aa}{C} + \frac{Bb}{C} \right) \times \text{sinc}(kAX) \text{sinc}(kBY), \quad (30)$$

由(29)式可以求得

$$E_{s0} = \frac{-jk e^{jkr}}{4\pi r} 2F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \times \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y e^{jk(x, y, t)} dx dy + \psi_e = \pm \frac{jk \exp(jkr)}{2\pi r} \cos\theta_1 A_m + \psi_e \quad (31)$$

其中  $A_m = 4XY$  为分形粗糙面的被照射面积.将(29)(31)式代入(28)式,在不考虑边缘绕射效应的条件下,二维粗糙分形海面的散射系数可以表示为

$$\chi(t) = \mp \frac{F(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{A_m} \times \int_{-X}^X \int_{-Y}^Y e^{jk(x, y, t)} dx dy + \left( \frac{Aa + Bb}{2C} \right) \text{sinc}(kAX) \text{sinc}(kBY), \quad (32)$$

其中“ $\pm$ ”对应于 HH 和 VV 极化方式.将(29h)式代入上式并经过有关数学推导(限于篇幅,在此不再详细给出),可以求得散射系数为

$$\chi(t) = \mp F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \sum_{m_0=-\infty}^{+\infty} \sum_{h_0=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_{N-1}=-\infty}^{+\infty} \sum_{h_{N-1}=-\infty}^{+\infty} \prod_{n=0}^{N-1}$$

$$\begin{aligned}
& \times \{J_m [ kC\sigma\eta a^{-(d-\varepsilon)n} ] J_h [ kC\sigma\eta b^{(d-3)n} ] \} \\
& \cdot \exp \left\{ j \sum_{n=0}^{N-1} m_n \{ K_0 a^n [ V_x t \cos \beta_{1n} + V_y t \sin \beta_{1n} ] - \Omega_{1n} t + \Phi_{1n} \} \right\} \\
& \cdot \exp \left\{ j \sum_{n=0}^{N-1} h_n \{ K_0 b^n [ V_x t \cos \beta_{2n} + V_y t \sin \beta_{2n} ] - \Omega_{2n} t + \Phi_{2n} \} \right\} \\
& \cdot \text{sinc} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} [ m_n K_0 a^n \cos \beta_{1n} + h_n K_0 b^n \cos \beta_{2n} ] X + kAX \right\} \\
& \cdot \text{sinc} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} [ m_n K_0 a^n \sin \beta_{1n} + h_n K_0 b^n \sin \beta_{2n} ] Y + kBY \right\}, \tag{33}
\end{aligned}$$

其中  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ . 如果令 (33) 式中  $J_m [ kC\sigma\eta a^{-(d-\varepsilon)n} ]$  的起伏方根  $\sigma = 0$  根据 Bessel 函数的性质 (33) 式可退化为

$$\begin{aligned}
\chi(t) = & \mp F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \sum_{h_0=-\infty}^{+\infty} \sum_{h_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{h_{N-1}=-\infty}^{+\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \{ J_{h_n} [ v_2 \sigma \eta b^{(d-3)n} ] \} \\
& \cdot \exp \left\{ j \sum_{n=0}^{N-1} h_n \{ K_0 b^n [ V_x t \cos \beta_{2n} + V_y t \sin \beta_{2n} ] - \Omega_{2n} t + \Phi_{2n} \} \right\} \\
& \cdot \text{sinc} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} [ h_n K_0 b^n \cos \beta_{2n} ] X + v_x X \right\} \cdot \text{sinc} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} [ h_n K_0 b^n \sin \beta_{2n} ] Y + v_y Y \right\}, \tag{34}
\end{aligned}$$

其中  $v_x = kA, v_y = kB, v_z = kC$ . (34) 式和文献 [4] 中的结果是完全一致的. 对由 (34) 式确定的散射系数在随机相位和随机波传播方向上求平均可以得到平均散射系数

$$\begin{aligned}
\bar{\chi}(t) = & E_\beta E_\phi [ \chi(t) ] \\
= & \mp F(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \prod_{n=0}^{N-1} \{ J_0 [ kC\sigma\eta a^{-(d-\varepsilon)n} ] \} \\
& \times J_0 [ kC\sigma\eta b^{(d-3)n} ] \text{sinc}(kAX) \\
& \times \text{sinc}(kBY). \tag{35}
\end{aligned}$$

在上面的求解过程中,  $E_\beta[\cdot], E_\phi[\cdot]$  分别是作用在波的传播方向和随机相位上的系综平均. 注意到  $\phi$  是区间  $[-\pi, \pi]$  上均匀分布的, 所以  $E_\phi[\cdot]$  作用

到上面的散射系数上时, 只有当  $m_n = 0$  和  $h_n = 0$  包含  $\phi_{1n}$  和  $\phi_{2n}$  的指数项的平均值为 1, 否则为 0. 当  $J_0 [ kC\sigma\eta a^{-(d-\varepsilon)n} ]$  项中的起伏方根为零, 即  $\sigma = 0$  时, (35) 式退化为和文献 [4] 中相一致的结果.

对于散射强度系数, 通常定义为

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_\chi(t) = & \frac{\bar{I}(\mathbf{r})}{I_0(\mathbf{r})} \cos^2 \theta_1 \\
= & \frac{E_s(\mathbf{r}) E_s^*(\mathbf{r})}{E_{s0} \cdot E_{s0}^*} \varphi \cos^2 \theta_1 \\
= & \chi(t) \chi^*(t) \varphi, \tag{36}
\end{aligned}$$

取时间  $t = 0$  将 (33) 式代入 (36) 式可以求得平均散射强度系数为

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_\chi = & F^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \frac{k^2 C^2 \sigma^2 \eta^2}{4} \left\{ (1 - k^2 C^2 \sigma^2) \text{sinc}^2(kAX) \text{sinc}^2(kBY) \right. \\
& + \sum_{n=0}^{N-1} [ a^{-X(d-\varepsilon)n} \cdot \text{sinc}^2(K_0 a^n \cos \beta_{1n} X + v_x X) \text{sinc}^2(K_0 a^n \sin \beta_{1n} Y + v_y Y) ] \\
& + \sum_{n=0}^{N-1} [ b^{X(d-3)n} \cdot \text{sinc}^2(K_0 b^n \cos \beta_{2n} X + v_x X) \text{sinc}^2(K_0 b^n \sin \beta_{2n} Y + v_y Y) ] \\
& + \sum_{n=0}^{N-1} [ a^{-X(d-\varepsilon)n} \cdot \text{sinc}^2(-K_0 a^n \cos \beta_{1n} X + v_x X) \text{sinc}^2(-K_0 a^n \sin \beta_{1n} Y + v_y Y) ] \\
& \left. + \sum_{n=0}^{N-1} [ b^{X(d-3)n} \cdot \text{sinc}^2(-K_0 b^n \cos \beta_{2n} X + v_x X) \text{sinc}^2(-K_0 b^n \sin \beta_{2n} Y + v_y Y) \right]. \tag{37}
\end{aligned}$$

非相干散射系数可以定义为

$$\sigma_I = \frac{E_s \cdot E_s^* - E_s E_s^*}{E_s E_{s_0}^*} = \bar{\rho}_I - \bar{\gamma} \cdot \bar{\gamma}^* , \tag{38}$$

应用(35)(37)和(38)式,在忽略边缘绕射效应的条件下非相干散射强度系数可以表示为

$$\begin{aligned} \sigma_I = F^2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \frac{k^2 C^2 \sigma^2 \eta^2}{4} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} [ a^{-X d - \varepsilon n} \cdot \text{sinc}^2(K_0 a^n \cos\beta_{1n} X + v_x X) \text{sinc}^2(K_0 a^n \sin\beta_{1n} Y + v_y Y) ] \right. \\ + \sum_{n=0}^{N-1} [ b^{X d - 3n} \cdot \text{sinc}^2(K_0 b^n \cos\beta_{2n} X + v_x X) \text{sinc}^2(K_0 b^n \sin\beta_{2n} Y + v_y Y) ] \\ + \sum_{n=0}^{N-1} [ a^{-X d - \varepsilon n} \cdot \text{sinc}^2(-K_0 a^n \cos\beta_{1n} X + v_x X) \text{sinc}^2(-K_0 a^n \sin\beta_{1n} Y + v_y Y) ] \\ \left. + \sum_{n=0}^{N-1} [ b^{X d - 3n} \cdot \text{sinc}^2(-K_0 b^n \cos\beta_{2n} X + v_x X) \text{sinc}^2(-K_0 b^n \sin\beta_{2n} Y + v_y Y) ] \right\} . \tag{39} \end{aligned}$$

### 4. 数值计算结果与讨论

图2(a)(b)分别给出了不同风速下,分别由(3)式和(5)式所模拟的二维经典分形模型海面和改进分形模型海面的空间相关函数与经典PM海谱模型下二维海面相关函数的比较,图中横坐标  $L = (\tilde{r}_x^2 + \tilde{r}_y^2)^{1/2}$ .从图中所示结果可以看出,对于不同的风速(10)式中由零阶 Bessel 函数所决定的一阶各向同性海面的空间相关函数和由各向同性 PM 海谱模型作反傅里叶变换得到的一阶空间相关函数有一定的吻合,而经典分形模型下的一阶相关函数与 PM 谱下的一阶空间相关函数差别相对较大.同样,

对由高阶 Bessel 函数确定的部分即由于风向的影响(为简单并能说明问题起见,计算时取  $\theta = 0^\circ, \beta_0 = 0^\circ$ )从而引起的二阶修正部分得到的改进分形模型海面相关函数与文献[13]中有关 PM 海谱(4)式中取  $\phi = 0^\circ$ )下的二阶相关函数结果吻合较好,而经典分形模型海面下的二阶修正相关函数与之相差较大.由于对空间相关函数作反傅里叶变换即可得到海面的表面轮廓谱,因此图2的计算结果也进一步说明了相对于经典分形模型海面谱而言,改进分形模型的海面谱和经典的 PM 海面谱是更趋于一致的.

图3根据(24)式计算了改进分形模型在空间波

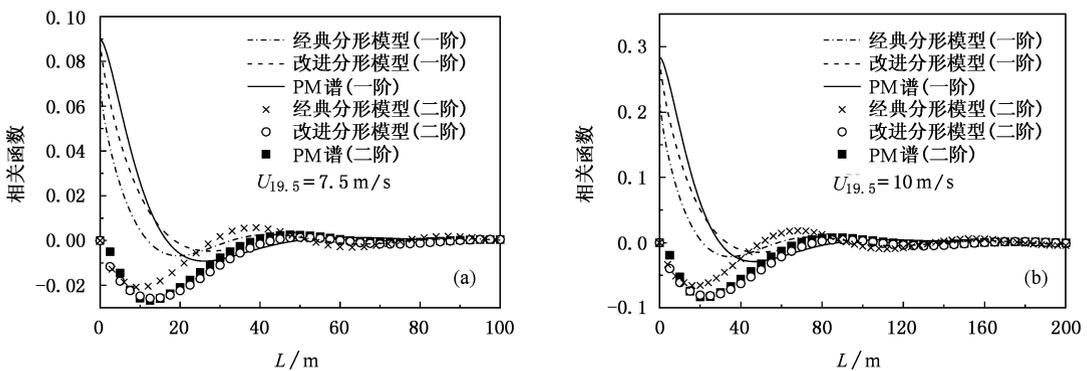


图2 不同风速下分形模型和 PM 谱模型海面轮廓相关函数的比较

数取不同值时波浪方向分布函数随方向角度的分布,从图中可以看出,当空间波数等于基波波数时海浪的方向分布最为集中,随着海浪空间波数的增大或减小,海浪的运动方向逐渐向空间各个方向展开,该结果和 Mitsuyasu 波浪方向分布函数的结论是一致的<sup>[7]</sup>.图4利用(20)式并结合(23)式和(24)式给

出了风速为 5m/s 时的二维改进分形模型的方向海谱  $W(K, \phi)$ ,从图中可以看出,该方向海谱也是各向异性的,随着风向角度的不同,海谱的幅值大小是不同的.

图3(a)(b)根据(39)式分别计算了不同入射频率下分形海面的后向非相干散射强度系数角分布

(HH 极化) 其中  $X = Y = 400\text{m}$ ,  $\bar{\beta}_0 = 0^\circ$ . 从图中可以看出, 对于后向散射强度系数而言, 改进的分形模型 (5) 式等号右边的第一部分 (图中对应的 part A 部分) 和由 (3) 式描述的经典分形模型 (part B 部分, 即 (5) 式等号右边的第二部分) 对整个改进分形模型下的散射强度系数 (图中 part A + B) 均有一定贡献. 对于确定入射角而言, 改进模型的散射强度系数比经典分形模型的散射强度系数要大, 这主要是由于在改进模型海面中更多地叠加了一些波长较长的海浪从而使得粗糙度比经典分形模型的粗糙度要大一些

这一原因造成的; 从图中还可以看到, 随着入射频率的增加, 对于相同的入射角, 散射强度系数也是增大的. 另外通过计算还可以发现, 对于相同的入射频率, 风速越大, 对于相同的入射角, 后向散射强度系数幅值也是增大的, 且改进分形模型下的后向散射强度系数与经典分形海面模型下的散射强度系数差别会更显著, 同时计算结果还表明顺、逆风方向上的后向散射强度系数比侧风向上的后向散射强度系数要大一些, 这同样是由于顺、逆风方向海面的粗糙度比侧风向海面的粗糙度要大的原因造成的.

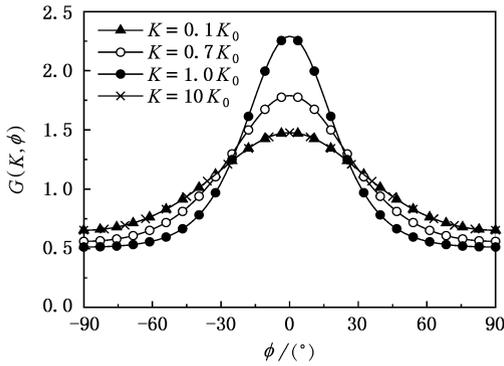


图 3 不同空间波数的波浪的方向分布函数

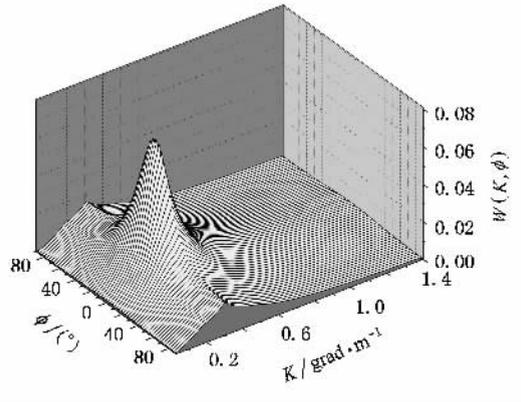


图 4 风速为 5m/s 时改进分形模型的方向海谱

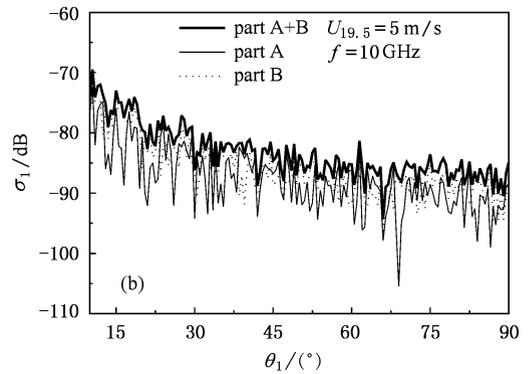
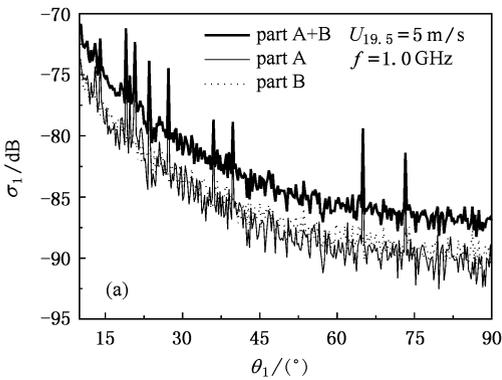


图 5 改进分形模型海面后向非相干散射强度系数角分布

图 (a) (b) 给出了不同风速和入射角度下后向非相干散射强度系数随风向的变化分布. 从图中可以看出, 在风向为  $0^\circ$  (顺风向) 和  $180^\circ$  (逆风向) 时, 散射强度系数的幅值是相等的, 且侧风向下的散射强度系数幅值要小于逆风和顺风向散射强度系数的幅值, 当风向角  $\phi = 90^\circ$  时, 散射强度系数幅值为

最小值. 对于确定风速而言, 随着入射角度的增大, 对于确定的风向, 后向非相干散射强度系数幅值是减小的. 对比图 (a) (b) 同样可以发现对于相同的入射频率、入射角和相同的风向, 风速越大, 后向散射强度系数幅值也越大. 以上有关结论对于 VV 极化情况同样适用, 限于篇幅, 这里不再详细说明.

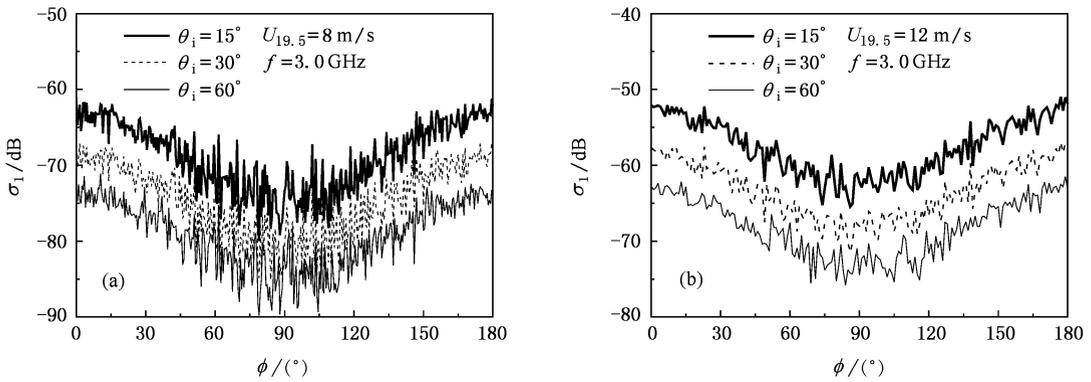


图 6 后向非相干散射强度系数随风向的变化

## 5. 结 论

本文中提出了一种改进的二维分形海面模型,与经典二维分形海面模型相比,应用该模型模拟的海面谱可以反映整个谱域的海面 PM 谱.改进模型海面的一阶相关函数及和风向有关的二阶相关函数均与有关文献结果吻合较好;本文同时给出了改进模型的波浪方向分布函数及方向海谱,在满足 Kirchhoff 近似条件下推导了改进分形模型的散射系数及散射强度系数的计算公式,数值计算并比较了

改进分形海面模型和经典模型下后向非相干散射强度系数角分布.结果表明改进模型的下后向非相干散射强度系数比经典模型下的后向非相干散射强度系数要大.在其他条件不变的情况下,随着风速和入射频率的增大,后向非相干散射强度系数是增大的.由于风向的影响,顺、逆风下的后向非相干散射强度系数要大于侧风向下的后向非相干散射强度系数,这些结果对于实际海背景遥感及海上目标检测有一定意义.本文有关计算结果还有待于进一步用实验结果加以验证.

[1] Toporkov J V, Brown G S 2000 *IEEE Trans. Geosci Remote Sensing* **38** 1616  
 [2] Apel J R 1994 *J. Geophys. Res.* **99** 16269  
 [3] Berizzi F, Mese E D 2002 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **50** 912  
 [4] Berizzi F, Mese E D 2002 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **50** 426  
 [5] Martorella M et al 2004 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **52** 1193  
 [6] Guo L X, Wu Z S 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1064 (in Chinese) [郭立新、吴振森 2000 物理学报 **49** 1064]  
 [7] Berizzi F, Mese E D 2001 *IEE Proc. Radar Sonar Navig.* **148** 57  
 [8] Guo L X, Wu Z S 2000 *IEE of Electronic Letters* **36** 1810  
 [9] Wang X D, Luo X Y, Zhang Z Z 1998 *Chinese Journal of Radio Science* **13** 173 (in Chinese) [王显德、罗贤云、张忠治等 1998 电波科学学报 **13** 173]  
 [10] Li Z X, Jin Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 797 (in Chinese) [李中新、金亚秋 2001 物理学报 **50** 797]

[11] Ke X Z, Guo L X, Wu Z S 1999 *Acta Optica Sin.* **19** 491 (in Chinese) [柯熙政、郭立新、吴振森 1999 光学学报 **19** 491]  
 [12] Wen S C, Zhang O C, Sun S C et al 1994 *Progress in Natural Science* **4** 587  
 [13] Bourlier C, Saillard J, Berginc G 2000 *Progress in Electromagnetic Research PIER* **27** 185  
 [14] Mandelbrot B B 1982 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)  
 [15] Donelan M A, Hamilton J, Hui W H 1985 *Phil. Trans. R. Soc. A* **315** 509  
 [16] Harrison G P, Wallace A R 2001 *Climate Sensitivity of Marine Energy* (Edinburgh: Scottish Executive)  
 [17] Ogilvy J A 1991 *Theory of Wave Scattering from Random Rough Surface* (Bristol: Adam Hilger)

# The application of an improved 2D fractal model for electromagnetic scattering from the sea surface<sup>\*</sup>

Wang Yun-Hua Guo Li-Xin<sup>†</sup> Wu Zhen-Sen

( School of Science , Xidian University , Xi 'an 710071 , China )

( Received 21 December 2005 ; revised manuscript received 10 March 2006 )

## Abstract

In this paper , an improved 2D fractal model is present for modeling the sea surface , the fractal spectrum of which satisfies the positive or negative power law for spatial wave numbers smaller or larger than the fundamental wave number , respectively . The spatial correlation function and the spectrum of this improved model show good agreements with those given in the literature for different windspeed . Based on the Kirchhoff approximation , the scattering coefficient and the scattering intensity coefficient of this new model are derived and evaluated . The angular distributions of backscattering intensity coefficient of the improved fractal sea model are compared with those of the conventional model , the influence of the incident frequency , windspeed and wind-direction on the backscattering intensity coefficient is also discussed in detail .

**Keywords :** improved fractal model , rough sea surface , electromagnetic scattering , Kirchhoff approximation

**PACC :** 4120 , 4753

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60571058 ) , the National Defense Foundation of China and Graduate Innovation Fund , Xidian University .

<sup>†</sup> Corresponding author . E-mail : lxguo@mail.xidian.edu.cn