

# Birkhoff 系统的局部能量积分<sup>\*</sup>

郑世旺<sup>1)†</sup> 贾利群<sup>2)</sup>

1) 商丘师范学院物理与信息工程系, 商丘 476000)

2) 江南大学理学院, 无锡 214122)

(2006 年 3 月 16 日收到, 2006 年 4 月 15 日收到修改稿)

研究 Birkhoff 系统的局部能量积分, 给出这类积分成立的条件, 举例说明了结果的应用.

关键词: Birkhoff 系统, 局部能量积分, 能量积分

PACC: 0320

## 1. 引 言

1927 年 Birkhoff 给出一类新型微分方程<sup>[1]</sup>. 1978 年 Santilli 将其推广并建议命名为 Birkhoff 方程, 指出 Birkhoff 方程是 Hamilton 方程经历非正则变换得到的, 并指出它在量子物理、统计力学、空间力学、工程、生物物理中都有重要应用<sup>[2]</sup>. 梅凤翔将约束力学纳入 Birkhoff 力学, 并研究了 Birkhoff 力学的稳定性和对称性, 发展了 Birkhoff 力学的基本理论<sup>[3-5]</sup>. 文献 6—9] 引入相对论性 Pfaff 作用量, 将 Birkhoff 力学推广到高速运动和高速转动的相对论领域. 最近, 关于 Birkhoff 系统的积分取得了一些有意义的成果<sup>[10-19]</sup>. 本文研究 Birkhoff 系统的一类新积分, 称为局部能量积分, 给出了其存在的条件, 证明了在特殊情况下它将成为能量积分.

## 2. Birkhoff 方程及其积分

Birkhoff 方程的一般形式为<sup>[2-4]</sup>

$$\omega_{\mu\nu} \dot{a}^\nu - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R^\mu}{\partial t} = 0, \quad (\mu, \nu = 1, \dots, 2n), \quad (1)$$

其中  $B = B(t, \mathbf{a})$  称为 Birkhoff 函数,  $R_\mu = R_\mu(t, \mathbf{a})$  称为 Birkhoff 函数组, 而

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \quad (2)$$

称为 Birkhoff 张量. 设系统非奇异, 即

$$\det(\omega_{\mu\nu}) \neq 0, \quad (3)$$

则由 (1) 式可解出所有  $\dot{a}^\mu$ , 有

$$\dot{a}^\mu = \omega^{\mu\nu} \left( \frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} \right). \quad (4)$$

Birkhoff 方程有两类经典积分:

1) 对自治形式的 Birkhoff 方程, 即

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial R_\nu}{\partial t} = 0, \quad (\nu = 1, \dots, 2n), \quad (5)$$

则 Birkhoff 函数是系统的积分<sup>[13]</sup>

$$I = B(\mathbf{a}) = h. \quad (6)$$

2) 如果满足条件<sup>[13]</sup>

$$\frac{\partial B}{\partial a^i} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^i} = 0 \quad (\nu = 1, \dots, 2n), \quad (7)$$

则 Birkhoff 方程有积分

$$I = R_i(t, \mathbf{a}) = \text{const}. \quad (8)$$

因为 Birkhoff 函数  $B$  通常有能量意义, 故称积分 (6) 为能量积分. 因为 (7) 式表明  $a^i$  不出现在函数  $B$  和  $R_\nu$  中, 故称积分 (8) 为循环积分.

## 3. 一类新的积分

下面导出一类新的积分.

将方程 (1) 两端乘以  $\dot{a}^\mu$  并对  $\mu$  求和, 得到

$$\frac{\partial B}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \dot{a}^\mu = 0. \quad (9)$$

将函数  $B$  分成两部分

\* 国家自然科学基金(批准号: 10572021)资助的课题.

† E-mail: hi-zsw@sina.com

$$B = B_1 + B_2. \tag{10}$$

Hamilton 系统是 Birkhoff 系统的特例,在 Hamilton 系统中,可设  $B_1 = T, B_2 = V$ , Birkhoff 函数  $B = H = T + V$  其中  $T, V, H$  分别为系统的动能、势能和机械能.

将(10)式代入(9)式,得

$$\frac{\partial B_1}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu + \left( \frac{\partial B_2}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) \dot{a}^\mu = 0. \tag{11}$$

因为

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{\partial B_1}{\partial a^\mu} \dot{a}^\mu + \frac{\partial B_1}{\partial t}, \tag{12}$$

(11)式变为

$$\frac{dB_1}{dt} - \frac{\partial B_1}{\partial t} + \left( \frac{\partial B_2}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) \dot{a}^\mu = 0, \tag{13}$$

则

$$\frac{dB_1}{dt} = \frac{\partial B_1}{\partial t} - \left( \frac{\partial B_2}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) \dot{a}^\mu, \tag{14}$$

于是有

命题 对 Birkhoff 方程,如果满足条件

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} - \left( \frac{\partial B_2}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) \dot{a}^\mu = 0, \tag{15}$$

则有积分

$$I = B_1 = \text{const}. \tag{16}$$

积分(16)可称为局部能量积分,因为它表示 Birkhoff 函数中的一部分是积分.

如果  $B_1, B_2, R_\mu$  满足

$$\frac{\partial B_1}{\partial t} = \frac{\partial B_2}{\partial t} = \frac{\partial R_\mu}{\partial t} = 0, \tag{17}$$

则(6)式给出系统的能量积分

$$I = B_1 + B_2 = \text{const}. \tag{18}$$

在动力学系统中,若机械能守恒,但其中的局部能量动能或势能不一定守恒,反之,在机械能不守恒的情况下,其中的局部能量动能或势能却可能是守恒的,故研究 Birkhoff 系统的局部能量积分有重要意义.

### 4. 算 例

例 1 6 阶 Birkhoff 系统为

$$R_1 = a^4, R_2 = a^5, R_3 = a^6, R_4 = R_5 = R_6 = 0,$$

$$B = \frac{1}{2} \{ (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^4)^2 + (a^5)^2 + (a^6)^2 \} + a^3. \tag{19}$$

令

$$B_1 = \frac{1}{2} (a^6)^2 + a^3,$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \{ (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^4)^2 + (a^5)^2 \}, \tag{20}$$

由以上条件可计算出 Birkhoff 张量和 Birkhoff 逆变张量分别为

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\omega^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

代入(4)式可求出

$$\dot{a}^1 = a^4, \dot{a}^2 = a^5, \dot{a}^3 = a^6, \dot{a}^4 = -a^1, \dot{a}^5 = -a^2, \dot{a}^6 = -1. \tag{22}$$

由  $B_1, B_2, R_\mu$  并利用(22)式,容易验证(15)式成立,于是命题给出积分

$$I = B_1 = \frac{1}{2} (a^6)^2 + a^3 = \text{const}, \tag{23}$$

可以看出  $B_1, B_2, R_\mu$  还满足(17)式,故系统还有能量积分

$$I = B_1 + B_2 = \text{const}. \tag{24}$$

例 2 4 阶 Birkhoff 系统为

$$R_1 = ta^2, R_2 = 0, R_3 = a^4, R_4 = 0, B = -a^1 a^2 + a^3 a^4. \tag{25}$$

令

$$B_1 = a^3 a^4, B_2 = -a^1 a^2, \tag{26}$$

可计算出

$$(\omega_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\omega^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

代入(4)式可解出

$$\dot{a}^1 = -\frac{a^1}{t}, \dot{a}^2 = 0, \dot{a}^3 = a^3, \dot{a}^4 = -a^4. \quad (28)$$

可验证(15)式满足,命题给出积分

$$I = B_1 = a^3 a^4 = \text{const}, \quad (29)$$

可以看出  $B_1, B_2, R_\mu$  不满足(17)式,故函数  $B$  不是能量积分.

## 5. 结 论

本文研究了 Birkhoff 系统的局部能量积分,给出了其存在的条件.对某些 Birkhoff 系统,不一定有能量积分,但可以有局部能量积分,如上述例 2.故本文丰富了 Birkhoff 系统的积分理论.

- [ 1 ] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems*( Providence RI : AMS College Publ )
- [ 2 ] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics II*( New York : Springer-Verlag ).
- [ 3 ] Mei F X , Shi R C , Zhang Y F , Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian Systems* ( Beijing : Beijing Institute of Technology Press ) ( in Chinese ) [ 梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京 北京理工大学出版社) ]
- [ 4 ] Mei F X 2001 *Int. J. of Non-Linear Mech.* **36** 817
- [ 5 ] Mei F X , Shi R C , Zhang Y F , Zhu H P 1997 *Stability of Motion of Constrained Mechanical Systems* ( Beijing : Beijing Institute of Technology Press ) ( in Chinese ) [ 梅凤翔、史荣昌、张永发、朱海平 1997 约束力学系统的运动稳定性(北京 北京理工大学出版社) ]
- [ 6 ] Mei F X 1993 *Chin Sci. ( Series A )* **23** 709 ( in Chinese ) [ 梅凤翔 , 1993 中国科学( A 辑 ) **23** 709 ]
- [ 7 ] Fu J L , Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023 ( in Chinese ) [ 傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023 ]
- [ 8 ] Fu J L 1999 *J. Shangqiu Teachers College* **15** ( 6 ) 15 ( in Chinese ) [ 傅景礼 1999 商丘师专学报 **15** ( 6 ) 15 ]
- [ 9 ] Fu J L , Chen L Q , Luo S K , Cheng X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 ( in Chinese ) [ 傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2289 ]
- [ 10 ] Luo S K , Fu J L , Cheng X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 ( in Chinese ) [ 罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383 ]
- [ 11 ] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 ( in Chinese ) [ 张 毅 2002 物理学报 **51** 461 ]
- [ 12 ] Fu J L , Chen L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2664 ( in Chinese ) [ 傅景礼、陈立群 2003 物理学报 **52** 2664 ]
- [ 13 ] Zheng G H , Chen X W , Mei F X 2001 *J. Beijing Institute of Technology* **10** 17
- [ 14 ] Zhang Y , Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419 ( in Chinese ) [ 张毅、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419 ]
- [ 15 ] Zhang Y , Fan C X , Ge W K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3664 ( in Chinese ) [ 张 毅、范存新、葛伟宽 2004 物理学报 **53** 3664 ]
- [ 16 ] Xu Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4971 ( in Chinese ) [ 许志新 2005 物理学报 **54** 4971 ]
- [ 17 ] Zhang H B 2002 *Chin. Phys.* **11** 765
- [ 18 ] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* ( Beijing : Beijing Institute of Technology Press ) ( in Chinese ) [ 梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量. (北京 北京理工大学出版社) ]
- [ 19 ] Fu J L , Chen L Q 2004 *Physics Letters A* **324** 95

# Local energy integral of Birkhoffian systems<sup>\*</sup>

Zheng Shi-Wang<sup>1)</sup> Jia Li-Qun<sup>2)</sup>

1) *Department of Physics and Information Engineering, Shangqiu Teachers College, Shangqiu 476000, China*

2) *College of Science, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China*

( Received 16 March 2006 ; revised manuscript received 15 April 2006 )

## Abstract

The purpose of this paper is to study local energy integral for the Birkhoffian systems. The condition under which there exists the integral in the Birkhoffian systems is obtained. Two examples are given to illustrate the application of the result.

**Keywords :** Birkhoffian systems , local energy integral , energy integral

**PACC :** 0320

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10572021 ).