

联立薛定谔系统新精确解及其所描述 的孤子脉冲和时间孤子*

马松华 方建平†

(浙江丽水学院物理系, 丽水 323000)

(2005 年 12 月 7 日收到, 2006 年 3 月 15 日收到修改稿)

利用拓展的 Riccati 映射法, 讨论了联立薛定谔系统, 得到了其新的精确解, 并根据所得到的解模拟出孤子脉冲、飞秒孤子和时间孤子, 以及时间孤子间的弹性相互作用.

关键词: 联立薛定谔方程, 拓展 Riccati 映射, 孤子脉冲, 时间孤子

PACC: 0340, 0365, 0545

1. 引言

自从 19 世纪发明闪光灯摄影技术以来, 短的脉冲就一直作为储存信息的主要手段. 1960 年激光出现以后, 超短光脉冲的产生、传输以及与物质之间的相互作用就成为光学领域的重要研究课题之一. 由于超短脉冲在时间分辨率、高峰值功率以及相干频谱宽等方面的优点, 在物理、化学、生物及医学等领域有重要的作用和广泛的应用前景. 在光学领域, 超短光脉冲广泛应用于超高容量的光信息通信及光信息存储、处理等. 1965 年人们首次利用被动锁模技术在红宝石激光器上直接产生皮秒级超短激光脉冲, 从此超短激光脉冲技术的发展十分迅速. 1976 年利用对撞锁模技术实现了 0.3ps 激光脉冲, 1981 年利用 CPM 环行染料激光器产生了 90fs 的激光脉冲. 1991 年出现自锁模掺钛蓝宝石激光器后, 输出脉冲宽度由几十飞秒降至几飞秒, 已接近由不确定性原理规定的脉宽的理论极限 3fs. 随着时间分辨要求的提高, 更短脉宽的阿秒激光脉冲的实现变得十分迫切. 强场高次谐波的出现, 为人们实现阿秒激光脉冲提供了较为现实的条件. 1972 年, Zakharov 和 Shabat^[1]找到了标准非线性薛定谔方程的 Lax 对偶, 并且发现由此得到的非线性薛定谔方程是一个可积系统, 这个理论保证了非线性薛定谔孤子的稳定性. 他们用反散射变换法(IST)巧妙地求解了该方程, 获

得了亮、暗孤子解. 人们也对三次—五次方非线性薛定谔方程的亮、暗孤波解^[2,3]以及周期解、类孤波解^[4]进行了研究. 随着超短光脉冲技术的飞速发展, 飞秒量级的光脉冲的传输特性日益成为研究的热点课题之一. 关于飞秒光脉冲在光纤中的传输研究, 早在 1987 年 Kodama 等人^[5]就已利用多重尺度法导出了飞秒光脉冲在光纤中的传输演化方程. 高阶非线性薛定谔方程(HNLSE), 人们采用各种方法, 如 AKNS 的反散射变换法^[6], 行波变换法^[7], 广田(Hirota)直接法^[8,9], Painlevé 分析及 Bäcklund 变换法^[10], 守恒定律法^[11], 直接积分法^[12], Darboux 变换法^[13]等方法对高阶非线性薛定谔方程进行了解析及数值研究, 证明了光纤中的孤子是光纤色散与非线性相互作用的产物, 服从非线性薛定谔方程(NLSE). 现在的问题是: 是否也能在低阶低维的系统来模拟出超短脉冲孤子, 即找到孤子脉冲所服从的其他方程, 是否可以用其他的非线性方程的求解手段来讨论这一问题? 本文以拓展的映射法在联立薛定谔方程^[14,15]

$$\lambda u - uv - u_{xx} = 0, v_t - (u^n)_x = 0 \quad (1)$$

(这里的 λ 是常数)中的应用为例来回答上述问题. 首先利用拓展的映射法求得系统(1)的精确解(这里取方程中的 $n = 1$), 然后根据解中所包含的任意函数构建出系统的局域结构, 如超短孤子脉冲、时间孤子等. 联立薛定谔系统由 Vverosky 将 Olver 的一般算

* 丽水学院重点扶持项目(批准号: FC06001)资助的课题.

† E-mail: zjlsfjp@yahoo.com.cn

符理论沿负阶拓展并应用到 KdV 方程得到的^[16], 所以人们又称它为负 KdV 系统. 最近, 我们将映射法进行了拓展, 并成功地推广到几个有丰富物理背景的物理模型, 如 (2+1) 维 Boiti-Leon-Pempinelli 系统、(2+1) 维 Broer-Kaup-Kupershmidt 系统以及 (2+1) 维 dispersive long-water wave 系统等^[17-21], 并得到非线性系统的多种局域结构. 本文利用拓展的映射法来讨论光孤子的时间特性和相互作用特性. 拓展的 Riccati 映射法的基本思想是^[12], 对于给定的一个非线性物理模型

$$P(u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, \dots) = 0, \quad (2)$$

设它有如下形式的解:

$$u = \sum_{i=-N}^N \alpha_i(x) \phi^i(\xi(x)), \quad (3)$$

其中 ϕ 满足

$$\phi' = \sigma + \phi^2, \quad (4)$$

这里 $x = (x_0 = t, x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\alpha_i(x)$ 和 $\xi(x)$ 为待定的任意函数. N 由通常的截断法来确定. 将 (3) 和 (4) 式代入到 (2) 式就可以得到一组 $\alpha_i(x)$ 和 $\xi(x)$ 的约束方程. 通过约束方程确定求得变量 $\alpha_i(x)$ 和 $\xi(x)$, 再根据 Riccati 方程解

$$\phi = \begin{cases} -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma} \xi), & \sigma < 0, \\ -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma} \xi), & \sigma < 0 \\ \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma} \xi), & \sigma > 0, \\ -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma} \xi), & \sigma > 0, \\ -\frac{1}{\xi}, & \sigma = 0, \end{cases} \quad (5)$$

就可以确定所求系统的精确解.

2. (1+1) 维联立薛定谔方程的精确解

根据对方程 (1) 的领头项分析, 可设其形式解为

$$\begin{aligned} u &= f + g\phi + h\phi^2 + \frac{a}{\phi} + \frac{b}{\phi^2}, \\ v &= F + G\phi + H\phi^2 + \frac{A}{\phi} + \frac{B}{\phi^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $u \equiv u(x, t)$, $v \equiv v(x, t)$, $f \equiv f(x, t)$, $g \equiv g(x, t)$, $h \equiv h(x, t)$, $a \equiv a(x, t)$, $b \equiv b(x, t)$, $F \equiv F(x, t)$, $G \equiv G(x, t)$, $H \equiv H(x, t)$, $A \equiv A(x, t)$, $B \equiv B(x, t)$, $\phi \equiv \phi(\xi)$, $\xi \equiv \xi(x, t)$ 均为待求函数. 将 (6) 式和 (4) 式代入方程 (1) 并按 ϕ 的同次幂合并, 令 ϕ^i ($i = 1, 2, \dots$) 前的系数为零得下列方程组:

$$hH + 6h\xi_x^2 = 0, \quad (7)$$

$$4h_x \xi_x + gH + 2h\xi_{xx} + 2g\xi_x^2 + hG = 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} h_{xx} + gG + 8h\xi_x^2 \sigma + 2g_x \xi_x \\ + g\xi_{xx} + hF - \lambda h + fH = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} -\lambda g + fG + 4h_x \xi_x \sigma + 2g\xi_x^2 \sigma + hA + g_{xx} \\ + 2h\xi_{xx} \sigma + gF + aH = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} fF + 2b\xi_x^2 + g\xi_{xx} \sigma - a\xi_{xx} + f_{xx} - \lambda f \\ + 2g_x \xi_x \sigma + gA + bH + aG \\ + hB - 2a_x \xi_x + 2h\xi_x^2 \sigma^2 = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -2b\xi_{xx} - 4b_x \xi_x + gB + fA + aF + a_{xx} \\ + 2a\xi_x^2 \sigma + bG - \lambda a = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -2a_x \xi_x \sigma + fB + b_{xx} - \lambda b + aA + bF \\ + 8b\xi_x^2 \sigma - a\xi_{xx} \sigma = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} aB + 2a\xi_x^2 \sigma^2 - 2b\xi_{xx} \sigma \\ - 4b_x \xi_x \sigma + bA = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$6b\xi_x^2 \sigma^2 + bB = 0, \quad (15)$$

$$2H\xi_t - 2h\xi_x = 0, \quad (16)$$

$$-g\xi_x - h_x + G\xi_t = 0, \quad (17)$$

$$-g_x + 2H\xi_t \sigma + G_t - 2h\xi_x \sigma = 0, \quad (18)$$

$$G\xi_t \sigma + F_t - A\xi_t - g\xi_x \sigma + a\xi_x - f_x = 0, \quad (19)$$

$$2b\xi_x + A_t - a_x - 2B\xi_t = 0, \quad (20)$$

$$-b_x + B_t - A\xi_t \sigma + a\xi_x \sigma = 0, \quad (21)$$

$$2b\xi_x \sigma - 2B\xi_t \sigma = 0. \quad (22)$$

由 (7) (8) (12) (17) (20) (22) 式, 可得

$$a = 6\xi_{xt} \sigma, \quad b = -6\xi_x \xi_t \sigma^2,$$

$$h = -6\xi_x \xi_t, \quad g = \frac{6}{5} \xi_{xt},$$

$$f = \frac{1}{5} \frac{-5\xi_{xt} \xi_{xxx} \xi_t + 15\xi_{xx} \xi_{xt}^2 - 15\xi_{xt} \xi_x \xi_{xxt} + 8\xi_x^3 \sigma \xi_t \xi_{xt} + 5\xi_{xxx} \xi_x \xi_t + 60\xi_x^2 \sigma \xi_t^2 \xi_{xx}}{\xi_x (\xi_x \xi_{xt} - \xi_{xx} \xi_t)},$$

$$A = 6\sigma \xi_{xx}, \quad B = -6\xi_x^2 \sigma^2, \quad H = -6\xi_x^2, \quad G = -\frac{6}{5} \frac{5\xi_{xx} \xi_t + 4\xi_x \xi_{xt}}{\xi_t}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{5} \{ & -5\xi_{xxx} \xi_t \xi_{xx} + 15\xi_{xx} \xi_{xt} - 15\xi_x \xi_{xxt} \xi_{xx} - 5\xi_x^2 \lambda \xi_{xt} + 5\xi_x^2 \xi_{xxx} + 48\xi_x^4 \sigma \xi_{xt} \\ & + 20\xi_x^3 \sigma \xi_t \xi_{xx} + 5\lambda \xi_x \xi_t \xi_{xx} \} \{ \xi_x (-\xi_x \xi_{xt} + \xi_{xx} \xi_x) \}. \end{aligned}$$

再将 (23) 式代入到 (9)–(11) (18) 和 (19) 式得到 5 个关于变量为 ξ 的约束方程, 发现它们均存在如下变量分离形式的特解:

$$\xi = \chi(t) + \tau(t), \quad (24)$$

其中 $\chi(x) \equiv \chi$ 是关于 x 的任意函数, $\tau(t) \equiv \tau$ 是关于 t 的任意函数.

现在将 (23) (25) 以及 (5) 式代入到 (1) 式, 则得如下变量分离解:

情形 1 当 $\sigma < 0$ 时,

$$u_1 = 6\{\chi_x \tau_t \alpha (1 - 2 \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau)))^2 + \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^4\} / \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2, \quad (25)$$

$$v_1 = \{4\sigma \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2 \chi_x^3 + \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2 \lambda \chi_x + 6\chi_{xx} \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^3 \chi_x + 6\chi_x^3 \sigma \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^4 + 6\chi_{xx} \chi_x \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau)) + 6\chi_x^3 \sigma - \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2 \chi_{xxx}\} / \chi_x \tanh(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2, \quad (26)$$

$$u_2 = 6\{\chi_x \tau_t \alpha (1 - 2 \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau)))^2 + \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^4\} / \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2, \quad (27)$$

$$v_2 = \{4\sigma \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2 \chi_x^3 + \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2 \lambda \chi_x + 6\chi_{xx} \sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^3 \chi_x + 6\chi_x^3 \sigma \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^4 + 6\chi_{xx} \chi_x \sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau)) + 6\chi_x^3 \sigma - \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2 \chi_{xxx}\} / \chi_x \coth(\sqrt{-\sigma}(\chi + \tau))^2. \quad (28)$$

情形 2 当 $\sigma > 0$ 时,

$$u_3 = -6\{\chi_x \tau_t \alpha (1 + 2 \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau)))^2 + \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^4\} / \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2, \quad (29)$$

$$v_3 = \{4\sigma \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2 \chi_x^3 + \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2 \lambda \chi_x - 6\chi_{xx} \sqrt{\sigma} \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^3 \chi_x - 6\chi_x^3 \sigma \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^4\}$$

$$+ 6\chi_{xx} \chi_x \sqrt{\sigma} \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau)) - 6\chi_x^3 \sigma - \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2 \chi_{xxx}\} / \chi_x \tanh(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2, \quad (30)$$

$$u_4 = -6\{\chi_x \tau_t \alpha (1 + 2 \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau)))^2 + \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^4\} / \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2, \quad (31)$$

$$v_4 = \{4\sigma \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2 \chi_x^3 + \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2 \lambda \chi_x + 6\chi_{xx} \sqrt{\sigma} \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^3 \chi_x - 6\chi_x^3 \sigma \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^4 - 6\chi_{xx} \chi_x \sqrt{\sigma} \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau)) - 6\chi_x^3 \sigma - \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2 \chi_{xxx}\} / \chi_x \coth(\sqrt{\sigma}(\chi + \tau))^2. \quad (32)$$

情形 3 当 $\sigma = 0$ 时

$$u_5 = -6 \frac{\chi_x \tau_t}{(\chi + \tau)^2}, \quad (33)$$

$$v_5 = -\{\chi_{xxx} \chi^2 + 2\chi_{xxx} \chi \tau + \chi_{xxx} \tau^2 - \lambda \chi_x \chi^2 - 2\lambda \chi_x \chi \tau - \lambda \chi_x \tau^2 - 6\chi_{xx} \chi_x \chi - 6\chi_{xx} \chi_x \tau + 6\chi_x^3\} / (\chi_x (\chi + \tau)^3). \quad (34)$$

3. 孤子脉冲、时间孤子及相互作用

3.1. 孤子脉冲

对于 (2+1) 维的模型, 如果系统在空间的各个方向都局域, 就可得到其局域结构诸如线孤子、半线孤子、峰孤子、紧致子、环孤子、盘孤子、折叠子和泡孤子等. 对于 (1+1) 维的情形, 因只有一个方向, 所以只要这个方向局域, 就可得局域孤子. 如果时域也局域, 那就意味着物理量在一短时间内形成并消失, 所以这种结构尽管类似于 (2+1) 维模型下的局域结构, 但实际上应该是一种脉冲. 我们知道, 光纤中的孤子是光纤色散与非线性相互作用的产物, 服从 NLSE, 因此, 可以利用上述系统的解构建出相应的光孤子来. 例如, 在系统解 (25) 式中, 选取任意函数

$$\chi = 1 - 0.1 \tanh(5x), \quad \tau = 0.1 \tanh(kt), \quad (35)$$

其中 k 为任意常数, 且 $k = 0.1$, $d = -1$ 时, 得到图 1

(a).从图中不难看到,物理量 u 随着时域的扩展形成一个脉冲即孤子脉冲.

此外该脉冲的时域宽度与常数 k 有着密切的关系图 (b) 给出了当 k 取不同值时孤子脉冲的宽度.

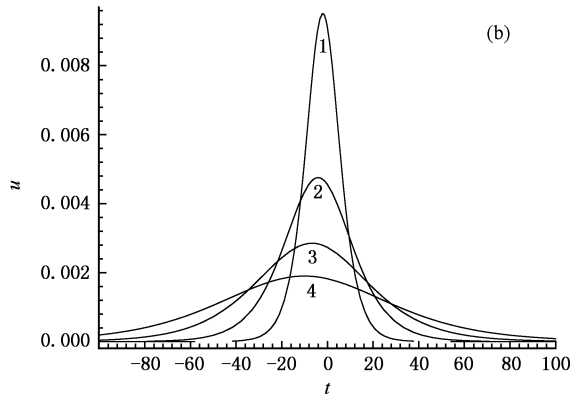
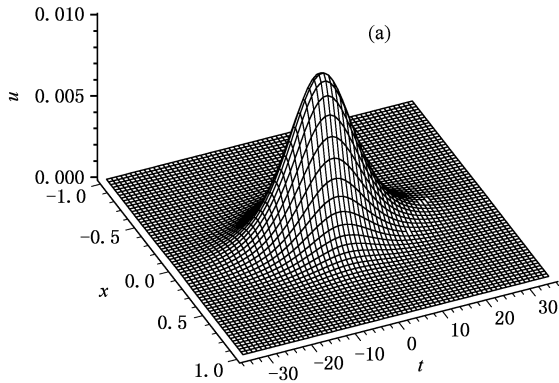


图 1 (a)由 (25) 式和 (35) 式得到的孤子脉冲,这里 $\sigma = -1, k = 0.1$ (b) 曲线 1, 2, 3, 4 分别对应 $k = 0.1, 0.05, 0.03, 0.02$ 时的不同脉冲宽度

3.2. 飞秒孤子和时间孤子

当孤子脉冲的脉冲宽度超短时可得到皮秒级超短激光脉冲和飞秒级激光脉冲即所谓的皮秒孤子和飞秒孤子.图 (a) 给出了当 $k = 10$ 时的孤子图.我

们知道光纤中的短脉冲由于介质的色散使脉冲在时域展宽,而介质的非线性效应会使脉冲变窄,当色散和非线性严格平衡时,短脉冲就会以不变的形状在光纤中传播,形成所谓的时间光孤子(temporal soliton).图 (b) 给出了当 $k = 0.001$ 时的时间孤子.

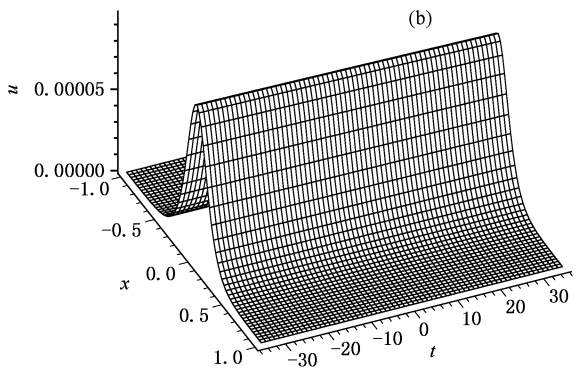
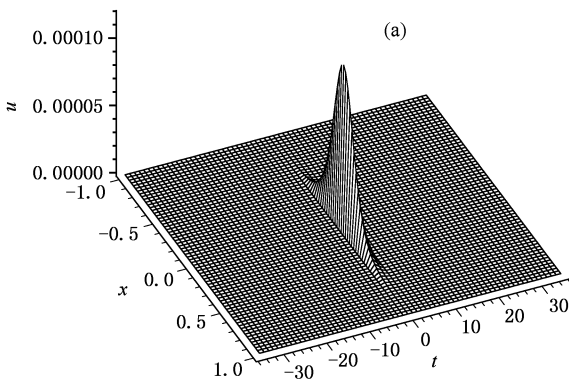


图 2 (a) 当 $k = 10$ 时的飞秒孤子;(b): $k = 0.001$ 时的时间孤子

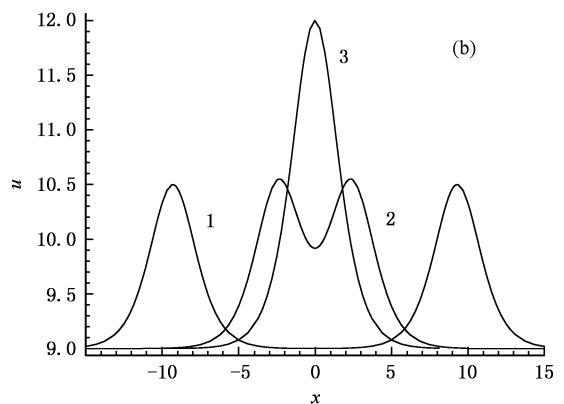
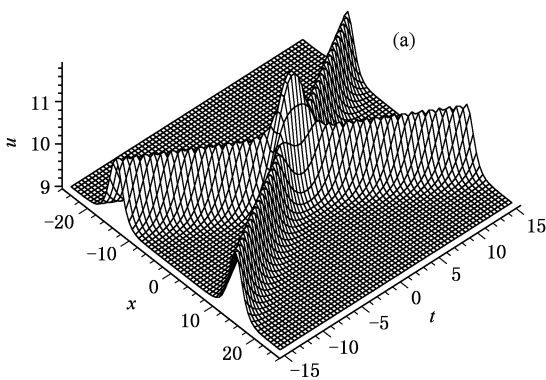


图 3 (a)由 (34) 式和 (36) 式得到孤子时间演化图(这里 $\sigma = 0$)(b) 曲线 1, 2, 3 分别对应时间为 $-10, -3, 0$ 的三个时间的截面图

3.3. 时间孤子间的弹性碰撞

图 1 和图 2 中给出的孤子是不传播孤子,只说明孤子在时域里的演化特性,为得到孤子在空间的演化即传播和相互作用,我们将系统解(34)中的任意函数 χ, τ 取成如下形式:

$$\chi = \frac{0.5 \operatorname{sech}(x)}{1 + 0.5 \operatorname{sech}(x)}, \tau = \operatorname{sech}(t). \quad (36)$$

此时可以得到了两个孤子间的相互作用图,如图 3(a)所示.为便于比较,我们画出了几个不同时间的截面图,如图 3(b)所示.根据对物理量的振幅等分析知,这是一个弹性相互作用.关于这方面已有详细的报道,不再赘述.

4. 结论与讨论

利用拓展的映射法,本文得到了联立薛定谔系

统丰富的、新的精确解,其中(33)式具有分离变量法的一般通解形式,利用该通式解可得到相当丰富的局域结构,这已有许多报道,本文是利用其他的解来构建局域结构,即用(25)式构建出超短孤子脉冲和相对稳定的时间孤子,利用(34)式构建出时间孤子间的相互作用.通常,光纤中的孤子传播服从非线性薛定谔方程,而本文的工作从理论上表明了利用联立薛定谔方程能很好地描述光纤中的孤子的光纤色散与非线性相互作用现象.这也印证了文献[22, 23]所证明了的“如果物理系统能用(1+1)维的微分方程表示,人们总可以利用适当的变换或近似将其转化为薛定谔类型的方程”.

作者对郑春龙教授的建议和讨论表示感谢.

-
- [1] Zakharov V E, Shabat A B 1972 *J. Sov. Phys. JETP*. **34** 62
- [2] Pusharov D I, Tanev S 1996 *J. Opt. Commun.* **124** 354
- [3] Tanev S, Pusharov D I 1997 *J. Opt. Commun.* **141** 322
- [4] SchAurmann H W 1996 *Phys. Rev. E* **54** 4312
- [5] Kodama Y, Hasegawa A 1987 *J. IEEE J. Quantum Electron* **QE-23** 510
- [6] Sasa N, Satsuma 1991 *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** 409
- [7] Xu B, Wang W 1995 *J. Phys. Rev. E* **51** 1493
- [8] Porsezian K, Nakkeeran K 1996 *J. Phys. Rev. Lett.* **76** 3955
- [9] Gedalin M, Scott T C, Band Y B 1997 *J. Phys. Rev. Lett.* **78** 448
- [10] Kim J, Park Q H, Shin H J 1998 *J. Phys. Rev. E*. textbf **58** 6746
- [11] Palacios S L, Guinea A, Fernández-Dí J M *et al* 1999 *J. Phys. Rev. E* **60** R45
- [12] Xu Z Y, Li L, Li Z H *et al* 2002 *J. Opt. Commun.* **210** 375
- [13] Li Z H, Tian H P, Zhou G S 2000 *J. Phys. Rev. Lett.* **84** 4096
- [14] Nimmo J J C 1992 *Phys. Lett. A* **168** 113
- [15] Lou S Y 1995 *Phys. Lett. A* **175** 23
- [16] Verosky J M 1991 *J. Math. Phys.* **32** 1733
- [17] Fang J P, Ren Q B, Zheng C L 2005 *Z. Naturforsch.* **60(a)** 245
- [18] Fang J P, Zheng C L 2005 *Chin. Phys.* **14** 0669
- [19] Fang J P, Zheng C L, Zhu H P, Ren Q B 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 203
- [20] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 [in Chinese] 方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54**: 2990]
- [21] Fang J P, Zheng C L, Liu Q 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 245
- [22] Cslogero F, Degasperis A, Xiaoda J 2000 *J. Math. Phys.* **41** 6399
- [23] Cslogero F, Degasperis A, Xiaoda J 2001 *J. Math. Phys.* **42** 2635

New exact solutions for the related Schrödinger equation and the temporal-soliton and soliton-impulse^{*}

Ma Song-Hua Fang Jian-Ping[†]

(*Department of Physics , Zhejiang Lishui University , Lishui 323000 ,China*)

(Received 7 December 2005 ; revised manuscript received 15 March 2006)

Abstract

Using an entended Riccati mapping approach , we discuss the related Schrödinger system and obtain the new exact solutions. Based on the derived solutions , the soliton-impulse and temporal-soliton and the interaction between solitons were constructed in this paper.

Keywords : related Schrödinger equation , entended Riccati mapping approach , soliton-impulse , temporal-soliton

PACC : 0340 , 0365 , 0545

^{*} Project supported by the Foundation of Lishui University (Grant No. FC06001).

[†] E-mail : zjlsfp@yahoo.com.cn