

体积算符对任意价顶角的本征作用与本征值谱^{*}

邵亮^{1)†} 邵丹²⁾ 邵常贵²⁾ 张祖全²⁾

1) 武汉科技大学理学院应用物理系, 武汉 430081)

2) 江汉大学物理与信息工程学院物理系, 武汉 430056)

(2005 年 12 月 30 日收到, 2006 年 4 月 1 日收到修改稿)

利用体积算符所含抓三元组对自旋网任意价顶角中圈线作用的反称化和双元恒等式, 证明了这种作用均为本征作用, 本征值为 -2 . 用代数方法给出了对任意价顶角求体积算符本征值的系统程式, 得到了普遍情况下的 3、4、5 和 6 顶角体积本征值的具体代数表式.

关键词: 体积算符, 任意价顶角, 本征作用证明, 本征值谱

PACC: 0460

1. 引言

在自旋网表象量子引力中, 利用重耦理论, 将毗邻顶点的外腿人为封闭, 引入图形不变量, 可求得体积算符的系列本征值. 但这种封闭, 并不能反映出顶角中圈线的原始真实走向, 而且得到的体积本征值与面积本征值间缺乏相容性^[1]. 用抓在顶角外腿间移动的方法, 亦可探求体积算符的本征值. 但此法得到的对应于同一顶角上被抓住的不同 3 个外腿而得的重耦矩阵并不同, 并非最多只差一负号^[1]. 而且用上述两种方法得到的 3 顶角贡献的体积本征值恒为零. 这与任意高于 3 价的顶角均可用 3 顶角展开之间, 缺少联系. 而且 3 顶角是自旋网的基本顶角, 它应当对体积本征值有贡献^[2].

与前面两种方法不同, 本文采用 Penrose 指出的, 用空间 3 流形中体积算符所含的 3 个抓在腿中的圈线上的作用, 从根本上实现了体积算符对任意价顶角的真实抓作用分析与计算, 并将此思路一直贯彻至得到最后结果. 但这与只计算了 3 顶角体积本征值两种线型贡献的文献^[2]不同, 本文计算了任意顶角的全部三种线型的贡献, 而且抓与圈线的合成将采用反称化^[3]. 同时, 找到了 3 流形中抓作用下的圈合成中和本征作用的平面图形计算中, 双元恒等式的正确使用. 用这种方法本文将证明, 对任意

价顶角, 在抓的作用对所有圈线施加之后, 顶角的所有圈线走向仍保持不变. 即抓的三元组对所有圈线的作用均为本征作用, 而且所有本征值均为 -2 . 从而彻底证明了自旋网是体积算符的本征态. 同时, 通过如实的分析, 计算了过顶角的所有可能走向圈线对抓法数的贡献, 求得了 3 顶角、4 顶角、5 顶角和 6 顶角的体积算符本征值的代数表式, 以及求任意价顶角体积本征值的程式.

2. 抓三元组对网结中圈线的本征作用和本征值

将时空做 $3+1$ 分解^[4], 其中的空间 3 流形 Σ 中的自旋网记为 S . 将 S 在使通过其结点的圈线的环绕状况不受抹糊下画到 2 维纸面上. S 的结点将是画出的图中的网结. 而 3 流形 Σ 中的 S 的腿画到 2 维平面上后出现的跨交, 则是假交点(并不当做真交处理). 一般的自旋网结点放大后, 由图 1 给出. 图中通过网结的线, 均为 Wilson 圈(线), 它们在网结中并无交点(即某些圈线并不存在), 为了计算时考虑各种可能, 才有了它们的相交. 这些 Wilson 圈, 利用规范群的表示, 在该点形成了“缠结”. 本文研究的网结中的这些圈线可保留着 3 流形 Σ 中的自旋网的原始信息, 在本文的体积算符的作用机理下, 这些圈线将被证明是最终保持不变的. 当考虑高价顶角的

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10275022)资助的课题.

[†] E-mail: liang_972883@sohu.com

3 顶角展开时,每一展开均对应这样一个图.

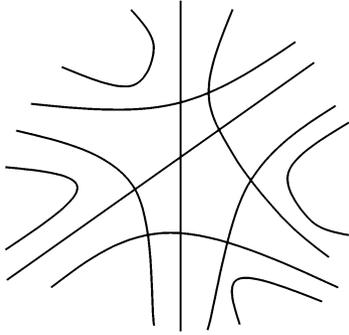


图 1 网络中通过的圈线

2.1. 3 顶角

体积算符对 1 和 2 顶角作用的本征值为零. 3 顶角的网络结构如图 2 所示.

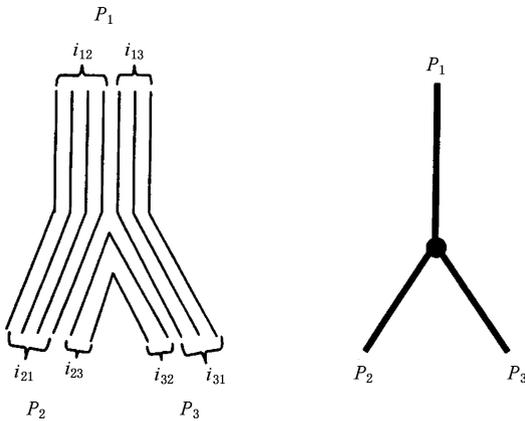


图 2 3 顶角的网络结构

这里用 P 表示毗邻顶点的腿的颜色数,用 i_{ab} 表示贯通腿 a, b 的圈线次数,从而有 $i_{ab} = i_{ba}$. 这里, $P_1 = i_{12} + i_{13}, P_2 = i_{21} + i_{23}, P_3 = i_{32} + i_{31}$. 其他记号使用见文献 [3]. 3 顶角的 3 支腿中被体积算符抓三元组抓住的圈线在网络中的走向(即线型)分为 I, II, III 型(图 3).

体积算符中抓三元组中的各个抓,必须在与顶点毗连的不同腿上分别施行抓作用. 由于抓作用是在顶点附近的一微小“邻域”内进行,从而若抓作用为本征作用,其本征图式计算应保持腿中圈线远离顶点时不受抓作用影响. 经计算知^[3], 抓三元组对毗邻 3 顶角的腿中圈线的(I)(III)型作用可归结为(A)型图(图 4(A)),而(II)型作用归结为(B)型图(图 4(B)). 从而抓作用及其计算只需在(A)(B)中

虚线的左侧完成. 下面将证明(A)(B)型作用均为本征作用,且本征值均为 -2 .

本文的抓作用定义为反称化

$$\begin{matrix} \cup \\ \bullet \\ \cup \end{matrix} = \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} = \begin{matrix} | \\ | \\ | \end{matrix} - \begin{matrix} \diagup \\ \diagdown \end{matrix}$$

以(A)型为例,有

$$\dots = \dots - \dots + \dots + \dots - \dots \quad (1)$$

(1) 式给出的是已划在平面上的图(graph),用双元恒等式化简时,应采用 Penrose 的其附加 (-1) 因子的形式

$$\times = \parallel + (-1) \begin{matrix} \cup \\ \cap \end{matrix}$$

将上式代入(1)式,得

$$\dots = (1-1-1+1+1-1) \dots + (1-1-1+1) \dots + (1-1-1+1) \dots + (-1+1) \dots + (1+1+1-3-1-1) \dots = -2 \dots \quad (2)$$

从而可知,抓的(A)型作用为本征值为 -2 的本

征作用.(B)型的本征值为 -2 的本征作用,可类似地证明.

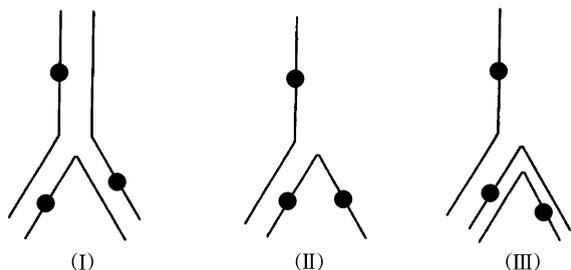


图 3 3 顶角圈线的线型

图 5 表示的抓作用.

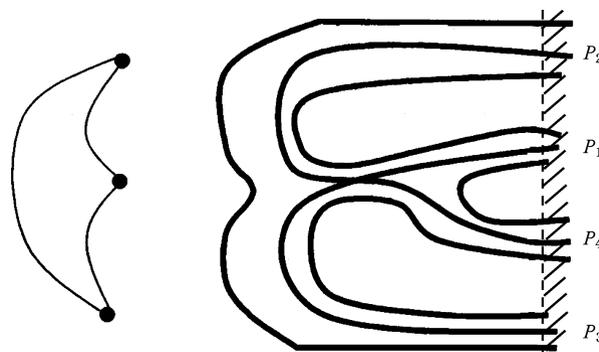


图 5 抓作用图

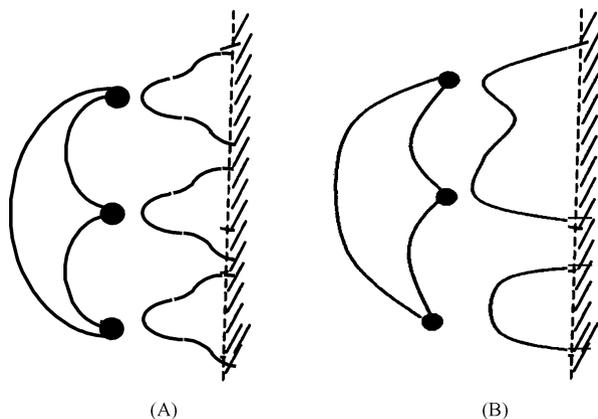


图 4 (A)三个抓抓在不同腿中的不同圈线上 (B)有两个抓抓在不同腿中的同一条圈线上

与 3 顶角类似,抓三元组在 3 支腿中分别抓住的 3 条线可能是通过网结的 3 条不同圈线,也可能是有两个抓在两支不同腿上抓住通过网结的同一圈线.对任意价顶角,也只有此两种可能.从而,以图 5 中的 4 价顶角为例(对于任何大于等于 3 价的顶角均成立),体积算符中抓的三元组对所有腿型中所有圈线的可能引起其走向改变的作用,归根结底也只得到 (A)与 (B)型两类.抛开与抓作用无关的腿与圈线(因它们未被改变),同样的证明知,该两种作用均为本征值为 -2 的本征作用.

由本节内容知,体积算符中抓三元组对任意价顶角的圈线作用均为本征作用,即所有被抓住的圈线在被施加完毕抓对它的合成重组作用后,仍保持被抓前的状态不变,出现的本征值均为 -2 (这是本文得到的新结果).

2.2. n (> 3) 顶角

抓对 n (> 3) 顶角圈线的本征作用(n = 3 时也适用),由于体积算符中的抓三元组必须抓在 3 个不同腿中的圈线上,而被抓的 3 个腿之间的相对位置不同,将出现 (●-●-●)(●-●,●)和(●,●,●)共 3 种被抓腿的类型(即腿型).每种腿型中存在着不同线型.对于 3 和 4 顶角,抓作用只存在(●-●-●)一种腿型.对大于 3 价的顶角,除需考虑贯通相邻腿的圈线外,本文为了用代数方式得到概括各种具体抓作用情况的算式,将考虑所有其他可能“隔腿”贯通网结(对穿)的圈线.随着顶角阶数的增加,这种圈线数目也随之增加.对于任何 n (> 3) 价顶角,为了求得体积算符中抓三元组的作用为本征作用,必须将所有可能的不同抓法均考虑到,即考虑到被施加抓作用的 3 条腿的所有腿型和腿中抓住的圈线的所有线型.必须证明在所有可能的腿型和线型下,抓作用均为本征作用.为此,不失普遍性,本文将给出由

3. 抓三元组对顶角抓法数的计算

3.1. 3 顶角

抓三元组对 3 顶角的 3 支腿的抓作用仅为 (I)(II)和(III) 3 种线型,它们的抓法数分别为^[2] $2i_{12}i_{23}i_{31}$, $i_{12}i_{23} + i_{23}i_{31} + i_{31}i_{12}$ 和 $i_{12}(i_{12} - 1)(i_{23} + i_{31}) + i_{23}(i_{23} - 1)(i_{12} + i_{31}) + i_{31}(i_{31} - 1)(i_{23} + i_{12})$. 易知,这些线型的全部抓法数为 $P_1 P_2 P_3 \equiv N_3$.

3.2. 4 顶角

为而后计算需要,本文在 4 顶角(以及高于 4 价的顶角)中将考虑所有可能对穿的圈线,见图 6. 现令抓三元组分别抓住腿 P_1, P_2 和 P_3 .

仍然可利用 3 顶角情况下抓住不同圈线的三种线型,分析体积算符中抓三元组对 4 顶角中圈线的抓法种类.对于 4 顶角,一共将有(I')(II')和(III')三种线型(均以抓住通过邻腿的圈线情况为代表),见图 7.

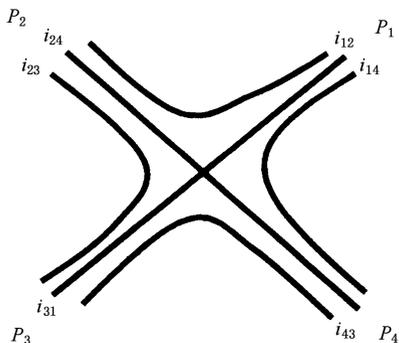
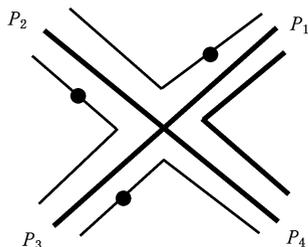


图 6 含对穿圈线的 4 顶角

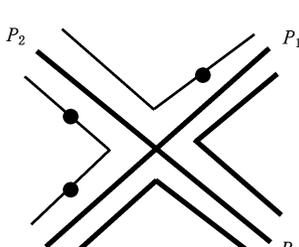
的抓法数,经计算为 $i_{12} i_{23} i_{34} + i_{23} i_{34} i_{14} + i_{12} i_{34} i_{14} + i_{12} i_{23} i_{14}$. 而抓住含对穿圈线(至少有一个抓在对穿线上)的抓法数为 $i_{24} P_1 P_3 + i_{13} [i_{12}(i_{14} + P_3) + i_{23}(i_{34} + P_1)]$. 对于线型(II'),抓三元组抓住通过邻腿的圈线的抓法数为 $2i_{12} i_{23} + i_{12} i_{34} + i_{23} i_{14}$. 而抓住含对穿圈线的抓法数为 $i_{13}(i_{12} + i_{23})$. 对于线型(III')抓三元组抓住通过邻腿的圈线的抓法数为 $i_{12} i_{23}(i_{12} + i_{23} - 2) + i_{14} i_{23}(i_{23} - 1) + i_{23} i_{12}(i_{12} - 1)$. 而抓住含对穿圈线的抓法数为 $i_{23} i_{13}(i_{23} - 1) + i_{12} i_{13}(i_{12} - 1)$. 现在已得到了抓三元组在腿型(●-●-●)中的 $(P_1 - P_2 - P_3)$ 抓法中不同线型的圈线上的抓法数.将如上抓法 $(P_1 - P_2 - P_3)$ 中三种线型的所有抓法数分别求和,得到抓三元组抓住通过相邻腿 P_1, P_2 和 P_3 中的圈线的抓法数为

$$i_{12} i_{34} i_{23} + i_{14} i_{34} i_{23} + i_{12} i_{34} i_{14} + i_{12} i_{23} i_{14} + i_{12}^2(i_{23} + i_{34}) + i_{23}^2(i_{12} + i_{14}) \equiv A(4), \quad (3)$$

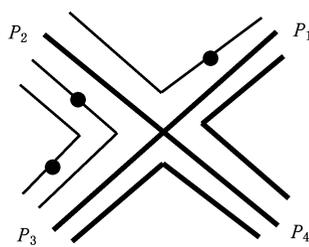
对于线型(I')抓三元组抓住通过邻腿的圈线



(I')



(II')



(III')

图 7 4 顶角圈线的线型

而抓住含有对穿圈线的抓法数为

$$i_{24} P_1 P_3 + i_{13} [i_{12}(i_{14} + P_3) + i_{23}(i_{34} + P_1)] + i_{13} i_{23}^2 + i_{13} i_{12}^2 \equiv B(4). \quad (4)$$

对于 4 顶角,抓作用的腿型只有(●-●-●)一种.这种被抓的腿型共包含 4 种可能,即 $(P_1 - P_2 - P_3)$, $(P_2 - P_3 - P_1)$, $(P_3 - P_4 - P_1)$ 和 $(P_4 - P_1 - P_2)$. 将(3)和(4)式分别做 3 次 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ 的指标循环.得到的抓法数与(3)和(4)式分别求和,将得到全部抓法数.从而,考虑了抓三元组作用的所有腿型和线型贡献后,抓三元组抓住通过邻腿的圈线的总抓法数为

$$4 [i_{34} i_{23}(i_{12} + i_{14}) + i_{12} i_{14}(i_{34} + i_{23})] + 2 [i_{12}^2 i_{34} + i_{23}^2 i_{14} + i_{12} i_{34}^2 + i_{23} i_{14}^2] + (i_{12} + i_{34}) (i_{23}^2 + i_{14}^2)$$

$$+ (i_{23} + i_{14}) (i_{12}^2 + i_{34}^2) \equiv A_4, \quad (5)$$

而抓住含有对穿圈线的总抓法数为

$$2 [i_{24} P_1 P_3 + i_{13} P_2 P_4] + i_{13} [(i_{23} + i_{34}) P_1 + (i_{12} + i_{14}) P_3] + i_{24} [(i_{34} + i_{14}) P_2 + (i_{12} + i_{23}) P_4] + (i_{13} + i_{24}) (i_{12}^2 + i_{23}^2 + i_{34}^2 + i_{14}^2) \equiv B_4. \quad (6)$$

从而对于 4 顶角,全部抓法数即为 $N_4 = A_4 + B_4$.

3.3. 5 顶角

5 顶角中的圈线走向由图 8 给出.抓三元组抓在 5 顶角的 3 支腿上,共有(●-●-●)和(●-●,●)两种腿型.

3.3.1. 腿型(●-●-●)

对于腿型(●-●-●)中的抓法 $(P_1 - P_2 - P_3)$, 它与 4 顶角的相应抓法的不同在于,这里增加了由

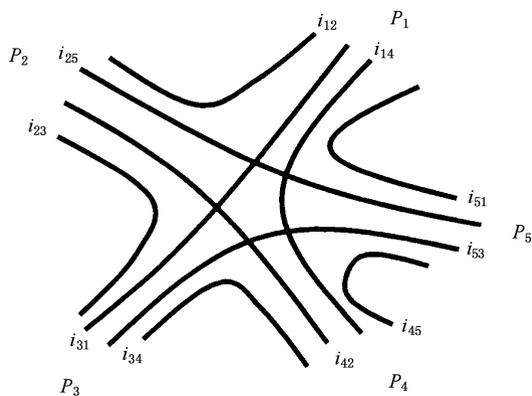


图 8 5 顶角圈线走向图

对穿线组 i_{14} , i_{25} 和 i_{35} 引入的新抓法数. 现仍以三种线型 (I'') (II'') 和 (III'') 为代表, 分别进行计算. 对线型 (I'') (II'') (III''), 抓三元组抓住通过邻腿的圈线的情况与 4 顶角时的形式类似, 只需将 (3) 式中的线组 i_{14} 换成 i_{15} 即可. 从而这种抓法数为

$$i_{12} i_{23} i_{34} + i_{15} i_{23} i_{34} + i_{12} i_{15} i_{34} + i_{12} i_{15} i_{23} + i_{12}^2 (i_{23} + i_{34}) + i_{23}^2 (i_{12} + i_{15}) \equiv A(5). \quad (7)$$

对于线型 (I'') (II'') 和 (III'') 抓三元组抓住含对穿圈线的计算, 要将 4 顶角时的对穿线组 i_{24} 用 (i_{24} 与 i_{25}) 代替, 而 i_{13} 在腿 P_1 和 P_3 中的部分分别用 (i_{13} 与 i_{14}) 和 (i_{31} 与 i_{35}) 两组代替, 见图 8. 从而以过腿 P_2 的圈线类型展开抓法数计算, 对于线型 (I'') 有抓法数为

$$(i_{24} + i_{25}) P_1 P_3 + i_{12} (i_{13} + i_{14}) P_3 + i_{12} i_{15} (i_{13} + i_{35}) + i_{32} (i_{13} + i_{35}) P_1 + i_{23} i_{34} (i_{13} + i_{14}), \quad (8)$$

对于线型 (II''), 有抓法数贡献为

$$(i_{13} + i_{14}) i_{23} + (i_{13} + i_{35}) i_{12}, \quad (9)$$

对于线型 (III''), 有

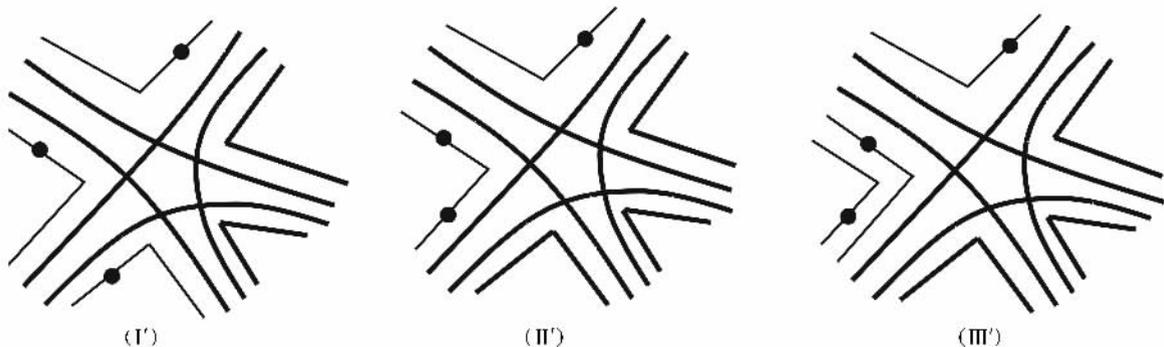


图 9 5 顶角圈线的线型

$$(i_{13} + i_{35}) \left(\frac{i_{12}}{2} \right) \mathcal{L} + (i_{13} + i_{14}) \left(\frac{i_{23}}{2} \right) \mathcal{L}. \quad (10)$$

取 (8) (9) 和 (10) 式之和, 得抓法 ($P_1 - P_2 - P_3$) 下抓住含有对穿线的抓法数为

$$(i_{24} + i_{25}) P_1 P_3 + (i_{13} + i_{14}) [i_{12} P_3 + i_{23} (i_{34} + i_{23})] + (i_{13} + i_{35}) [i_{23} P_1 + i_{12} (i_{15} + i_{12})] \equiv B(5). \quad (11)$$

与 4 顶角类似, 腿型 (●-●-●) 下将有 5 种可能形式存在. 从而将 (7) 与 (11) 式分别做 4 次 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ 的指标循环, 把所得诸结果分别与 (7) 与 (11) 式相加, 将分别得到 5 顶角腿型 (●-●-●) 下 (不含与含诸对穿线) 两种情况的总抓法数 A_5 和 B_5 如下:

$$A_5 \equiv (7) \text{式} + (7) \text{式做 4 次 } 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \text{ 循环}, \quad (12)$$

$$B_5 \equiv (11) \text{式} + (11) \text{式做 4 次 } 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \text{ 循环}. \quad (13)$$

通过 (7) 式与 (11) 式的逐次指标置换, 分别求出结果后再相加, 可方便地得到最后结果. 亦可求出 (12) 与 (13) 式的一般表式, 分别见附录 A 与 B.

3.3.2. 腿型 (●-●-●)

对于 5 顶角, 这种腿型将通过 5 种形式实现, 即 ($P_1 - P_2, P_4$) ($P_2 - P_3, P_5$) ($P_3 - P_4, P_1$) ($P_4 - P_5, P_2$) 和 ($P_5 - P_1, P_3$). 以 ($P_1 - P_2, P_4$) 抓法为例, 其抓在过顶角圈线上的抓法数为 $P_1 P_2 P_4$. 通过取指标循环, 将另外 4 种抓法贡献计入后, 得到如上腿型的 5 种抓法抓在圈线上的总抓法数为

$$P_1 P_2 P_4 + P_2 P_3 P_5 + P_3 P_4 P_1 + P_4 P_5 P_2 + P_5 P_1 P_3 \equiv C_5, \quad (14)$$

从而 5 顶角的全部抓法数 $N_5 = A_5 + B_5 + C_5$.

3.4. 6 顶角

6 顶角的所有可能圈线的走向由图 10 给出. 6

顶角中,每支腿中通过的圈线最多为 5 种.不难得知, $n (> 0)$ 顶角的腿中最多可有 $n - 1$ 种圈线通过.易知体积算符对 6 顶角及其以上顶角的作用将出现三种腿型 $(\bullet - \bullet - \bullet)$, $(\bullet - \bullet, \bullet)$ 和 $(\bullet, \bullet, \bullet)$.

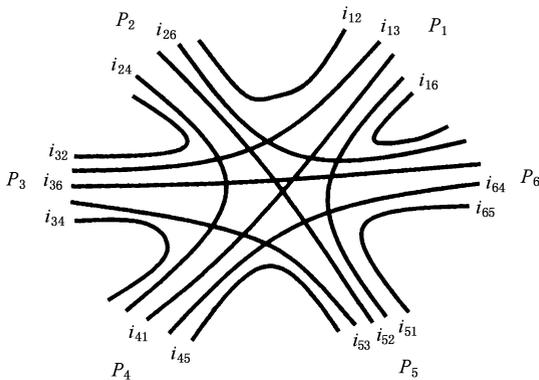


图 10 6 顶角圈线走向图

3.4.1. 腿型 $(\bullet - \bullet - \bullet)$

现取腿型 $(\bullet - \bullet - \bullet)$ 中的抓法 $(P_1 - P_2 - P_3)$, 且与 5 顶角中的相应抓法比较.易知将增加由诸对穿线组 i_{15} , i_{26} 和 i_{36} 带来的对圈线的抓法数的贡献.经计算知,抓三元组抓住通过邻腿的圈线的抓法数为

$$i_{12} i_{23} i_{34} + i_{16} i_{23} i_{34} + i_{12} i_{16} i_{34} + i_{12} i_{16} i_{23} + i_{12}^2 (i_{23} + i_{34}) + i_{23}^2 (i_{12} + i_{16}) \equiv A(6), \quad (15)$$

含对穿圈线的线型 I''' 的抓法数为

$$(i_{24} + i_{25} + i_{26})P_1 P_3 + i_{12}(i_{13} + i_{14} + i_{15})P_3 + i_{12} i_{16}(i_{13} + i_{35} + i_{36}) + i_{23}(i_{13} + i_{35} + i_{36})P_1 + i_{23} i_{34}(i_{13} + i_{14} + i_{15}); \quad (16)$$

线型 II''' 的抓法数为

$$(i_{13} + i_{14} + i_{15})i_{23} + (i_{13} + i_{35} + i_{36})i_{12}; \quad (17)$$

线型 III''' 的抓法数为

$$(i_{13} + i_{35} + i_{36})i_{12}(i_{12} - 1) + (i_{13} + i_{14} + i_{15})i_{23}(i_{23} - 1). \quad (18)$$

取 (16) (17) 和 (18) 式之和, 将得到该腿型下抓三元组抓住含 6 顶角对穿圈线的抓法数为

$$(i_{24} + i_{25} + i_{26})P_1 P_3 + (i_{13} + i_{14} + i_{15}) [i_{12} P_3 + i_{23}(i_{23} + i_{34})] + (i_{13} + i_{35} + i_{36}) [i_{23} P_1 + i_{12}(i_{12} + i_{16})] \equiv B(6). \quad (19)$$

对于 6 顶角, 腿型 $(\bullet - \bullet - \bullet)$ 有 6 种具体抓法.与前面类似, 将 (15) 和 (19) 式分别做 5 次 $1 \rightarrow 2 \rightarrow$

$3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ 的指标循环, 把得到的结果分别与 (15) 和 (19) 式相加, 将分别得到体积算符对 6 顶角该腿型作用下的不含与含诸对穿圈线的两种情况下的总抓法数 A_6 和 B_6 如下:

$$A_6 \equiv (15) \text{ 式} + (15) \text{ 式做 5 次} \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \text{ 循环}, \quad (20) \\ B_6 \equiv (19) \text{ 式} + (19) \text{ 式做 5 次} \\ 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \text{ 循环}. \quad (21)$$

统一的一般公式见附录 C 与 D.

3.4.2. 腿型 $(\bullet - \bullet, \bullet)$

该腿型作用又分两种类型, 分别以 $(P_1 - P_2, P_4)$ 和 $(P_1 - P_2, P_5)$ 为例计算之.

关于对腿的抓法 $(P_1 - P_2, P_4)$, 其抓法数为 $P_1 P_2 P_4$. 考虑指标 (即腿的标号) 所有循环的贡献后, 得到抓法数为

$$P_1 P_2 P_4 + P_2 P_3 P_5 + P_3 P_4 P_6 + P_4 P_5 P_1 + P_5 P_6 P_2 + P_6 P_1 P_3 \equiv C_6^1. \quad (22)$$

对于抓法 $(P_1 - P_2, P_5)$, 类似地可得对圈线的抓法数为

$$P_1 P_2 P_5 + P_2 P_3 P_6 + P_3 P_4 P_1 + P_4 P_5 P_2 + P_5 P_6 P_3 + P_6 P_1 P_4 \equiv C_6^2. \quad (23)$$

这里令总抓法数 $C_6 = C_6^1 + C_6^2$.

3.4.3. 腿型 $(\bullet, \bullet, \bullet)$

对于 6 顶角, 这种腿型下, 被抓三元组抓住了圈线的腿的独立分布只有 (P_1, P_3, P_5) 和 (P_2, P_4, P_6) 两种可能, 故此种腿型对圈线抓法数的总贡献为

$$P_1 P_3 P_5 + P_2 P_4 P_6 \equiv C_6. \quad (24)$$

从而可得全部抓法数为 $N_6 = A_6 + B_6 + C_6 + D_6$.

3.5. 体积算符中抓三元组对 n 顶角的抓法数

用上述程式, 可进一步计算体积算符对高于 6 价的顶角的抓法数. 从而, 体积算符对 $(n \geq 1)$ 顶角的全部抓法数可令为 N_n . 当 $n \geq 3$ 时, n 顶角被抓三元组抓住的三支腿必有腿型 $(\bullet - \bullet - \bullet)$. 以被抓住的腿为 $(P_1 - P_2 - P_3)$ 为例展开此种腿型的运算时, 抓三元组抓住 n 顶角中通过相邻腿 P_1, P_2 和 P_3 中的圈线的抓法数为

$$i_{12} i_{23} i_{34} + i_{1n}(i_{12} i_{23} + i_{23} i_{34} + i_{12} i_{34}) + i_{12}^2 (i_{23} + i_{34}) + i_{23}^2 (i_{12} + i_{1n}) \equiv A(n); \quad (25)$$

抓住含对穿线的抓法数为

$$(P_2 - i_{12} - i_{23})P_1 P_3 + (P_1 - i_{12} - i_{1n}) \times [i_{12} P_3 + i_{23}(i_{23} + i_{34})]$$

$$+ (P_3 - i_{23} - i_{34} [i_{23} P_1 + i_{12} (i_{12} + i_{1n})]) \\ \equiv B(n); \tag{26}$$

取(25)(26)式指标循环求和,有总抓法数

$$A_n = \sum_{\text{循环}} A(n), \tag{27}$$

$$B_n = \sum_{\text{循环}} B(n). \tag{28}$$

这里, $\sum_{\text{循环}}$ 表示对指标经(1至n)封闭链逐次循环后的结果求和(这是本文得到的另一结果).

对于腿型(●-●,●)贡献的抓作用次数,若令抓三元组抓住的三支腿的颜色分别为 P_α, P_β 和 P_γ , 则该种腿型贡献的总抓法数为

$$\sum_{(P_\alpha, P_\beta, P_\gamma) \in (\bullet, \bullet, \bullet)} P_\alpha P_\beta P_\gamma \equiv C_n. \tag{29}$$

腿型(●,●,●)贡献的计算与上面情况类似,贡献的总抓法数为

$$\sum_{(P_\sigma, P_\tau, P_\rho) \in (\bullet, \bullet, \bullet)} P_\sigma P_\tau P_\rho \equiv D_n. \tag{30}$$

这里 P_σ, P_τ 和 P_ρ 为该种腿型下被抓三元组抓住三支腿的颜色.

从而有体积算符中抓三元组对 n 顶角抓作用的全部抓法数为

$$N_n = A_n + B_n + C_n + D_n \quad (n > 0). \tag{31}$$

(31)式可以用代数方法求得圈量子引力中体积算符对任意价顶角作用的本征值.前面已指出,对于自旋网的高于3价的网结平面图,通常可存在对穿线,但平面图中并不存在它们在网结中的交.故在网结平面图中,必有某些对穿线(组), $i_{\alpha\beta} = \alpha | \alpha - \beta | > 1$, 这将大大地给计算带来方便.

4. 体积算符对顶角作用的本征值

令 \hat{V} 为体积算符, \hat{V} 对自旋网态 $|S\rangle$ 的作用,与文献[2]不同,本文定义如下:

$$\hat{V} | S \\ = \sum_i \sqrt{2^{-4} \sum_i \sum_{(P_\sigma, P_\tau, P_\rho)} | K_i^i(P_\sigma, P_\tau, P_\rho) |} | S \rangle, \tag{32}$$

式中 $|i\rangle$ 为算符 \hat{V} 对应的微立方体中含有的态 $|S\rangle$ 的顶角,系数 $K_i^i(P_\sigma, P_\tau, P_\rho)$ 由下式给出^[2]:

$$\sum_{(s_s, t_t, r_r)} \sum_{l=1}^8 \sum_m \epsilon_m | \alpha_{\sigma\tau\rho} \#_{s_s t_t r_r}^i \gamma_m \rangle \\ = K_i^i(P_\sigma, P_\tau, P_\rho) | S \rangle, \tag{33}$$

式中 $|\epsilon_m| = 1, \alpha_{\sigma\tau\rho}$ 为体积算符 \hat{V} 中圈算符 $\hat{T}^{abc} [\alpha_{\sigma\tau\rho}]$

(s, t, r)的带3个抓的三角圈, γ_m 为自旋网 S 展开图的一叶, l 标定 $\alpha_{\sigma\tau\rho}$ 与 γ_m 井号 $\#$ 下和成的8种可能, P_σ, P_τ 和 P_ρ 代表 S 的结点 i 处被抓住圈线的3个分别交于含有抓算符的微立方体边界上的点 σ, τ 和 ρ 的腿的颜色数, s, t 和 r 为三角圈 $\alpha_{\sigma\tau\rho}$ 上分别对应抓所抓住的点 σ, τ 和 ρ 的圈参数, s_S, t_T 和 r_R 分别为对应于微立方体边界与颜色数为 P_σ, P_τ 和 P_ρ 的3个脚中的被抓圈线三元组相交交点的圈参数. $i = i_2 \dots i_{n-2}$ 为顶角 i 做3顶角展开时的着色.

(33)式左端表明 \hat{V} 中的三个抓对自旋网 S 的顶角 i 的毗邻的所有可能的腿三元组 $P_\sigma P_\tau P_\rho$ 的抓作用.(33)式的右端表明这种作用为本征作用.利用(2)式,系数 $K_i^i(P_\sigma, P_\tau, P_\rho)$ 经计算为

$$K_i^i(P_\sigma, P_\tau, P_\rho) = -2l_0^6 g_{\kappa^i(\sigma, \tau, \rho)}^i, \tag{34}$$

式中 $g_{\kappa^i(\sigma, \tau, \rho)}^i$ 为在着色 i 下,抓三元组对顶角 i 的腿 P_σ, P_τ 和 P_ρ 中的圈线的所有抓法数, $l_0 = 16\pi h G$, G 为 Newton 常数.将(34)式代入(32)式,得

$$\hat{V} | S = 2^{-3/2} l_0^3 \sum_i \sqrt{\sum_i G_i^i} | S \rangle,$$

式中

$$G_i^i = \sum_{(P_\sigma, P_\tau, P_\rho)} g_{\kappa^i(\sigma, \tau, \rho)}^i,$$

G_i^i 为自旋网 S 中的顶角 i 对应于3顶角展开 $i = i_2 \dots i_{n-2}$ 的顶角图贡献的圈线上的全部抓法数.若 i 为3,或4,或5,或6顶角,或 n 顶角,则相应的 G_i^i 分别由前面求得的 N_3 ,或 N_4 ,或 N_5 ,或 N_6 ,或 N_n 给出. $\sqrt{\sum_i G_i^i}$ 将给出算符 \hat{V} 对自旋网态作用的体积本征值谱.

5. 结 论

与扩展圈表象不同^[5,6],自旋网表象中体积算符的本征值给出了空间的量子化,这是圈量子引力中十分重要的成果.这种本征值目前主要有三种不同求法和不同结果.有的方法得到的主要不是可直接用来计算本征值的具体算式,而只是算法公式^[1];有的方法提供的公式只讨论了3价顶角贡献体积分的部分情况,并非完整的正确公式^[2].

本文通过贯彻 Penrose 指出的抓作用方法,即利用将体积算符中三个抓的作用取为施加在过(任意价)顶角的圈线上的方法,并在计算抓作用时采取与已有文献均不同的技巧,发现了这种施加方式的类

型对任意价顶角而言,实际上也都是可归结为两类,但每种类型抓作用的施加都必须定义为反称化.将两种类型的抓作用反称化后得到的诸图形再适当地用二元恒等式化简,最后彻底证明了得到的抓三元组对任意价顶角的圈线的作用均为本征作用,本征值均为 -2 .这一简明的新结果与计算面积时的抓作用本征值为 2 的结果相一致^[3],给体积算符对任意价自旋网的作用的本征值的求得带来了方便并找到了规律性.这里是利用对自旋网展开图的叶指标 m 求平均和被抓三元组抓住的顶角中圈线三元组的腿

指标循环求和后,贡献体积值的方法求得了体积算符的本征值,得到了任意自旋网均是体积算符的本征态的结果.本文的方法对于任意 $n (> 0)$ 顶角均适用,而且便于系统求解 3 价及其以上的顶角均贡献体积算符的本征值^[2].亦可将对着色 i 的求和 \sum_i ,用对其求平均代替,而且与文献 [1] 不同,对于只着色一次的高价顶角,本文的方法仍然有效.不存在具体操作上不可避免的人为不同所造成的本征值的不同.

附录 A

$$A_5 \equiv \mathcal{A} [i_{12} i_{34} (i_{23} + i_{45}) + i_{34} i_{15} (i_{23} + i_{21}) + i_{12} i_{51} (i_{54} + i_{32}) + i_{54} i_{32} (i_{12} + i_{43}) + i_{15} i_{45} (i_{23} + i_{34}) + (i_{23} + i_{34} + i_{51} + i_{54}) i_{12}^2 + (i_{34} + i_{45} + i_{12} + i_{15}) i_{23}^2 + (i_{45} + i_{51} + i_{23} + i_{21}) i_{34}^2 + (i_{51} + i_{12} + i_{34} + i_{32}) i_{45}^2 + (i_{12} + i_{23} + i_{45} + i_{43}) i_{51}^2].$$

附录 B

$$B_5 \equiv (i_{24} + i_{25}) P_1 P_3 + (i_{35} + i_{31}) P_2 P_4 + (i_{41} + i_{42}) P_3 P_5 + (i_{52} + i_{53}) P_4 P_1 + (i_{13} + i_{14}) P_5 P_2 + [i_{23} (i_{13} + i_{35}) + i_{45} (i_{41} + i_{42})] P_1 + [i_{34} (i_{24} + i_{41}) + i_{51} (i_{52} + i_{53})] P_2 + [i_{45} (i_{35} + i_{52}) + i_{12} (i_{13} + i_{14})] P_3 + [i_{51} (i_{41} + i_{13}) + i_{23} (i_{24} + i_{25})] P_4 + [i_{12} (i_{52} + i_{24}) + i_{34} (i_{35} + i_{31})] P_5 + (i_{13} + i_{14}) \mathcal{X} i_{23}^2 + i_{23} i_{34} \mathcal{X} i_{13} + i_{35} \mathcal{X} i_{12}^2 + i_{12} i_{15} + (i_{24} + i_{25}) \mathcal{X} i_{34}^2 + i_{34} i_{45} + (i_{24} + i_{41}) \mathcal{X} i_{23}^2 + i_{23} i_{21} \mathcal{X} i_{35} + i_{41} \mathcal{X} i_{45}^2 + i_{45} i_{51} + (i_{35} + i_{52}) \mathcal{X} i_{34}^2 + i_{34} i_{32} + (i_{41} + i_{42}) \mathcal{X} i_{51}^2 + i_{51} i_{12} + (i_{41} + i_{13}) \mathcal{X} i_{45}^2 + i_{45} i_{43} + (i_{52} + i_{53}) \mathcal{X} i_{12}^2 + i_{12} i_{23} + (i_{52} + i_{24}) \mathcal{X} i_{51}^2 + i_{51} i_{54}.$$

附录 C

$$A_6 = \mathcal{A} [i_{12} i_{23} (i_{34} + i_{16}) + i_{34} i_{45} (i_{23} + i_{56}) + i_{45} i_{56} (i_{34} + i_{61})] + [i_{16} i_{34} (i_{12} + i_{23} + i_{34} + i_{56}) + i_{12} i_{45} (i_{23} + i_{34} + i_{56} + i_{61}) + i_{23} i_{56} (i_{12} + i_{34} + i_{45} + i_{61})] + (i_{23} + i_{34}) \mathcal{X} i_{12}^2 + i_{45}^2 + (i_{12} + i_{16}) \mathcal{X} i_{23}^2 + i_{56}^2 + (i_{34} + i_{45}) \mathcal{X} i_{23}^2 + i_{56}^2 + (i_{12} + i_{23}) \mathcal{X} i_{34}^2 + i_{61}^2 + (i_{45} + i_{56}) \mathcal{X} i_{34}^2 + i_{61}^2 + (i_{56} + i_{61}) \mathcal{X} i_{12}^2 + i_{45}^2.$$

附录 D

$$B_6 \equiv (i_{24} + i_{25} + i_{26}) P_1 P_3 + (i_{35} + i_{36} + i_{31}) P_2 P_4 + (i_{46} + i_{41} + i_{42}) P_3 P_5 + (i_{51} + i_{52} + i_{53}) P_4 P_6 + (i_{62} + i_{63} + i_{64}) P_5 P_1 + (i_{12} + i_{14} + i_{15}) P_6 P_2 + P_1 [i_{23} (i_{13} + i_{35} + i_{36}) + i_{56} (i_{51} + i_{52} + i_{53})] + P_2 [i_{34} (i_{24} + i_{46} + i_{41}) + i_{61} (i_{62} + i_{63} + i_{64})] + P_3 [i_{45} (i_{35} + i_{51} + i_{52}) + i_{12} (i_{13} + i_{14} + i_{15})] + P_4 [i_{56} (i_{46} + i_{62} + i_{63}) + i_{23} (i_{24} + i_{25} + i_{26})] + P_5 [i_{61} (i_{51} + i_{13} + i_{14}) + i_{34} (i_{35} + i_{36} + i_{31})] + P_6 [i_{12} (i_{62} + i_{24} + i_{25})]$$

$$\begin{aligned}
& + i_{45}(i_{46} + i_{41} + i_{42}) + (i_{13} + i_{14} + i_{15})(i_{23}^2 + i_{23}i_{34}) \\
& + (i_{24} + i_{25} + i_{26})(i_{34}^2 + i_{34}i_{45}) + (i_{35} + i_{36} + i_{31})(i_{45}^2 + i_{45}i_{56}) \\
& + (i_{46} + i_{41} + i_{42})(i_{56}^2 + i_{56}i_{61}) + (i_{51} + i_{52} + i_{53})(i_{61}^2 + i_{61}i_{12}) \\
& + (i_{62} + i_{63} + i_{64})(i_{12}^2 + i_{12}i_{23}) + (i_{13} + i_{35} + i_{36})(i_{12}^2 + i_{12}i_{16}) \\
& + (i_{24} + i_{46} + i_{41})(i_{23}^2 + i_{23}i_{21}) + (i_{35} + i_{51} + i_{52})(i_{34}^2 + i_{34}i_{32}) \\
& + (i_{46} + i_{62} + i_{63})(i_{45}^2 + i_{45}i_{34}) + (i_{51} + i_{13} + i_{14})(i_{56}^2 + i_{56}i_{45}) \\
& + (i_{62} + i_{24} + i_{25})(i_{61}^2 + i_{61}i_{56}).
\end{aligned}$$

- [1] De Pietri R , Rovelli C 1996 *Phys. Rev. D* **54** 2665
 Scientific Singapore 1991
- [2] Rovelli C , Smolin L 2001 *Discreteness of Area and Volume in Quantum Gravity* , gr-qc/94 11005
 [5] Shao C G , Pan G J , Shao L , Chen Z Q , Xiao J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 619 (in Chinese) [邵常贵、潘贵军、邵亮、陈中秋、肖俊华 2000 物理学报 **49** 619]
- [3] Shao D , Shao L , Shao C G , Chen Y H , Ma W C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4549 (in Chinese) [邵 丹、邵 亮、邵常贵、陈贻汉、马为川 2005 物理学报 **54** 4549]
 [6] Shao C G , Xiao J H , Shao L , Shao D , Chen Y H , Pan G J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1467 (in Chinese) [邵常贵、肖俊华、邵 亮、邵 丹、陈贻汉、潘贵军 2002 物理学报 **51** 1467]
- [4] Ashtekar A 1991 Lectures on : *Non-perturbative canonical gravity* .
 Lecture Notes Prepared in Collaboration with Tate R S World

Eigenactions and eigenvalues of volume operator on any-valent vertices *

Shao Liang^{1)†} Shao Dan²⁾ Shao Chang-Gui²⁾ Zhang Zhu-Quan²⁾

1) *Applied Physics Department , Wuhan University of Science and Technology , Wuhan 430081 , China*)

2) *Physics Department , Jiangnan University , Wuhan 430056 , China*)

(Received 30 December 2005 ; revised manuscript received 1 April 2006)

Abstract

Antisymmetrizing the actions of hand triple contained in volume operator and grasping on the segments rooting through any-valent vortex of spin network , and using the binor identity , a proof is given that all these actions are eigenactions with eigenvalue -2 . A systematic algebraic method to calculate the eigenvalues of volume operator for any-valent vortices is given , and the general and algebraic expressions of volume eigenvalues for 3- , 4- , 5- , 6- valent vertices are obtained .

Keywords : volume operator , any-valent vortex , proof of eigenactions , spectrum of eigenvalues

PACC : 0460

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10275022) .

† E-mail : liang 972883 @ sohu . com