

多涡卷高阶广义 Jerk 电路*

刘明华^{1,2)} 禹思敏¹⁾

1) 广东工业大学自动化学院, 广州 510090)

2) 井冈山学院物理系, 吉安 343009)

(2006 年 4 月 2 日收到, 2006 年 4 月 12 日收到修改稿)

提出在高阶 Jerk 系统中产生多涡卷混沌吸引子的一种电路设计与实现新方法. 根据高阶 Jerk 方程, 构造了一组具有参数控制的阶跃函数序列. 在此基础上设计了产生多涡卷混沌吸引子的高阶广义 Jerk 电路. 用这种方法设计电路的一个主要特点是通用性强. 基于一种广义的电路形式, 通过双掷开关切换, 可分别实现多涡卷四阶和五阶两种不同类型的高阶 Jerk 电路, 并由联动开关控制产生涡卷的数量. 给出了在四阶和五阶 Jerk 电路中产生多涡卷混沌吸引子的计算机模拟和硬件实验结果.

关键词: 高阶广义 Jerk 电路, 阶跃函数序列, 多涡卷混沌吸引子, 电路实验

PACC: 0545

1. 引 言

1994 年, Sprott 基于计算机穷举法, 提出了一类新型三阶自治混沌系统^[1]. 2000 年, Sprott 研究了三阶 Jerk 系统^[2,3], 引起了国内外混沌研究者的关注. 众所周知, 根据 Poincare-Bendixson 定理, 一个自治系统能产生混沌的必要条件是至少需要三个变量和一个非线性项^[4,5], 而 Jerk 系统则是一类满足 Poincare-Bendixson 定理的、数学形式非常简单的三阶自治混沌系统. 其一般数学形式为 $\dot{x} = J(x, \dot{x}, \ddot{x})$, 其中 x 是位置的一阶导数, 称之为速度, 二阶导数 \dot{x} 称之为加速度, 三阶导数 \ddot{x} 称之为 Jerk^[2]. 2006 年, Chlouverakis 和 Sprott 在三阶 Jerk 系统基础上, 又提出了一类高阶 Jerk 系统或超混沌 Jerk 系统, 其一般数学形式为 $d^n x/d\tau^n = J(x, dx/d\tau, d^2x/d\tau^2, \dots, d^{n-1}x/d\tau^{n-1})$ ^[6]. 高阶 Jerk 系统的特点是方程形式简洁, 便于电路实现, 还可通过时间尺度变换获取所需的频谱范围, 可在保密通信中获得应用. 根据文献[6]的研究结果, 现有的高阶 Jerk 系统只能产生单涡卷或双涡卷混沌吸引子, 不能产生多涡卷混沌吸引子. 此外, 文献[6]仅给出了高阶 Jerk 系统的计算机数值模拟结果, 尚未见关于硬件电路实验结果的报道. 因此, 有必要对此作进一步研究.

在多涡卷混沌吸引子的研究方面, 文献[7]综述了这一领域的最新研究进展. 我们注意到, 近年来国内外混沌研究者主要是局限在三阶混沌系统中产生多涡卷混沌吸引子^[7-17], 而在四阶或四阶以上的高阶系统中产生多涡卷混沌吸引子的文献报道却很少^[18,19]. 主要问题是随着方程阶数的增高, 电路实现起来更为困难. 为了在高阶系统中产生多涡卷混沌吸引子, 需要进一步解决以下两个问题: 1) 构造一类适合于高阶系统中产生多涡卷混沌吸引子的非线性函数; 2) 解决电路的合理设计问题. 基于上述考虑和文献[6]提出的高阶 Jerk 系统, 本文对高阶 Jerk 系统中产生多涡卷混沌吸引子的问题进行了研究. 通过构造一组参数控制的阶跃函数序列, 设计了产生多涡卷混沌吸引子的高阶广义 Jerk 电路. 这种电路的主要特点是通用性强, 通过开关切换, 可分别实现多涡卷四阶和五阶两种不同类型的高阶广义 Jerk 电路, 并可控制产生涡卷的数量. 最后通过硬件电路实验证实了该方案的可行性, 并给出了 5—6 涡卷混沌吸引子的实验结果.

2. 构造阶跃函数序列产生多涡卷混沌吸引子

根据文献[6], 一类高阶 Jerk 系统的一般数学

* 国家自然科学基金(批准号: 60572073), 广东省自然科学基金(批准号: 32469, 5001818), 广州市科技计划项目(批准号: 2004J1-C0291)和井冈山学院自然科学基金(批准号: JZ0618)资助的课题.

表达式为

$$a_n \frac{d^n x}{d\tau^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{d\tau^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{d\tau} + a_0 x = f(x) \quad (n = 4, 5), \quad (1)$$

其中一种四阶 Jerk 系统的具体数学表达式为

$$\frac{d^4 x}{d\tau^4} + 7.278 \frac{d^3 x}{d\tau^3} + 4 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + 9.19 \frac{dx}{d\tau} + 7.9x = f(x), \quad (2)$$

以及一种五阶 Jerk 系统的具体数学表达式为

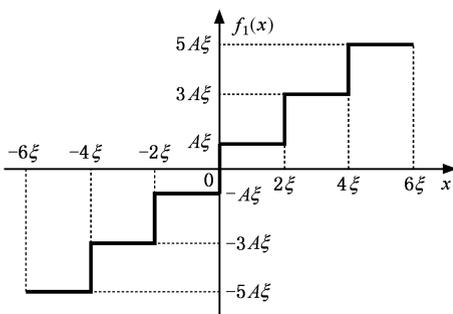
$$\frac{d^5 x}{d\tau^5} + \frac{d^4 x}{d\tau^4} + 7.278 \frac{d^3 x}{d\tau^3} + 4 \frac{d^2 x}{d\tau^2} + 9.19 \frac{dx}{d\tau} + 7.9x = f(x). \quad (3)$$

文献 [6] 给出了(2)式和(3)式中的非线性函数为 $f(x) = 2.06 \tan^{-1}(200x)$, 仿真结果表明(2)式和(3)式只能够产生双涡卷混沌吸引子。

在上述基础上, 我们通过构造一组新的非线性函数 $f(x)$, 可在高阶 Jerk 系统中产生多涡卷混沌吸引子。

为使(2)式和(3)式产生具有偶数个涡卷的多涡卷混沌吸引子, 即涡卷数量为 $2N + 2$ 个, 我们构造一组基于参数 ξ 控制的阶跃函数序列 $f(x) = f_1(x)$, 其一般数学形式为

$$f_1(x) = A\xi \left[\operatorname{sgn}(x) + \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(x - 2\xi i) \right]$$



$$+ \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(x + 2\xi i) \quad (N = 1, 2, 3, \dots), \quad (4)$$

式中 $A = 7.9$, $\xi > 0$ 为控制参数。

为使(2)式和(3)式产生具有奇数个涡卷的多涡卷混沌吸引子, 即涡卷数量为 $2M + 1$ 个, 我们构造一组基于参数 ξ 控制的阶跃函数序列 $f(x) = f_2(x)$, 其一般数学形式为

$$f_2(x) = A\xi \left[\sum_{j=1}^M \operatorname{sgn}(x - \xi(2j - 1)) + \sum_{j=1}^M \operatorname{sgn}(x + \xi(2j - 1)) \right] \quad (M = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

式中 $A = 7.9$, $\xi > 0$ 为控制参数。阶跃函数序列 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 如图 1 所示。

由图 1 可知, 这种基于参数 ξ 控制的阶跃函数序列 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的主要特点是, 通过调节控制参数 ξ 的大小, 可控制阶梯波的宽度和幅度, 进而可控制各个涡卷平衡点之间的距离和涡卷的大小, 便于电路实现。

根据(2)~(5)式, 以产生 5—6 涡卷混沌吸引子为例, 令参数 $A = 7.9$, $\xi = 1$, $N = M = 2$, 得产生 5—6 涡卷混沌吸引子的数值模拟结果分别如图 2—5 所示。

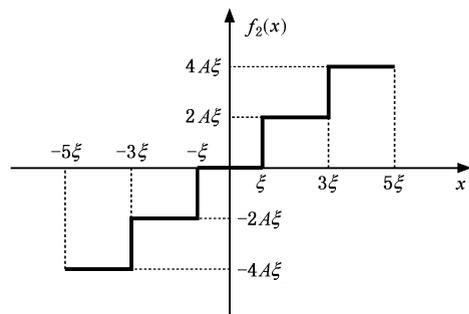


图 1 阶跃函数序列 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$

3. 多涡卷高阶广义 Jerk 电路设计

根据(2)~(5)式, 我们设计了一种多涡卷高阶广义 Jerk 电路, 如图 6 所示。图中通过双掷开关 K_1 — K_5 在触点 1 和 2 之间的切换, 可分别实现多涡卷四阶与五阶广义 Jerk 电路, 开关状态与电路形式

的对应关系如表 1 所示。涡卷数量则由联动开关 K_{10} — K_{12} 的闭合与断开来控制, 开关状态与涡卷数量的对应关系如表 2 所示。

图 6 所示的电路由五个部分组成: 积分器 N_1 , 阶跃函数序列发生器 N_2 , 双掷开关 K_1 — K_5 , 联动开关 K_{10} — K_{12} , 电压-电流转换电阻 R_{10} — R_{12} 。根据图 6 所示的电路, 可通过切换双掷开关 K_1 — K_5 来实现

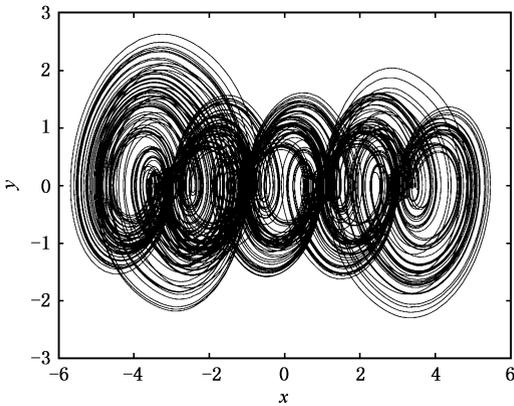


图2 四阶 Jerk 系统中的 5 涡卷混沌吸引子

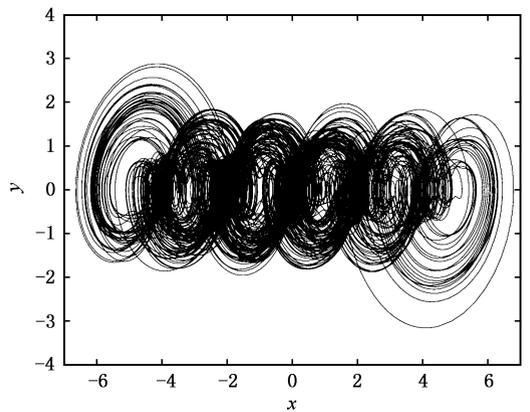


图5 五阶 Jerk 系统中的 6 涡卷混沌吸引子

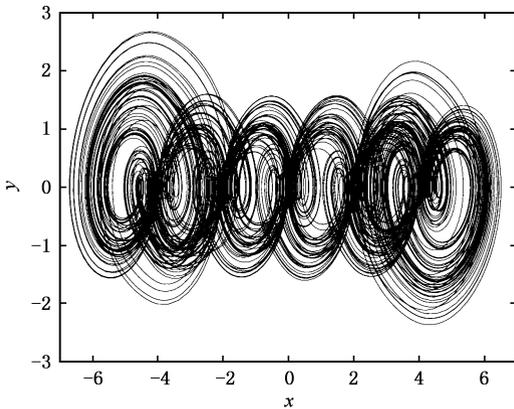


图3 四阶 Jerk 系统中的 6 涡卷混沌吸引子

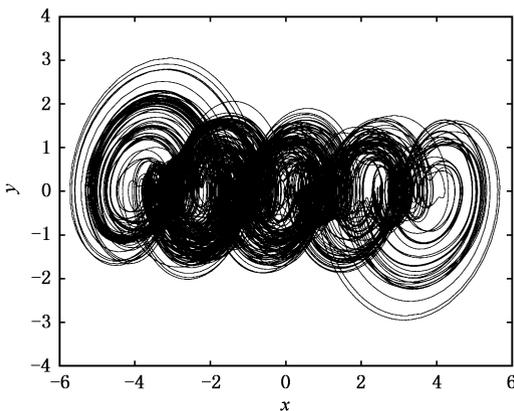


图4 五阶 Jerk 系统中的 5 涡卷混沌吸引子

四阶 Jerk 电路和五阶 Jerk 电路之间的转换.当双掷开关 $K_1—K_5$ 都掷向触点 1 时为多涡卷四阶广义 Jerk 电路,当双掷开关 $K_1—K_5$ 都掷向触点 2 时为多涡卷五阶广义 Jerk 电路,其对应关系如表 1 所示.图中的多涡卷高阶广义 Jerk 电路可以产生 2—6 涡卷

混沌及引子,涡卷数量由联动开关 $K_{10}—K_{12}$ 控制,它们之间的关系如表 2 所示.注意到 $1/(R_0 C_0)$ 为积分器 N_1 的积分常数,同时也是时间尺度变换因子,通过调节 R_0, C_0 的大小来改变时间尺度变换因子,从而可改变混沌信号的频谱范围.实验中取 $R_0 = 10\text{k}\Omega, C_0 = 33\text{nF}$.图中所有运算放大器的型号为 TL082,电源工作电压为 $\pm 15\text{V}$,实验测得此时运算放大器的输出饱和电压值为 $\pm 13.5\text{V}$,为了便于调试,图中所有电阻均采用精密可调电阻或精密可调电位器.此外,我们取 (4) 式和 (5) 式中的控制参数 $\xi = 1$,经计算,可得图 6 中阶跃函数序列发生器 N_2 的各比较器的比较电压 $S_0, S_{\pm 1}$ 和 $S_{\pm 2}$ 的具体数值与涡卷数量的对应关系如表 2 所示.

4. 多涡卷高阶广义 Jerk 电路分析

根据图 6, N_2 中比较器输出 x_j 与输入 x 之间的关系为

$$x_j = -|V_{\text{sat}}| \text{sgn}(x - S_j) \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2), \quad (6)$$

式中 x 和 x_j 的单位为 V.当联动开关 $K_{10}—K_{12}$ 闭合时, N_2 中各个支路的电流为

$$i_j = \frac{|V_{\text{sat}}|}{R_{1j}} \text{sgn}(x - S_j) \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2), \quad (7)$$

式中 i_j 的单位为 mA, $|V_{\text{sat}}|$ 为运算放大器的输出饱和电压值, $R_{1j} (j = 0, 1, 2)$ 为 N_2 中的电压-电流转换电阻,满足 $R_{1,-j} = R_{1j} (j = 0, 1, 2)$.定义联动开关的开关函数为

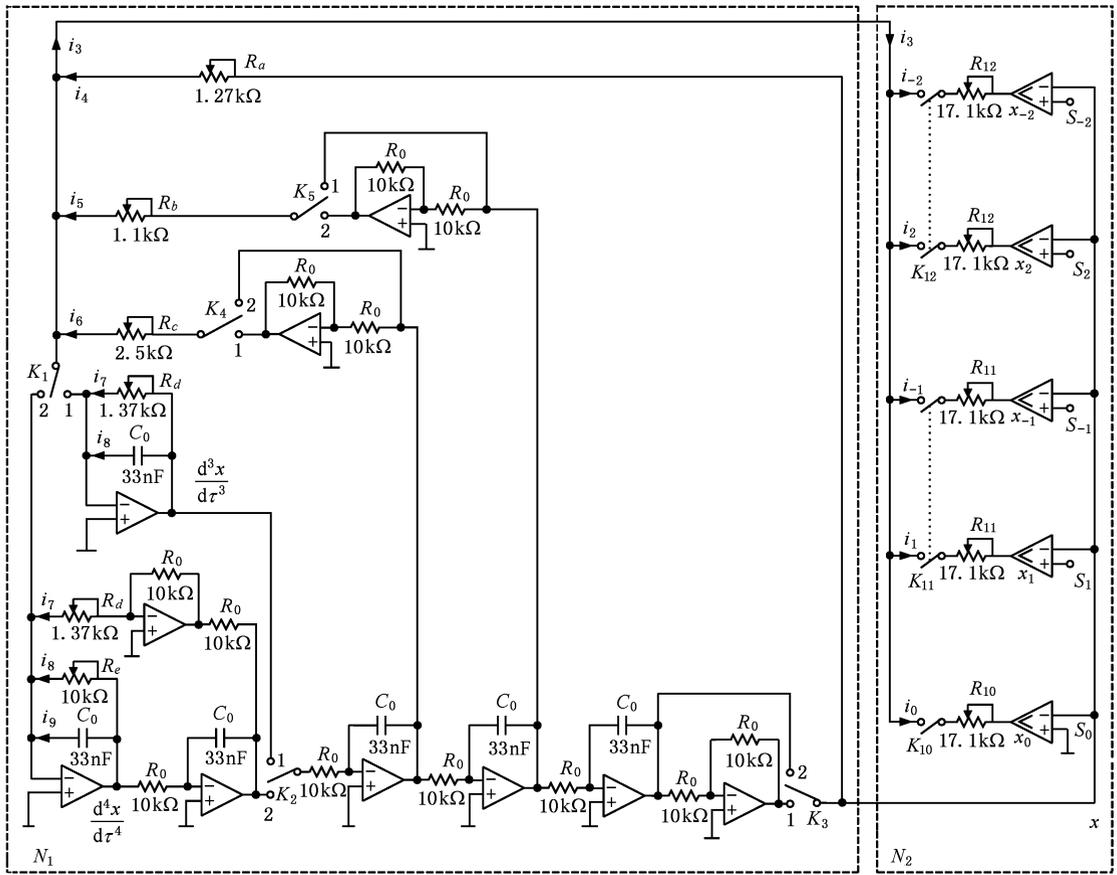


图 6 多涡卷高阶广义 Jerk 电路图

表 1 开关状态与电路形式的对应关系

K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	电路形式
位于 1	多涡卷四阶广义 Jerk 电路				
位于 2	多涡卷五阶广义 Jerk 电路				

表 2 开关状态和比较电压与涡卷数量的对应关系

S_0	S_1	S_{-1}	S_2	S_{-2}	K_{10}	K_{11}	K_{12}	涡卷数量
0V					闭合	断开	断开	2
0V	1V	-1V			断开	闭合	断开	3
0V	2V	-2V			闭合	闭合	断开	4
0V	1V	-1V	3V	-3V	断开	闭合	闭合	5
0V	2V	-2V	4V	-4V	闭合	闭合	闭合	6

$$K_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{当 } K_{1j} \text{ 闭合} \\ 0 & \text{当 } K_{1j} \text{ 断开} \end{cases} \quad (j = 0, 1, 2). \quad (8)$$

进一步可得由阶跃函数序列所产生的总电流 i_3 为

$$\begin{aligned} i_3 &= K_{10} i_0 + K_{11} (i_1 + i_{-1}) + K_{12} (i_2 + i_{-2}) \\ &= K_{10} \frac{|V_{sat}|}{R_{10}} \text{sgr}(x) + K_{11} \frac{|V_{sat}|}{R_{11}} \end{aligned}$$

$$\times [\text{sgr}(x - S_1) + \text{sgr}(x - S_{-1})]$$

$$+ K_{12} \frac{|V_{sat}|}{R_{12}} [\text{sgr}(x - S_2) + \text{sgr}(x - S_{-2})] \quad (9)$$

当 K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 掷向触点 1 时, 图 6 为多涡卷四阶广义 Jerk 电路. 根据节点分析法, 我们有

$$i_4 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 = i_3, \quad (10)$$

式中 i_3 的表达式为(9)式. 根据运算放大器虚地概

念, 得其余支路电流的数学表达式为

$$\begin{aligned} i_4 &= x/R_a, \\ i_5 &= (dx/d\tau)R_b, \\ i_6 &= (d^2x/d\tau^2)R_c, \\ i_7 &= (d^3x/d\tau^3)R_d, \\ i_8 &= C_0(d^3x/d\tau^3)dt. \end{aligned} \quad (11)$$

根据(10)(11)式, 可进一步得多涡卷四阶广义 Jerk 电路的微分方程为

$$\frac{d^4x}{d\tau^4} = -\frac{R_0}{R_d}\frac{d^3x}{d\tau^3} - \frac{R_0}{R_c}\frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{R_0}{R_b}\frac{dx}{d\tau} - \frac{R_0}{R_a}x + R_0i_3, \quad (12)$$

式中 $\tau = t(R_0C_0)$ 其中 $1/(R_0C_0)$ 为时间尺度变换因子.

根据(2)式(4)式或(5)式, 以及(9)和(12)式, 同时结合表 1 和表 2, 得多涡卷四阶广义 Jerk 电路的参数为 $R_0/R_a = 7.9$, $R_0/R_b = 9.19$, $R_0/R_c = 4$, $R_0/R_d = 7.278$, $|V_{sat}|R_0/R_{1j} = A\xi$. 令 $A = 7.9$, $\xi = 1$, 取 $R_0 = 10\text{k}\Omega$, 进一步得 $R_a = 1.27\text{k}\Omega$, $R_b = 1.1\text{k}\Omega$, $R_c = 2.5\text{k}\Omega$, $R_d = 1.37\text{k}\Omega$, $R_{10} = R_{11} = R_{12} = 17.1\text{k}\Omega$.

当 K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 掷向触点 2 时, 图 6 则为多涡卷五阶广义 Jerk 电路, 由节点分析法, 我们有

$$i_4 + i_5 + i_6 + i_7 + i_8 + i_9 = i_3, \quad (13)$$

其中 i_3 的表达式为(9)式. 根据运算放大器虚地概念, 得其余支路电流的数学表达式为

$$\begin{aligned} i_4 &= x/R_a, \\ i_5 &= (dx/d\tau)R_b, \\ i_6 &= (d^2x/d\tau^2)R_c, \\ i_7 &= (d^3x/d\tau^3)R_d, \\ i_8 &= (d^4x/d\tau^4)R_e, \\ i_9 &= C_0(d^4x/d\tau^4)dt. \end{aligned} \quad (14)$$

根据(13)(14)式, 可进一步得多涡卷五阶广义 Jerk 电路的微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^5x}{d\tau^5} &= -\frac{R_0}{R_e}\frac{d^4x}{d\tau^4} - \frac{R_0}{R_d}\frac{d^3x}{d\tau^3} - \frac{R_0}{R_c}\frac{d^2x}{d\tau^2} \\ &\quad - \frac{R_0}{R_b}\frac{dx}{d\tau} - \frac{R_0}{R_a}x + R_0i_3, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\tau = t(R_0C_0)$ 其中 $1/(R_0C_0)$ 为时间尺度变换因子.

根据(3)式(4)式或(5)式, 以及(9)和(15)式, 同时结合表 1 和表 2, 得多涡卷五阶广义 Jerk 电路的参数为 $R_0/R_a = 7.9$, $R_0/R_b = 9.19$, $R_0/R_c = 4$, $R_0/R_d = 7.278$, $R_0/R_e = 1$, $|V_{sat}|R_0/R_{1j} = A\xi$. 令 $A = 7.9$, $\xi = 1$, 取 $R_0 = 10\text{k}\Omega$, 进一步可得 $R_a = 1.27\text{k}\Omega$, $R_b = 1.1\text{k}\Omega$, $R_c = 2.5\text{k}\Omega$, $R_d = 1.37\text{k}\Omega$, $R_e = 10\text{k}\Omega$, $R_{10} = R_{11} = R_{12} = 17.1\text{k}\Omega$.

至此, 图 6 所示的多涡卷高阶广义 Jerk 电路设计与分析任务已经完成.

5. 电路实验结果

根据图 6 所示电路进行硬件电路实验, 以产生 5—6 涡卷混沌吸引子为例, 由表 1, 若所有双掷开关掷到触点 1, 图 6 所示的电路为多涡卷四阶广义 Jerk 电路, 硬件实验结果如图 7 所示. 若所有双掷开关接到触点 2, 图 6 所示的电路为多涡卷五阶广义 Jerk 电路, 硬件电路实验结果如图 8 所示. 注意到涡卷数量可由联动开关的闭合与断开来控制, 其对应关系如表 2 所示. 在实际电路中, 由于电路参数的离散性, 需要通过适当地调节电阻 R_a, R_b, R_c, R_d, R_e 的大小来确定电路所需的实际参数值. 此外, 限于篇幅, 我们仅给出了 5 涡卷和 6 涡卷混沌吸引子的实验结果.

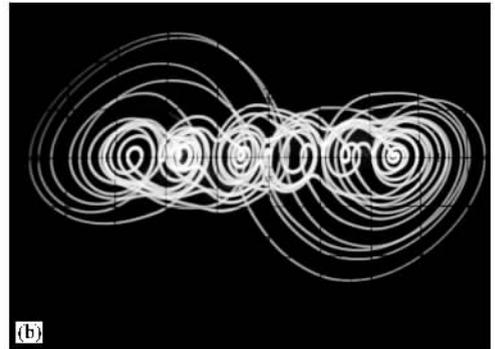
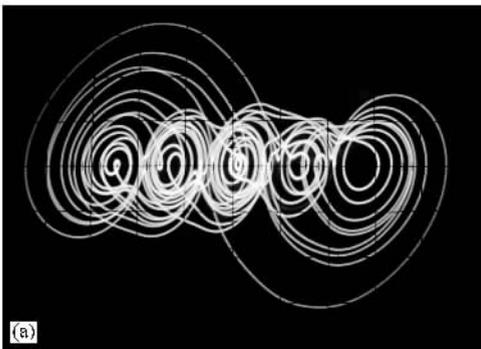


图 7 多涡卷四阶广义 Jerk 电路实验结果 (a) 5 涡卷混沌吸引子 (b) 6 涡卷混沌吸引子

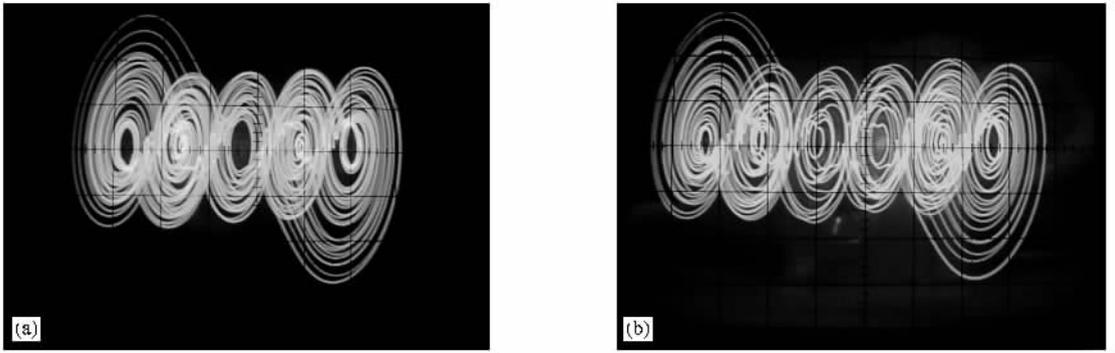


图 8 多涡卷五阶广义 Jerk 电路实验结果 (a)5 涡卷混沌吸引子 (b)6 涡卷混沌吸引子

6. 结 论

提出了在高阶 Jerk 系统中产生多涡卷混沌吸引子的一种电路设计与实现新方法. 根据高阶 Jerk 方程构造了一组具有参数控制的阶跃函数序列, 设计了产生多涡卷混沌吸引子的高阶广义 Jerk 电路, 给出了 5—6 涡卷混沌吸引子的计算机数值模拟和电路实验结果, 证实了这一方案的可行性. 文中设计

的多涡卷高阶广义 Jerk 电路具有下述两个特点: (1) 阶跃函数序列 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的控制参数 ξ 可调, 从而可控制各个涡卷平衡点之间的距离和涡卷的大小, 便于电路实现. (2) 电路的通用性强, 可通过双掷开关在两触点之间的切换, 分别实现多涡卷四阶广义 Jerk 电路和五阶广义 Jerk 电路之间的转换, 通过联动开关的闭合与断开可控制多涡卷混沌吸引子中涡卷的数量.

- [1] Sprott J C 1994 *Phys. Rev. E* **50** R647
- [2] Sprott J C 2000 *Amer. J. Phys.* **68** 758
- [3] Sprott J C 2000 *Phys. Lett. A* **266** 19
- [4] Lü J H, Chen G R, Yu Y 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 1260
- [5] Chen G R, Lü J H 2003 *Dynamics of the Lorenz System Family: Analysis, Control, and Synchronization* (Beijing: Science Press) [in Chinese] 陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京:科学出版社)
- [6] Chlouverakis KE, Sprott J C 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **28** 739
- [7] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifurc. Chaos* **16** 775
- [8] Yalcin M E, Suykens J, Vandewalle J 2000 *IEEE Trans. CAS-I* **47** 425
- [9] Tang W K S, Zhong G Q, Chen G, Man K F 2001 *IEEE Trans. CAS-I* **48** 1369
- [10] Zhong G Q, Man K F, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2907
- [11] Yalcin M E, Suykens J A K, Vandewalle J 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 23
- [12] Yu S M, Qiu S S, Lin Q H 2003 *Sci. Chin. F* **46** 104
- [13] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2084 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084]
- [14] Yu S M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4111 (in Chinese) [禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111]
- [15] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 (in Chinese) [禹思敏 2004 物理学报 **54** 1500]
- [16] Yu S M, Lü J H, Leung H et al 2005 *IEEE Trans. CAS-I* **52** 1459
- [17] Lü J H, Yu S M, Leung H et al 2006 *IEEE Trans. CAS-I* **53** 149
- [18] Yu S M, Ma Z G, Qiu S S et al 2004 *Chin. Phys.* **13** 317
- [19] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 25 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25]

Multi-scroll high-order general Jerk circuits ^{*}

Liu Ming-Hua^{1,2)} Yu Si-Min¹⁾

¹ *College of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China*

² *Department of Physics, Jingtangshan University, Ji'an 343009, China*

(Received 2 April 2006; revised manuscript received 12 April 2006)

Abstract

This paper proposes a novel circuit design and implementation approach of generating multi-scroll chaotic attractors from high-order Jerk systems. According to high-order Jerk equations, multi-scroll high-order general Jerk circuits are designed by constructing a sequence of step functions with parameter control. The prominent feature for this kind of circuit design method is self-unified and in a sense universal. Based on the uniform circuit, both forth-order and fifth-order general Jerk circuits can be realized with the switching control. The switch set is also used to control the number of scrolls. Finally, the computer simulations and hardware implementations are given to generate multi-scroll chaotic attractors on the forth-order and fifth-order general Jerk circuits.

Keywords : high-order general Jerk circuit, step function sequence, multi-scroll chaotic attractor, circuit experiment

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60572073), the Natural Science Foundation of Guangdong Province (Grant Nos. 32469, 5001818), the Science and Technology Program of Guangzhou City, China (Grant No. 2004J1-C0291), and the Natural Science Foundation of Jingtangshan University (Grant No. JZ0618).