

# 随机 Duffing 单边约束系统的倍周期分岔\*

冯进钤<sup>1)†</sup> 徐 伟<sup>1)</sup> 王 蕊<sup>2)</sup>

1) 西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

2) 陕西师范大学数学系, 西安 710062)

(2006 年 2 月 12 日收到, 2006 年 4 月 3 日收到修改稿)

通过引进平均约束面和平均跃变方程对随机约束系统的约束条件进行处理, 把研究随机光滑系统倍周期分岔的 Chebyshev 多项式逼近的方法运用到随机非光滑系统中, 数值研究表明随机 Duffing 单边约束系统同样存在丰富的倍周期分岔现象, Chebyshev 多项式逼近是研究带有约束的随机非光滑动力系统的有效方法.

关键词: 非光滑动力系统, 随机 Duffing 系统, Chebyshev 多项式, 倍周期分岔

PACC: 0547

## 1. 引 言

在实际工程动力学中往往存在大量碰撞<sup>[1]</sup>, 冲击, 干摩擦等非光滑因素, 其中重要的一种是由约束条件决定的. 传统的动力系统理论是针对光滑系统的<sup>[2-5]</sup>, 不能直接地运用到随机非光滑动力系统中, 非光滑系统向量场的不可微性导致了系统的强非线性和奇异性, 引起了大量学者的广泛兴趣<sup>[6]</sup>. 上世纪 80 年代以来, Saw 和 Holmes<sup>[7]</sup>和胡海岩<sup>[8]</sup>等研究了分段线性系统的分岔和混沌响应, 分析了向量场的非光滑性对系统动力学行为的影响, Nordmark 等<sup>[9]</sup>研究了冲击振子系统的稳定性, 分岔和奇异性问题. 张思进<sup>[10]</sup>, Nordmark<sup>[9]</sup>和金俐<sup>[11, 12]</sup>利用局部 Poincaré 映射的方法给出了对应的 Jacobin 矩阵并研究了非光滑系统的稳定性. 陆启韶<sup>[12]</sup>利用 Poincaré 映射和数值方法分析了两个自由度的刚性约束和分段光滑转子的非光滑性. 冯奇<sup>[13-15]</sup>利用平均 Poincaré 映射和叠加原理考察了非光滑线性系统的均值响应问题. 关于非光滑非线性随机系统的研究还只是起步.

近年来, Chebyshev 多项式逼近是一种新的研究随机参数的随机光滑系统的有效方法, Fang<sup>[16, 17]</sup>和 Wu<sup>[18]</sup>等应用 Chebyshev 多项式逼近的方法研究了随机光滑动力系统的响应, 马少娟等<sup>[19, 20]</sup>应用

Chebyshev 多项式逼近法研究了随机 van der Pol 系统的倍周期分岔和对称破裂分岔.

本文主要通过引进平均约束面和平均跃变方程对约束系统的约束条件进行处理, 借助 Chebyshev 多项式逼近的方法研究谐和激励下带有随机参数的随机 Duffing 单边约束系统的倍周期分岔问题, 并结合数值方法研究其传统的倍周期分岔现象.

## 2. Chebyshev 多项式

这里考虑随机 Duffing 微分方程中的随机变量  $u$  取值在区间  $[-1, 1]$  且服从拱形分布, 其概率密度曲线如图 1, 概率密度表达式如下:

$$p(u) = \begin{cases} (2/\pi)\sqrt{1-u^2}, & |u| \leq 1, \\ 0, & |u| > 1. \end{cases} \quad (1)$$

当区间为  $[-1, 1]$  权函数为  $p(u)$  时, 对应的正交多项式为第二类 Chebyshev 多项式, 其表达式为

$$T_n(u) = \frac{\sin[(n+1)\arccos(u)]}{\sqrt{1-u^2}} \quad |u| \leq 1. \quad (2)$$

由 (2) 式可得到递推关系式

$$T_0(u) = 1, T_1(u) = 2u,$$

.....

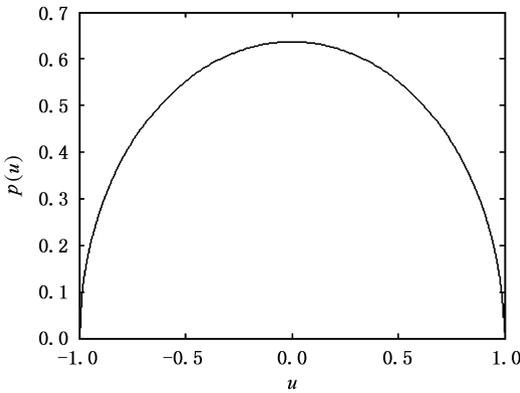
$$T_{n+1}(u) + T_{n-1}(u) = 2T_n(u), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(3)

另外, 令  $u = \cos(\theta)$  则

\* 国家自然科学基金(批准号 10472091, 10332030, 10502042)资助的课题.

† E-mail: fengjinqian@mail.nwpu.edu.cn.

图 1 随机变量  $u$  的拱形分布概率密度函数曲线

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} T_n(u)T_m(u)p(u)du \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_n(u)T_m(u)\sqrt{1-u^2}du \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin[(n+1)\theta] \sin[(m+1)\theta] d\theta \\
 &= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (4)
 \end{aligned}$$

因为权函数刚好为随机变量  $u$  的概率密度函数,故(4)式可看成是乘积  $T_n(u)T_m(u)$  的数学期望.由正交多项式的性质知,随机变量  $u$  的任何可测函数  $f(u) \in C[-1,1]$  可以展开为正交多项式的级数形式:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(u), \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)T_n(u)p(u)du}{\int_{-m}^{+\infty} T_n(u)T_n(u)p(u)du} \\
 &= \int_{-1}^1 f(u)T_n(u)p(u)du,
 \end{aligned}$$

这种展开为广义 Fourier 级数展开,是一种最佳均方意义下的逼近.

### 3. 随机 Duffing 单边约束系统的 Chebyshev 多项式逼近

考虑单自由度谐和激励下的带随机参数的随机 Duffing 单边约束系统,其系统的微分方程形式如下:

$$\begin{cases} \ddot{x} + a\dot{x} - bx + c_0 x^3 = F \cos(\omega t), & x < XX, \\ \dot{x}_+ = -rx_-, & x = XX. \end{cases} \quad (6)$$

随机光滑 Duffing 系统微分方程为

$$\ddot{x} + a\dot{x} - bx + c_0 x^3 = F \cos(\omega t). \quad (7)$$

约束条件为

$$x < XX,$$

约束面为

$$\Sigma = \{ (x, \dot{x}) \mid x = XX \},$$

跃变方程为

$$\dot{x}_+ = -rx_-.$$

考虑(6)式是一个碰撞系统,系统轨线在约束面处发生碰撞,跃变方程描述了约束面上速度的跃变,其中  $-$ ,  $+$  表示碰撞前后时刻,  $u$  为区间  $[-1,1]$  上服从拱形分布的随机变量,概率密度函数表达式为(1)

式,  $c_0 = c + vu$ ,  $c_0$  的均值为  $c$ , 方差为  $\frac{v}{2}$ .  $a, b, c, v$  均为常数,  $F \cos(\omega t)$  为谐和激励,  $r$  为恢复系数,  $XX$  为刚性约束常数.

由正交多项式逼近(5)式,系统微分方程(6)在无约束自由运动时的响应可以展开为如下的级数形式:

$$x(t, u) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(t) T_i(u). \quad (8)$$

当  $N$  取有限值时(8)可写成

$$x(t, u) \approx \sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u). \quad (9)$$

在不考虑约束时,把(9)式代入随机光滑系统微分方程(7)中,可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2}{dt^2} \left[ \sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u) \right] + a \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u) \right] \\
 & - b \sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u) + (c + vu) \left[ \sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u) \right]^3 \\
 &= F \cos(\omega t). \quad (10)
 \end{aligned}$$

把(10)式等号左边项  $\left[ \sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u) \right]^3$  可展开为如下形式<sup>[19,20]</sup>:

$$\left[ \sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u) \right]^3 = \sum_{i=0}^{3N} X_i(t) T_i(u), \quad (11)$$

其中  $X_i (i=0, 1, 2, \dots)$  为  $T_i(u)$  ( $i=0, 1, 2, \dots$ ) 前的系数,利用 Chebyshev 多项式递推关系式(3)可得

$$\begin{aligned}
 & u \left[ \sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u) \right]^3 \\
 &= u \sum_{i=0}^{3N} X_i(t) T_i(u) \\
 &= \sum_{i=0}^{3N} X_i(t) u T_i(u)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{3N} X_i(t) \mathbb{I} u T_i(u) \\
&= \sum_{i=0}^{3N} X_i(t) \mathbb{I} T_{i-1}(u) + T_{i+1}(u) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{3N} T_i(u) \mathbb{I} X_{i-1}(t) + X_{i+1}(t). \quad (12)
\end{aligned}$$

由逼近式(9), 可令(12)式中  $X_{-1}$  为零. 把(11), (12)式代入(7)式, 然后在所得方程两边同时乘以  $T_i(u)$  ( $i=0, 1, 2, 3, \dots, N$ ), 并关于  $u$  求期望(7)式可化为<sup>[20]</sup>

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} x_0(t) + a \frac{d}{dt} x_0(t) - b x_0(t) + c X_0 \\
&+ \frac{v}{2} X_1 = F \cos(\omega t), \\
&\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) + a \frac{d}{dt} x_1(t) - b x_1(t) + c X_1 \\
&+ \frac{v}{2} (X_0 + X_2) = 0, \\
&\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) + a \frac{d}{dt} x_2(t) - b x_2(t) + c X_2 \\
&+ \frac{v}{2} (X_1 + X_3) = 0, \\
&\dots\dots \\
&\frac{d^2}{dt^2} x_N(t) + a \frac{d}{dt} x_N(t) - b x_N(t) + c X_N \\
&+ \frac{v}{2} (X_{N-1} + X_{N+1}) = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

于是无约束时的随机光滑 Duffing 系统(7)就化简为一个等价的确定性系统(13).

由逼近式(9), 随机光滑 Duffing 系统的集合平均响应可近似为

$$\begin{aligned}
E[x(t, u)] &= E\left[\sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u)\right] \\
&= \sum_{i=0}^N x_i(t) E T_i(u) = x_0. \quad (14)
\end{aligned}$$

当随机变量  $u$  在区间  $[-1, 1]$  随机取一系列值  $\{u_i\}$ , 对应每个  $u_i$  值系统(7)具有轨线  $\Gamma_i(t, x, \dot{x})$ , 存在某一时刻  $t_0$ , 一部分轨线已经与约束面  $\Sigma$  发生碰触(此时约束面看做是虚拟存在的), 另一部分轨线还未到达约束面  $\Sigma$ . 从而有必要对约束进行平均处理. 由(14)式可定义:

平均约束条件:

$$E x(t, u) = x_0 = XX. \quad (15)$$

平均约束面:

$$\Sigma^0 = \{(x, \dot{x}) \mid E x(t, u) = x_0 = XX\}. \quad (16)$$

平均跃变方程:

$$\begin{aligned}
E \dot{x}_+(t, u) &= -r E \dot{x}_-(t, u) \Leftrightarrow \dot{x}_{0+} \\
&= -r x_{0-}. \quad (17)
\end{aligned}$$

把(13)(15)(16)(17)式代入(6)式, 随机 Duffing 单边约束系统(6)可化简为:

当  $x_0 < XX$  时,

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} x_0(t) + a \frac{d}{dt} x_0(t) - b x_0(t) + c X_0 \\
&+ \frac{v}{2} X_1 = F \cos(\omega t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} x_1(t) + a \frac{d}{dt} x_1(t) - b x_1(t) + c X_1 \\
&+ \frac{v}{2} (X_0 + X_2) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} x_2(t) + a \frac{d}{dt} x_2(t) - b x_2(t) + c X_2 \\
&+ \frac{v}{2} (X_1 + X_3) = 0,
\end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2} x_N(t) + a \frac{d}{dt} x_N(t) - b x_N(t) + c X_N \\
&+ \frac{v}{2} (X_{N-1} + X_{N+1}) = 0. \quad (18)
\end{aligned}$$

当  $x_0 = XX$  时,  $\dot{x}_{0+} = -r x_{0-}$ . (19)

于是通过引进平均约束面和平均跃变方程并借助 Chebyshev 多项式逼近, 就把随机 Duffing 单边约束系统(6)在最小均方误差意义下化简为一个与之等价的高维确定性单边约束系统(18)(19), 当

$N \rightarrow \infty$  时, 由(8)(9)式知,  $\sum_{i=0}^N x_i(t) T_i(u)$  在最佳均方意义下逼近  $x(t, u)$ , 当  $N$  取有限值时, 就得到一个有微小误差的等价系统,  $N$  的取值取决于精度的要求. 这里取  $N=4$ , 可得到一个等价确定性单边约束系统.

#### 4. 随机 Duffing 单边约束系统的倍周期分岔分析

由此可得到三个系统: 在(7)式中令  $v=0$  时的确定性单边约束系统(18)(19)式决定的等价确定性单边约束系统以及原随机单边约束系统. 对应的响应分别为确定性系统响应(DSR), 等价系统响应(ESR)和随机系统响应(SSR). 其中确定性单边约束系统是无随机扰动下的系统, 等价确定性单边约束系统是对响应关于随机变量  $u$  取集合平均得到,

原随机单边约束系统是原随机系统的样本响应在概率意义下的平均. 下面通过比较这三个系统响应的相轨图来观察随机 Duffing 单边约束系统的倍周期分岔现象. 系统的固定参数为  $c = 1.0, \nu = 0.01, \mu = 1.0, r = 0.8$  时, 确定性单边约束系统和原随机单边约束系统的初值同取为

$$IC_0 : x(0) = 0.4, \dot{x}(0) = 3.0.$$

相应的, 等价确定性单边约束系统初值取为  $IC_1 : x(0) = [0.4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \dot{x}(0) = [3.0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ , 下同.

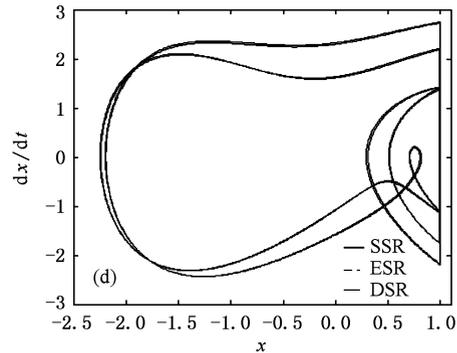
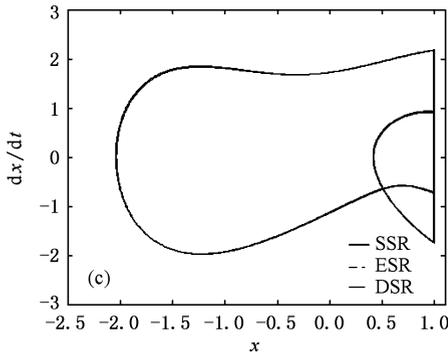
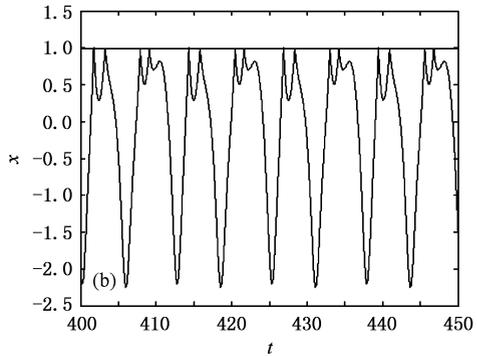
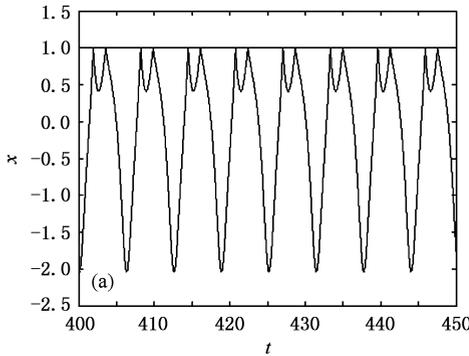


图 2 倍周期时间历程图和相轨图 ( $a = 0.5, \mu = 1.0, b = 1.0$ ) (a)  $F = 1.8$  确定性系统时间历程图 (b)  $F = 2.5$  确定性系统时间历程图; (c)  $F = 1.8$  三个系统 1—2 响应; (d)  $F = 2.5$  三个系统 2—4 响应

当参数  $a = 0.25, \mu = 0.8, b = 1.0, F = 1.75$  时, 系统存在周期响应, 周期为  $1T$ , 系统运动为 1—3, 如图 3(a, c). 保持参数  $a = 0.25, \mu = 0.8, b = 1.0$  不变, 外激励幅值增大为  $F = 1.85$  时, 系统出现倍周期响应, 周期变为  $2T$ , 系统运动为 2—6, 如图 3(b, d).

图 2 和图 3 给出了三种轨线的拟和, 从相轨图看, 三系统的相轨线叠在一起, 说明三个系统的响应符合的较好. 数值结果显示正交多项式逼近也是研究随机约束系统倍周期分岔的一种行之有效的方法, 基本可以反映出随机约束系统的倍周期分岔过程.

当参数  $a = 0.5, \mu = 1.0, b = 1.0, F = 1.8$  时, 系统存在稳态的周期响应, 周期为  $1T$ , 其中  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (下同), 发生了 2 次碰撞, 如图 2(a, c), 记作 1—2 (下同). 这里符号  $p-q$  表示碰撞振动系统的周期运动, 其中  $p$  表示周期数,  $q$  表示碰撞次数. 保持  $a = 0.5, \mu = 1.0, b = 1.0$ , 外激励幅值增大为  $F = 2.5$  时, 系统出现倍周期响应, 其周期变为  $2T$ , 系统运动为 2—4, 如图 2(b, d).

### 5. 随机因素对非光滑系统倍周期分岔的影响

在随机 Duffing 单边系统 (6) 中, 当随机变量  $u$  在区间  $[-1, 1]$  随机取一系列值  $\{u_i\}$ , 每个  $u_i$  值对应一个确定的非光滑样本系统  $[\Pi(u_i)]$ , 若其存在倍周期分岔, 必定在某个临界点处发生确定性分岔. 然而, 随机系统的一系列样本系统  $\{[\Pi(u_i)] \mid i = 1, 2, \dots\}$  并非在相同的临界点处发生分岔. 必定存在一个区间, 在这个区间中, 随机系统的样本系统有的可能已经发生了倍周期分岔, 有的还没有. 当分岔

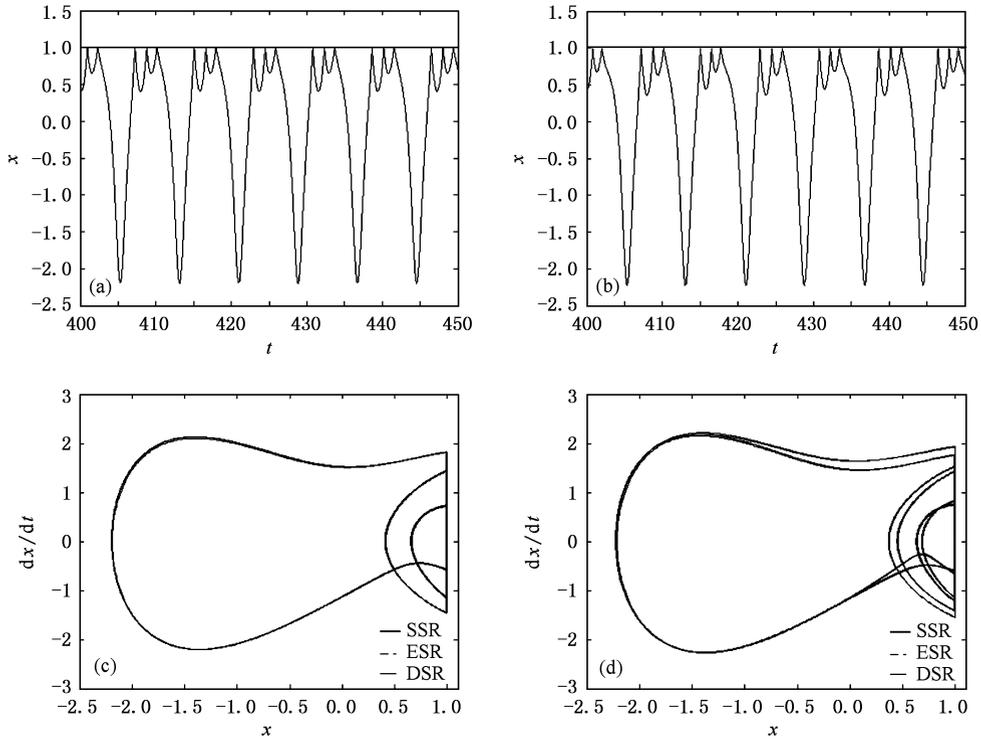


图3 倍周期时间历程图和相轨图(  $a=0.25, w=0.8, b=1.0$  ) (a)  $F=1.75$  确定性系统时间历程图 (b)  $F=1.85$  确定性系统时间历程图 ;(c)  $F=1.75$  三个系统 1—3 响应 (d)  $F=1.85$  三个系统 2—6 响应

参数经过这个过渡区间后,几乎所有的样本系统都发生了分岔,此时认为随机系统的倍周期分岔完成.

取参数  $w=1.0, b=1.0, F=0.5$ ,当分岔参数从  $a=0.46$  到  $a=0.49$  变化时,确定性系统存在倒倍周期分岔,如图 4.

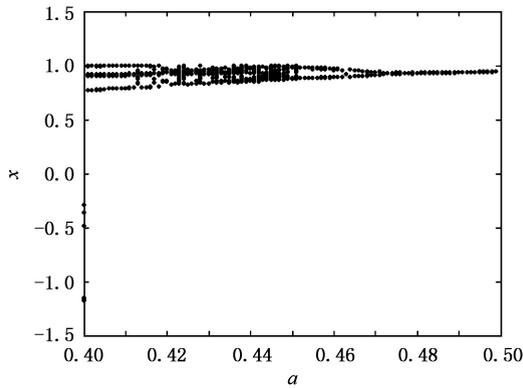


图4 确定性系统的 Poincaré 映射图(  $F=0.5, w=1.0, b=1.0$  )

当  $a=0.4675$  时,确定性系统和等价系统时间的相轨图差别较大,确定性系统还没有发生分岔,周期为  $2T$ ,而等价系统已经接近分岔,周期非常接近  $1T$ ,如图 5.

从图 5 中我们发现,在相同的初值和参数条件

下,等价系统的分岔点确实与确定性系统的分岔点不同,提前发生分岔.受随机因素的影响,存在一个小区间,在这个区间中,随机非光滑系统和确定性系统的相轨图有较大的差别.说明随机非光滑系统的倍周期分岔和确定性系统的倍周期分岔存在本质的区别,前者存在一个分岔区间,后者在某一临界点处发生分岔.

## 6. 结 论

本文主要把正交多项式逼近的方法应用到随机单边约束系统中,并初步分析了其传统的倍周期分岔现象.文中首先借助 Chebyshev 正交多项式把随机系统化为与之等价的确定性系统,通过对等价确定性系统的响应取集合平均,得到平均约束面和平均跃变方程,进而得到一个等价的确定性单边约束系统.数值结果表明在某些参数点处,三个系统拟和的较好,正交多项式逼近是研究随机约束系统倍周期分岔的有效方法,基本可以反映出随机约束系统的倍周期分岔过程.研究同时表明,在随机单边约束系统中,同样存在着丰富的传统的倍周期分岔现象,但是与确定性系统的倍周期分岔存在本质的

区别. 由于约束条件的影响, 使得随机约束系统的

倍周期分岔对分岔参数更加敏感.

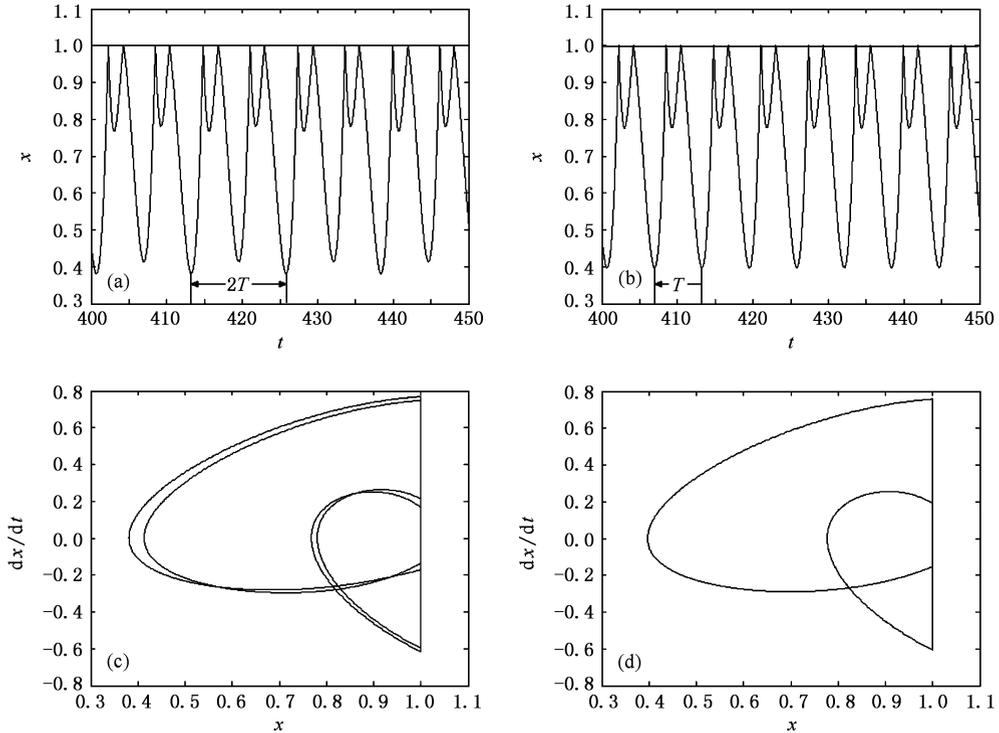


图5 确定性系统和等价系统的时间历程图和相轨图 ( $F=0.5, w=1.0, b=1.0, a=0.4675$ ) (a)和(c)为确定性系统 (b)和(d)为等价系统

- [ 1 ] Jin D P, Hu H Y 2005 *Vibration and Control of Collision*. ( Beijing : Science Press ) ( in Chinese ) [ 金栋平、胡海岩 2005 碰撞振动与控制 北京 科学出版社 ]
- [ 2 ] Tang J S, Fu W B, Li K A 2002 *Chin. Phys.* **11** 1004
- [ 3 ] Gao Z Y, Shen Y W, Liu M J 2005 *Chin. Phys.* **14** 1359
- [ 4 ] Xie W X, Xu W, Lei Y M, Cai L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1105 ( in Chinese ) [ 谢文贤、徐 伟、雷佑明、蔡 力 2005 物理学报 **54** 1105 ]
- [ 5 ] Xu W, He Q, Rong H W *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 ( in Chinese ) [ 徐 伟、贺 群、戎海武等 2003 物理学报 **52** 1365 ]
- [ 6 ] di Bernardo M, Budd C J, Champneys A R 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2553
- [ 7 ] Shaw S W, Holmes P J 1983 *J. Sound. Vib.* **90** 129
- [ 8 ] Hu H Y 1996 *Acta Mech. Sin.* **28** 483 ( in Chinese ) [ 胡海岩 1996 力学学报 **28** 483 ]
- [ 9 ] Nordmark A B 1991 *J. Sound. Vib.* **145** 279
- [ 10 ] Zhang S J, Lu Q S 2000 *Acta Mech. Sin.* **32** 59 ( in Chinese ) [ 张思进、陆启韶 2000 力学学报 **32** 59 ]
- [ 11 ] Jin L, Lu Q S, Wang Q 2004 *Chinese Journal of Applied Mechanics* **21** 21 ( in Chinese ) [ 金 俐、陆启韶、王 琪 2004 应用力学学报 **21** 21 ]
- [ 12 ] Jin L, Lu Q S 2005 *Acta Mech. Sin.* **37** 40 ( in Chinese ) [ 金 俐、陆启韶 2005 力学学报 **37** 40 ]
- [ 13 ] Feng Q 2003 *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **192** 2339
- [ 14 ] Feng Q, Pfeiffer F 1998 *J. Sound. Vib.* **215** 439
- [ 15 ] Feng Q, He H 2003 *European Journal of Mechanics A/Solids*. **22** 267
- [ 16 ] Fang T, Leng X L, Song C Q 2003 *J. Sound. Vib.* **266** 198
- [ 17 ] Fang T, Leng X L, Ma X P *et al.* 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 292
- [ 18 ] Wu C L, Lei Y M, Fang T 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **27** 459
- [ 19 ] Ma S J, Xu W, Li W, Jin Y F 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3508 ( in Chinese ) [ 马少娟、徐 伟、李 伟、靳艳飞 2005 物理学报 **54** 3508 ]
- [ 20 ] Sun X J, Xu W, Ma S J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 610 ( in Chinese ) [ 孙晓娟、徐 伟、马少娟 2006 物理学报 **55** 610 ]

# Period-doubling bifurcation of stochastic Duffing one-sided constraint system<sup>\*</sup>

Feng Jin-Qian<sup>1)†</sup> Xu Wei<sup>1)</sup> Wang Rui<sup>2)</sup>

<sup>1</sup> *Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*

<sup>2</sup> *Department of Mathematics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China*

( Received 12 February 2006 ; revised manuscript received 3 April 2006 )

## Abstract

The conditions of constraint are treated by means of the mean constraint plane and the mean jump equation, in which the method of the Chebyshev polynomial approximation, previously used to explore period-doubling bifurcation of stochastic smooth systems, is applied to stochastic non-smooth systems. Numerical simulations show that period-doubling bifurcation exists in stochastic Duffing one-sided constraint system just as in smooth stochastic Duffing system, and furthermore, the Chebyshev polynomial approximation is an effective method in exploring the dynamical behavior of stochastic non-smooth system.

**Keywords** : non-smooth dynamic system, stochastic Duffing system, Chebyshev polynomial, period-doubling bifurcation

**PACC** : 0547

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10472091, 10332030, 10502042 ).

<sup>†</sup> E-mail : fengjinqian@mail.nwpu.edu.cn.