

基于反馈精确线性化的混沌系统同步控制方法^{*}

朱志宇

(江苏科技大学电子信息学院, 镇江 212003)

(2006 年 4 月 17 日收到, 2006 年 7 月 31 日收到修改稿)

应用精确线性化方法, 通过严格的状态变换和反馈方法, 将非线性混沌系统线性化. 考虑到系统的部分状态变量无法测量, 设计了混沌系统的状态观测器, 求解出了状态观测器的反馈控制律. 将这种控制方法应用于 Lorenz 混沌系统的同步控制, 仿真结果表明, 系统三个状态变量的同步误差均能在很短的时间内收敛到零. 因此, 该同步控制方法在保证闭环系统稳定的前提下, 具有较好的同步控制快速性和较高的控制精度.

关键词: 反馈线性化, 混沌同步, 状态观测器

PACC: 0545

1. 引言

自从 Pecora 等对混沌同步作出开创性的研究以来, 混沌同步已成为混沌研究及混沌学应用的一个重要分支, 近几年相继出现了许多混沌同步方法^[1-4]. 混沌系统的同步是实现混沌实时保密通信的前提, 实时混沌通信要求接收和发送双方必须维持同步. 因此, 混沌系统同步的研究与发展决定了实时混沌通信的应用前景.

状态反馈控制法是一种重要的混沌同步方法, 但是该方法要求能够测量系统的状态变量, 而系统的某些状态变量有时难以测量, 这就限制了它的应用. 近年来, 有些学者将混沌系统看作是一类特殊的非线性动力系统, 引入观测器理论设计混沌同步系统^[5-10]. 状态观测器可以有效地克服状态反馈控制方法的缺点, 且能用于其他同步方法所不能实现的某些系统中. 文献 [6] 以 Hénon 混沌系统为例构造了基于状态观测器的参数调制与解调系统. 文献 [7] 研究了基于模糊观测器的混沌耦合子系统的同步控制问题, 提出了一种 H_∞ 模糊跟踪控制方案. 文献 [8] 采用解析法求得了混沌广义同步的响应系统, 并根据状态观测器理论, 得到驱动和响应系统的全局渐进线性广义同步的充分条件. 文献 [9] 提出了一种混沌系统同步的非线性状态观测器方法.

本文应用精确线性化方法, 通过严格的状态变

换和反馈, 将非线性混沌系统线性化. 考虑到系统的部分状态变量无法测量, 设计混沌系统的状态观测器, 用于估计混沌系统的状态, 用状态估计代替系统的状态, 给出了基于状态观测器的非线性反馈控制律的具体设计方法. 仿真结果表明, 受控后的混沌系统稳定、收敛速度快、同步精度高.

2. 非线性系统的反馈精确线性化

本文研究的系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ y &= h(x), \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $x \in R^n$ 和 $u \in R^1$ 分别是状态变量和控制输入, $f: R^n \rightarrow R^n$ 和 $g: R^n \rightarrow R^n$ 是 R^n 中的光滑向量场.

系统 (1) 的精确线性化问题可描述为: 给定向量场 f, g 及 $x_0 \in X$, 寻找坐标变换 $z = \Phi(x)$ 和状态反馈变换 $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, 将系统 (1) 变换成线性系统 $\dot{z} = Az + Bv$. 这里, v 为变换后的输入, $\beta(x)$ 非奇异 (A, B) 可控.

如果系统 (1) 的精确线性化问题可解, 则微分同胚 $\Phi(x)$ 应满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} (f + g\alpha(x)) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} &= A, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} g\beta(x) \Big|_{x=\Phi^{-1}(z)} &= B, \end{aligned}$$

且 $\text{rank} [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] = n$.

为了求解系统 (1) 精确线性化的条件, 首先给出

^{*} 国防科技预研基金(批准号: J43.5.11)资助的课题.

“相对阶”的定义.

定义 1 设 $x_0 \in X$ 若存在 x_0 的邻域 V 及正整数 r , 使系统 (1) 满足下列条件:

$$L_g^i L_f^j h(x) = 0 \quad (\forall x \in V, 0 \leq i \leq r-1),$$

$$L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0 \quad (\forall x \in V),$$

则称系统 (1) 在 x_0 点具有相对阶 r . 这里的 $L_g f(x)$ 表示函数 $f(x)$ 对 $g(x)$ 的李导数, 且有

$$L_g^{i+1} f(x) = L_g^i (L_g f(x)) = L_g (L_g^i f(x)).$$

定理 1 系统 (1) 的精确线性化问题可解的充分必要条件为: 存在一个 V 上的实值光滑函数 $h(x)$, 使系统 (1) 在 x_0 点具有相对阶 n .

定理 1 给出了系统 (1) 能够精确线性化的条件. 定理 1 的证明比较复杂, 其证明过程详见文献 [11].

若定理 1 的条件满足, 则存在坐标变换

$$z = \Phi(x) = [h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)]^T \quad (2)$$

和状态反馈变换

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (3)$$

能够将系统 (1) 变换成线性系统

$$\dot{z} = Az + Bv. \quad (4)$$

在 (3) 式中,

$$\alpha(x) = \frac{L_f^{n-1} h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)},$$

$$\beta(x) = \alpha(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)}.$$

经过线性化后, 对系统 (1) 应用状态反馈控制律

$$v = K^T x \quad (K \in R^{n \times 1}), \quad (5)$$

选用适当的反馈增益 K 配置系统 (4) 的极点, 可使闭环系统 (4) 和 (5) 渐进稳定.

3. 基于状态观测器的混沌同步方法

控制理论中有一个和同步类似的问题, 就是通过系统的观测信号来估计该系统的状态, 即观测器问题. 观测器方法在控制领域得到了深入研究和广泛应用. 混沌系统是一类特殊的非线性动力系统, 很自然地可以应用观测器理论设计混沌同步系统, 从而使得混沌同步的设计更加灵活, 且能用于以往同步方法所不能实现的某些混沌系统.

考察如下的非线性自治系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) = Ax + g(x) + Bu, \\ y &= C^T x, \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $x \in R^{n \times 1}$ 为状态向量, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times 1}$ 和 $C \in R^{m \times n}$ 是系统输出矩阵, 通常取 $m = 1$.

性质 1 系统 (6) 中的非线性项 $g: R^n \rightarrow R^n$ 满足全局 Lipschitz 条件, 即

$$\|g(x) - g(\hat{x})\| \leq L \|x - \hat{x}\| \quad (\forall x, \hat{x} \in R^{n \times 1}), \quad (7)$$

式中 L 为 Lipschitz 常数.

性质 2 若 (A, B) 能控 (C^T, A) 可观测, 则存在一个矩阵 $K \in R^{n \times 1}$, 使得 $A_e = A - KC$ 是稳定矩阵, 即对任一对称的正定阵 $Q \in R^{n \times n}$, 总存在一个对称正定阵 $P \in R^{n \times n}$, 使得下列 Lyapunov 方程成立:

$$A_e^T P + P A_e = -Q. \quad (8)$$

如果系统 (6) 满足性质 1 和性质 2, 则对系统 (6) 可以取如下的全阶观测器:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + g(\hat{x}) + Bu + k(y - \hat{y}), \\ \hat{y} &= C^T \hat{x}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中, \hat{x} 是状态 x 的估计, $k \in R^{n \times 1}$ 为观测器的增益矢量.

观测器的状态估计误差为 $e = x - \hat{x}$, 误差方程为

$$\dot{e} = (A - KC)e + B(g(x) - g(\hat{x})). \quad (10)$$

设计观测器的目的就是选择合适的增益 $k \in R^{n \times 1}$, 使得 (10) 式渐进稳定, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0. \quad (11)$$

若 (11) 式成立, 则可用状态观测器的状态估计值 \hat{x} 来代替实际的状态变量 x 进行反馈控制, 其闭环控制律为 (5) 式.

本文给出了以下两个定理来指导如何选择增益矩阵 K .

定理 2 给定系统 (1) 及其观测器 (9) 式, 若 A_e 稳定且 $K < \lambda_{\min}(Q) \lambda_{\max}(P)$ 则

$$\|e(t)\| \leq M e^{-\alpha t} \|e(0)\|, \quad (12)$$

式中,

$$M = \sqrt{\lambda_{\max}(P) \lambda_{\min}(P)},$$

$$\alpha = \lambda_{\max}(Q) 2 \lambda_{\max}(P) - L > 0,$$

其中, $\lambda(\cdot)$ 表示矩阵的特征值, P, Q 为满足方程 (8) 的对称正定阵.

(12) 式说明, 此时观测器的误差按照指数规律收敛, 因此 (5) 式必然成立.

若 $\lambda(A_e) < \alpha$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 则存在矩阵

$$V \in R^{m \times n} (\det V \neq 0),$$

使得

$$V A_e V^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

令 $\lambda = \max \lambda_i$, 则有定理 3 成立.

定理 3 假设系统(1)满足 Lipschitz 条件, 且其状态观测器如(9)式所示, 若有

$$\lambda + \|V\| \cdot \|V^{-1}\| \cdot L < 0, \quad (13)$$

则(10)式成立.

定理 3 表明, 若能求解出 A_c 的特征矢量矩阵 V 及其逆矩阵 V^{-1} , 则可满足观测器收敛的条件. 文献[10]给出了一种矩阵 V 的参数化表示, 通过求解优化问题来寻找满足(13)式的矩阵 V .

4. 仿真实例

Lorenz 系统是目前使用最为广泛的混沌模型之一, Lorenz 系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_1 + \sigma x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + rx_1 - x_1 x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= -bx_3 + x_1 x_2 \quad (\sigma, r, b > 0). \end{aligned} \quad (14)$$

取 $\sigma = 10, r = 28, b = \frac{8}{3}$, 此时 Lorenz 系统呈现出混沌状态, 其混沌吸引子如图 1 所示.

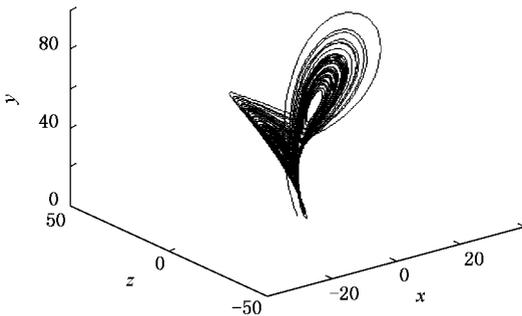


图 1 Lorenz 系统混沌吸引子

对给定的参数, 设吸引域为 Ω , 将 Lorenz 系统分成线性和非线性两部分, 相应的系数矩阵和非线性项分别

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}, \\ g(x) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

首先对系统(15)精确线性化, 然后设计系统的状态观测器并求解出状态观测器的控制律. 最后得

到的同步控制仿真结果如图 2—图 5 所示.

对系统(15)的精确线性化可分为四步进行.

- 1) 检验定理 1 中的条件是否成立.
- 2) 若定理 1 中的条件成立, 则计算

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} \text{ad}_f^i g(x) = 0 \quad (0 \leq i \leq n-2),$$

解出的 $h(x)$ 必定使得

$$L_g L_f^{i-1} h(x) \neq 0 \quad (\forall x \in V)$$

成立. 这里

$$\begin{aligned} \text{ad}_f^i g(x) &= [f, \text{ad}_f^{i-1} g](x) \quad (1 \leq i \leq n), \\ \text{ad}_f^0 g(x) &= g(x), \end{aligned}$$

其中 f, g 表示 f, g 的李括号运算, 即 $L_f g(x)$.

- 3) 计算 $L_f^i h(x) \neq 0 (0 \leq i \leq n-1)$.
- 4) 求得反馈变换和坐标变换

$$u = -\frac{L_f^{n-1} h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} v, \quad (16)$$

$$z = \Phi(x) = [h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{n-1} h(x)]^T. \quad (17)$$

经过上述步骤, 非线性混沌系统被反馈精确线性化, 得到如(16)式所示的非线性反馈控制律. 一般而言, 控制律 u 中包含了系统的所有状态 x . 但是由于无法测量到系统的全部状态, 因此必须设计混沌系统的状态观测器, 对不可测的系统状态进行估计.

此时, 可将系统(15)改写成如下形式:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (18a)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0]x. \quad (18b)$$

由(18b)式可知, 仅有状态 x_1 可观测.

按照第 2 节给出的状态观测器设计方法, 求得的状态观测器为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ -yz_3 \\ yz_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ &+ K(y - C^T z), \end{aligned} \quad (19)$$

式中 z 为估计的状态. 用 z 代替(16)式中的 x , 最后求解出状态观测器的控制律.

由于(19)式中的非线性项是可微的, 所以它在吸引域内的 Lipschitz 常数 L 为

$$\begin{aligned}
 L &= \sup\{\|Dg(x)\| \mid x \in \Omega\} \\
 &= \sup\{\max[\lambda_i(Dg^* \cdot Dg)]^{1/2} \mid x \in \Omega\} \\
 &= \sup\{\max\{0, |x| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\} \mid x \in \Omega\} \\
 &= \sup\{\|x\| \mid x \in \Omega\}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

式中 $Dg(\cdot)$ 为 $g(x)$ 的 Jacobian 矩阵, $*$ 表示共轭转置. 由定理 2 可知, L 越小, 定理 2 中的条件就越容易满足. 利用非线性项的结构特点, 可通过线性变

换来降低 L , 这样就可 在变换域内得到满足定理 2 中条件的 Lipschitz 常数 \bar{L} 和增益矢量 \bar{K} , 再通过反变换 $K = T^{-1}\bar{K}$ 即可设计出系统的同步观测器.

图 2—图 5 给出了 Lorenz 混沌系统的同步控制仿真结果. 从图 2 可以看出, 受控后的混沌系统是稳定的. 图 3—图 5 的结果则表明, 混沌系统的三个状态变量的同步误差均在很短的时间内收敛到零.

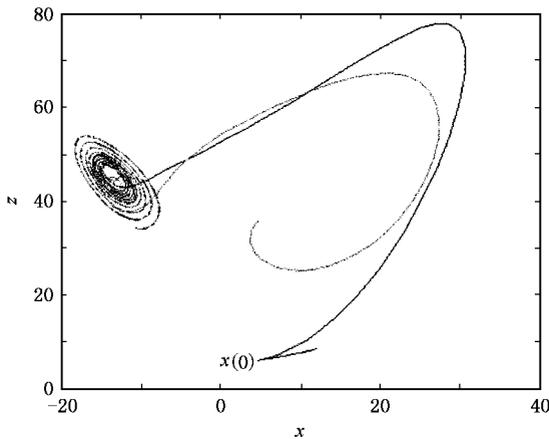


图 2 Lorenz 系统及其观测器的相空间演化轨迹

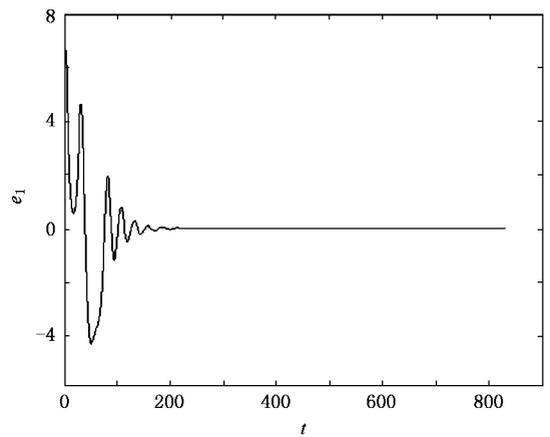


图 3 x_1 的同步误差曲线

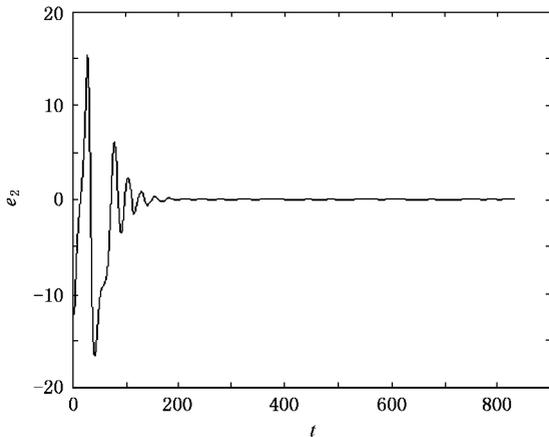


图 4 x_2 的同步误差曲线

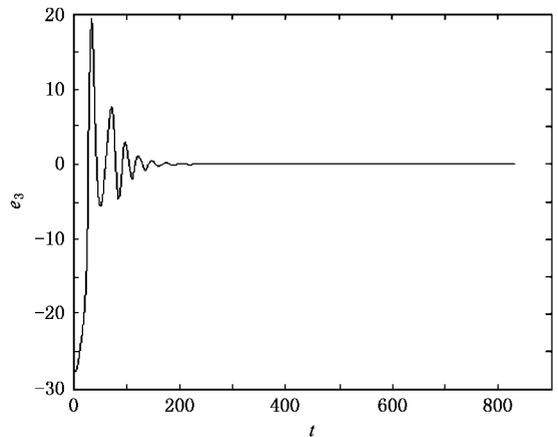


图 5 x_3 的同步误差曲线

5. 结 论

本文应用精确线性化方法, 通过严格的状态变换和反馈, 将非线性混沌系统线性化. 考虑到系统的部分状态变量无法测量, 设计了混沌系统的状态

观测器, 用于估计混沌系统的状态, 然后用系统的状态估计代替系统的状态, 求解出了基于状态观测器的控制律. 将这种控制方法应用于 Lorenz 系统的混沌同步控制. 仿真结果表明, 系统三个状态变量的同步误差均能在很短的时间内收敛到零, 说明本文提出的混沌同步控制方法具有很高的控制精度.

- [1] Liu B , Liu X Z 2004 *Acta Aut. Sin.* **30** 155 (in Chinese) [刘斌、刘新芝 2004 自动化学报 **30** 155]
- [2] Chen L , Han Z Z 2004 *Contr. Decis.* **19** 1 (in Chinese) [陈亮、韩正之 2004 控制与决策 **19** 1]
- [3] Wang X Y , Liu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2584 (in Chinese) [王兴元、刘明 2005 物理学报 **54** 2584]
- [4] Tao C H , Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5058 (in Chinese) [陶朝海、陆君安 2005 物理学报 **54** 5058]
- [5] Yang X S 2002 *Bifur. Chaos* **12** 1159
- [6] Li G H , Xu D M , Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 706 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 706]
- [7] Dou C X , Zhang S Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4120 (in Chinese) [窦春霞、张淑清 2004 物理学报 **53** 4120]
- [8] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
- [9] Yao L N , Gao J F , Liao N H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 35 (in Chinese) [姚利娜、高金峰、廖旋焕 2006 物理学报 **55** 35]
- [10] Zhou P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1108 (in Chinese) [周平 2003 物理学报 **52** 1108]
- [11] Feng C B , Fei S M 1998 *Analysis and Design of Nonlinear System* (Beijing : Electronic Industry Press) (in Chinese) [冯纯伯、费树岷 1998 非线性控制系统分析与设计(北京:电子工业出版社)

Synchronization control based on feedback precise linearization*

Zhu Zhi-Yu

(*School of Electronics and Information , Jiangsu University of Science and Technology , Zhenjiang 212003 , China*)

(Received 17 April 2006 ; revised manuscript received 31 July 2006)

Abstract

Precise linearity method which is applied to linearize nonlinear chaotic system through strict state transform and feedback strategy is discussed. Considering that some of the state variables can not be measured , the nonlinear feedback method including state observer is researched , and the corresponding control law is deduced. This kind of control method is adopted to chaos synchronization control of the Lorenz system , the simulation results show that the synchronization error of the three state variables can convergence to zero in a short time , which indicates that the control procedure proposed in this paper can guarantee high convergence speed and precision of synchronization under the prerequisite of close-loop stability.

Keywords : feedback linearization , chaos synchronization , state observer

PACC : 0545