

随机参数 Duffing 系统中的随机混沌及其 延迟反馈控制 *

吴存利¹⁾²⁾ 马少娟³⁾ 孙中奎³⁾ 方 同^{1)†}

1) 西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072)

2) 中国飞机强度研究所, 西安 710065)

3) 西北工业大学理学院, 西安 710072)

(2006 年 3 月 29 日收到, 2006 年 7 月 31 日收到修改稿)

研究了谐和激励下含有界随机参数 Duffing 系统(简称随机 Duffing 系统)中的随机混沌及其延迟反馈控制问题. 借助 Gegenbauer 多项式逼近理论, 将随机 Duffing 系统转化为与其等效的确定性非线性系统. 这样, 随机 Duffing 系统在谐和激励下的混沌响应及其控制问题就可借等效的确定性非线性系统来研究. 分析阐明了随机混沌的主要特点, 并采用 Wolf 算法计算等效确定性非线性系统的最大 Lyapunov 指数, 以判别随机 Duffing 系统的动力学行为. 数值计算表明, 恰当选取不同的反馈强度和延迟时间, 可分别达到抑制或诱发系统混沌的目的, 说明延迟反馈技术对随机混沌控制也是十分有效的.

关键词: 随机 Duffing 系统, 延迟反馈控制, 随机混沌, Gegenbauer 多项式

PACC: 0545, 0547, 0540

1. 引 言

混沌学已成为当今非线性科学研究的热门课题之一^[1-5]. 混沌控制是混沌学发展过程中必然要解决的一个重要问题. 混沌控制意指混沌的抑制与混沌的诱发, 也包括调整混沌吸引子本身及其吸引域, 实现不同混沌系统之间的混沌同步等问题. 混沌控制的方法大致分为反馈控制与非反馈控制^[6-13]. 混沌吸引子所在流形上“镶嵌”有无数个不稳定的周期闭轨, 这些不稳定周期闭轨都是混沌形成过程中的关键因素, 正是它们所蕴含的各种不稳定因素一步一步地将系统运动引向混沌. 从另一个角度看, 它们又是一种潜在威胁, 只要其中任何一个发生稳定性突变, 都将给有关混沌吸引子带来灾难, 而混沌控制中需要和能够利用的也正是这些内在的潜势力, 在这基础上再施加适当的外部影响或反馈作用, 就有可能抑制混沌或诱发混沌.

确定性 Duffing 振子是非线性动力学研究的一个范例, 特别是混沌抑制或混沌诱发研究的范例. 文

献 [14] 研究了 Duffing 振子在延迟位移反馈作用下的全局动力学行为; 文献 [15] 考察了延迟反馈作用下 Duffing 振子混沌抑制和诱导问题; 文献 [16] 研究了双势阱 Duffing 系统振动主动控制和混沌; 文献 [17] 利用随机相位激励来实现 Duffing 系统的混沌控制, 然而这些研究都局限于确定性参数系统.

随机混沌意指非线性随机系统中依赖于随机变量的混沌集合, 它的各个样本都是确定性混沌. 随机混沌的抑制和诱发问题也是指系统的集合混沌的抑制和诱发, 一旦集合混沌得到抑制, 则每一个样本亦然.

随机混沌及其控制问题的研究尚属起步阶段. 文献 [18] 通过在激励力的相位中增加可调强度噪声来控制随机 Duffing 系统中的随机混沌. 关于随机系统混沌控制的其他研究成果, 作者尚未见到其他报道.

本文利用延迟反馈来实现随机 Duffing 系统中随机混沌的抑制和诱导. 首先, 借助于 Gegenbauer 多项式逼近把随机 Duffing 系统转化为其等效的确定性非线性系统, 关于 Gegenbauer 多项式以及与之相应的 λ 概率密度函数(以下简称 λ -PDF)的基本知识见文献

* 国家自然科学基金(批准号: 10332030, 10472091)和西北工业大学博士论文创新基金(批准号: CX200415)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: tfang@nwpu.edu.cn

[18, 19]. 然后通过该等效确定性非线性系统, 探索随机 Duffing 系统中的随机混沌及其延迟反馈控制, 并加以分析和讨论.

2. 随机 Duffing 系统的等效确定性系统

考察一个含有界随机参数的、耗散的单自由度 Duffing 系统, 在确定性激励下, 其运动方程为

$$\ddot{x} + ax + b(x + cx^3) = f(t) \quad (a > 0). \quad (1)$$

这里, 系统参数 a, c 为确定性常数, 外激励 $f(t)$ 为确定性简谐函数, 参数 b 为一个随机变量, 可以用如下标准随机变量表示:

$$b = \bar{b} + \sigma\xi, \quad (2)$$

式中 \bar{b} 为随机变量 b 的均值, σ 为确定性系数, ξ 为定义在 $[-1, 1]$ 的随机变量, 其概率密度函数假设为 λ -PDF. 系统(1)中, $a > 0$ 的假设保证了系统的耗散性. 又由于(1)式本身是随机的, 故即使在确定性激励下其响应也是随机的. 因此(1)式的响应必然是时间 t 与随机变量 ξ 的函数, 即有

$$x = x(t, \xi). \quad (3)$$

由随机函数正交分解法知, 随机系统(1)的响应可近似写成如下形式:

$$x(t, \xi) = \sum_{l=0}^N x_l(t) G_l^\lambda(\xi), \quad (4)$$

式中 $G_l^\lambda(\xi)$ 表示第 l 阶 Gegenbauer 多项式. 注意到只有 $N \rightarrow \infty$ 时, 级数和 $\sum_{l=0}^N x_l(t) G_l^\lambda(\xi)$ 才能精确代表随机系统(1)的解, 否则有限项的级数只能是原系统的近似解.

将(2)(4)式代入(1)式有

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \bar{b} \right) \sum_{l=0}^N x_l(t) G_l^\lambda(\xi) + \sigma\xi \sum_{l=0}^N x_l(t) G_l^\lambda(\xi) + \bar{b}c \left[\sum_{l=0}^N x_l(t) G_l^\lambda(\xi) \right]^3$$

$$+ \sigma c \xi \left[\sum_{l=0}^N x_l(t) G_l^\lambda(\xi) \right]^3 = f(t). \quad (5)$$

(5)式等号左端第二项可用 Gegenbauer 多项式递推公式^[19]化为

$$\begin{aligned} & \sigma\xi \sum_{l=0}^N x_l(t) G_l^\lambda(\xi) \\ &= \sigma \sum_{l=0}^N x_l(t) [\alpha_l^\lambda G_{l-1}^\lambda(\xi) + \beta_l^\lambda G_{l+1}^\lambda(\xi)] \\ &= \sigma \sum_{l=0}^N [x_{l+1}(t) \alpha_{l+1}^\lambda + x_{l-1}(t) \beta_{l-1}^\lambda] G_l^\lambda(\xi), \quad (6) \end{aligned}$$

式中

$$\alpha_l^\lambda = \frac{2\lambda + n - 1}{2(\lambda + n)},$$

$$\beta_l^\lambda = \frac{n + 1}{2(\lambda + n)}.$$

注意在推导(6)式时曾利用 $x_l(t) = 0$ (当 $l > N$ 或 $l < 0$), 以下类同.(5)式中的三次方项可表示为

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{l=0}^N x_l(t) G_l^\lambda(\xi) \right]^3 \\ &= \sum_{i=0}^{3N} \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k x_i(t) x_{k-j}(t) x_{i-k}(t) \\ & \quad \times G_j^\lambda(\xi) G_{k-j}^\lambda(\xi) G_{i-k}^\lambda(\xi). \quad (7) \end{aligned}$$

利用 Gegenbauer 多项式定义^[19], $G_i^\lambda(\xi) G_j^\lambda(\xi) G_k^\lambda(\xi)$ 可表示为

$$G_i^\lambda(\xi) G_j^\lambda(\xi) G_k^\lambda(\xi) = \sum_{m=0}^{i+j+k} c_{i,j,k,m}^\lambda \left(\frac{\xi-1}{2} \right)^m, \quad (8)$$

式中,

$$c_{i,j,k,m}^\lambda = \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^m a_{i,k}^\lambda a_{j,n-k}^\lambda a_{l,m-n}^\lambda, \quad (9)$$

其中 $a_{i,k}^\lambda$ 定义见文献[19]. 把 $\left(\frac{\xi-1}{2} \right)^m$ 表示成 $G_i^\lambda(\xi)$ 的线性组合形式,

$$\left(\frac{\xi-1}{2} \right)^m = \sum_{i=0}^m b_{m,i}^\lambda G_i^\lambda(\xi). \quad (10)$$

这里,

$$\begin{aligned} b_{i,i}^\lambda &= \frac{1}{a_{i,i}}, \\ b_{i+1,i}^\lambda &= -\frac{a_{i+1,i}}{a_{i+1,i+1} a_{i,i}}, \\ b_{i+2,i}^\lambda &= -\frac{a_{i+2,i} a_{i+1,i+1} - a_{i+1,i} a_{i+2,i+1}}{a_{i,i} a_{i+1,i+1} a_{i+2,i+2}}, \\ b_{i+3,i}^\lambda &= -\frac{a_{i+3,i} a_{i+2,i+2} a_{i+1,i+1} - a_{i+3,i+1} a_{i+2,i+2} a_{i+1,i} - a_{i+3,i+2} a_{i+2,i} a_{i+1,i+1} + a_{i+3,i+2} a_{i+2,i+1} a_{i+1,i}}{a_{i,i} a_{i+1,i+1} a_{i+2,i+2} a_{i+3,i+3}}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (11)$$

将(10)式代入(8)式有

$$G_i^\lambda(\xi)G_j^\lambda(\xi)G_l^\lambda(\xi) = \sum_{n=0}^{i+j+l} d_{i,j,l,n}^\lambda G_n^\lambda(\xi), \quad (12)$$

式中,

$$d_{i,j,l,n}^\lambda = \sum_{m=n}^{i+j+l} c_{i,j,l,m} b_{m,n}^\lambda. \quad (13)$$

将(12)式代入(7)式,非线性项 $[\sum_{l=0}^N x_l(t)G_l^\lambda(\xi)]^3$ 可以改写为

$$\begin{aligned} \left[\sum_{l=0}^N x_l(t)G_l^\lambda(\xi) \right]^3 &= \sum_{i=0}^{3N} \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k x_j(t)x_{k-j}(t)x_{i-k}(t) \\ &\quad \times \sum_{n=0}^i d_{j,k-j,i-k,n}^\lambda G_n^\lambda(\xi) \\ &= \sum_{n=0}^{3N} g_n^\lambda(t)G_n^\lambda(\xi), \end{aligned} \quad (14)$$

式中,

$$\begin{aligned} g_n^\lambda(t) &= \sum_{i=n}^{3N} \sum_{k=0}^i \sum_{j=0}^k d_{j,k-j,i-k,n}^\lambda \\ &\quad \times x_j(t)x_{k-j}(t)x_{i-k}(t). \end{aligned} \quad (15)$$

再利用 Gegenbauer 多项式的递推关系(5)式等号左端第四项可写为

$$\begin{aligned} &\sigma c \xi \left[\sum_{l=0}^N x_l(t)G_l^\lambda(\xi) \right]^3 \\ &= \sigma c \sum_{n=0}^{3N} (g_{n+1}^\lambda(t)\alpha_{n+1}^\lambda + g_{n-1}^\lambda(t)\beta_{n-1}^\lambda)G_n^\lambda(\xi). \end{aligned} \quad (16)$$

把(6)(14)(16)式代入(5)式可得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \bar{b} \right) \sum_{l=0}^N x_l(t)G_l^\lambda(\xi) \\ &+ \sigma \sum_{l=0}^N [x_{l+1}(t)\alpha_{l+1}^\lambda + x_{l-1}(t)\beta_{l-1}^\lambda]G_l^\lambda(\xi) \\ &+ \bar{b}c \sum_{l=0}^{3N} g_l^\lambda(t)G_l^\lambda(\xi) + \sigma c \sum_{l=0}^{3N} (g_{l+1}^\lambda(t)\alpha_{l+1}^\lambda \\ &+ g_{l-1}^\lambda(t)\beta_{l-1}^\lambda)G_l^\lambda(\xi) = f(t). \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式两端顺次乘以 $G_m^\lambda(\xi)$ ($m=0,1,\dots,N$),然后取数学期望,并由 Gegenbauer 多项式的正交关系及 $G_0^\lambda=1$ 和 $b_0^\lambda=1$,可得一组关于 $x_m(t)$ 的且与原随机 Duffing 系统在加权平均意义下的等效确定性非线性微分方程组

$$\begin{aligned} &\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \bar{b} \right) x_0(t) + \sigma x_1(t)\alpha_1^\lambda + \bar{b}c g_0^\lambda + \sigma c g_1^\lambda \alpha_1^\lambda = f(t), \\ &\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \bar{b} \right) x_1(t) + \alpha(x_2(t)\alpha_2^\lambda + x_0(t)\beta_0^\lambda) + \bar{b}c g_1^\lambda + \sigma c (g_2^\lambda \alpha_2^\lambda + g_0^\lambda \beta_0^\lambda) = 0, \\ &\dots \\ &\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \bar{b} \right) x_N(t) + \alpha(x_{N+1}(t)\alpha_{N+1}^\lambda + x_{N-1}(t)\beta_{N-1}^\lambda) + \bar{b}c g_N^\lambda + \sigma c (g_{N+1}^\lambda \alpha_{N+1}^\lambda + g_{N-1}^\lambda \beta_{N-1}^\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

这就是由 Gegenbauer 多项式逼近得到的与原随机 Duffing 系统等效的非线性确定性系统,由等效非线性确定性系统所求得的时间函数 $x_j(t)$ ($j=0,1,2,\dots,N$)后,就可得到原随机系统(1)的随机近似响应.利用有效的数值解法(如 Runge-Kutta 方法)求出(18)式的 $x_j(t)$ 后,原随机 Duffing 系统的近似随机响应可以表示为

$$x(t, \xi) \approx \sum_{j=0}^N x_j(t)G_j^\lambda(\xi). \quad (19)$$

对应于随机参数 ξ 的每一个样本,如 $\xi =$

$\tilde{\xi} \in [-1, 1]$,系统(1)的样本响应可表示为

$$x(t, \tilde{\xi}) \approx \sum_{j=0}^N x_j(t)G_j^\lambda(\tilde{\xi}). \quad (20)$$

例如,当 $\tilde{\xi} = 0, N=4$ 时,有

$$x(t, 0) = x_0(t) - \lambda x_2(t) + (1/2)\lambda(1 + \lambda)x_4(t).$$

原随机系统关于随机变量 ξ 的集合平均响应可以表示为

$$E[x(t, \xi)] = \sum_{j=0}^N x_j(t)E[G_j^\lambda(\xi)] = x_0(t) \quad (21)$$

式中 $x_0(t)$ 为确定性函数.

3. 随机混沌

现在考察随机 Duffing 系统(1)在谐和激励下的随机混沌响应,设谐和激励力 $f(t)$ 为

$$f(t) = F \sin \omega t, \quad (22)$$

这时可取 F 或 ω 为分叉参数,通过(18)式寻求其混沌响应及其存在域.引入如下状态变量:

$$\begin{aligned} Y(t) &= [y_1(t), y_2(t), \dots, y_{2N+1}(t), y_{2N+2}(t)]^T \\ &= [x_0(t), \dot{x}_0(t), \dots, x_N(t), \dot{x}_N(t)]^T, \end{aligned}$$

(18) 式可以写成一阶微分方程

$$\dot{Y} = f(Y, t) \quad (Y \in R^{2N+2}). \quad (23)$$

为了计算系统(23)对应于稳态响应时的最大 Lyapunov 指数, 需要写出相对于该稳态响应的线性变分式

$$\delta \dot{Y} = G(Y, t) \delta Y, \quad (24)$$

式中

$$\delta Y = [\delta y_1(t) \delta y_2(t) \dots \delta y_{2N+1}(t) \delta y_{2N+2}(t)]^T, \\ G(Y, t) = \frac{\partial f(Y, t)}{\partial Y}.$$

由 Wolf 算法^[20], 最大 Lyapunov 指数的计算公式为

$$\Theta = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{\|\delta Y(t)\|}{\|\delta Y(0)\|}. \quad (25)$$

在数值仿真中, 系统的参数 a, \bar{b}, σ, c 和 λ 取值分别为 $a = 0.3, \bar{b} = -1.0, \sigma = 0.1, c = -1.0, \lambda = 1.0$.

数值计算表明, $N = 4$ 时正交多项式近似已具有良好的精度. 图 1 和图 2 分别给出了系统(23)的最大 Lyapunov 指数 Θ 随 F 以及 ω 变化的曲线. 由图 1 和图 2 可见, 当 $\omega = 1.2$, 或 $F \in [0.32,$

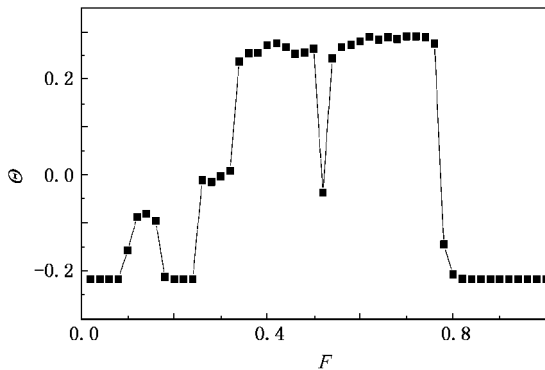


图 1 $\omega = 1.2$ 时系统(23)最大 Lyapunov 指数 Θ 随 F 的变化曲线

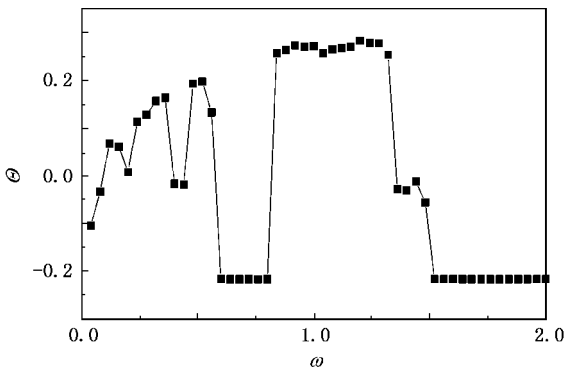


图 2 $F = 0.4$ 时系统(23)最大 Lyapunov 指数 Θ 随 ω 的变化曲线

$0.48] \cup [0.54, 0.76]$ 或 $F = 0.4, \omega \in [0.84, 1.32]$ 时, 系统(23)的最大 Lyapunov 指数 Θ 为正. 由(19)式可知, 对应于随机变量 ξ 的每一个样本值, 系统(1)的样本响应是混沌的, 可见随机 Duffing 系统的这类集合响应属于随机混沌.

4. 延迟反馈控制

在延迟反馈控制中, 延迟项的存在使原来的有限维系统变为无穷维系统, 因而使被控系统的动力学行为更呈现多样性. 本文感兴趣的是在随机系统(1)中添加延迟位移反馈 $x(t - \tau)$, 并通过其来研究随机系统的混沌抑制或诱发.

在系统(1)等号右端添加延迟反馈项 $x(t - \tau)$, 即有

$$\ddot{x} + ax + b(x + cx^3) = f(t) + \eta \Gamma x(t - \tau) \quad (26)$$

式中 η 用于调节反馈项的正负号, 其取值为 1 或 -1. 通过调节反馈强度 Γ 和延迟时间 τ 来控制系统的动力学行为. 利用以上介绍的 Gegenbauer 多项式逼近, 可推得反馈控制随机系统(26)的等效确定性方程为

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \bar{b} \right) x_0(t) + \sigma x_1(t) \alpha_1^\lambda + \bar{b} c g_0^\lambda + \sigma c g_1^\lambda \alpha_1^\lambda \\ = f(t) + \eta b_0^\lambda \Gamma x_0(t - \tau), \\ \left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \bar{b} \right) x_1(t) + \sigma (x_2(t) \alpha_2^\lambda + x_0(t) \beta_0^\lambda) + \bar{b} c g_1^\lambda + \sigma (g_2^\lambda \alpha_2^\lambda + g_0^\lambda \beta_0^\lambda) \quad (27) \\ = \eta b_1^\lambda \Gamma x_1(t - \tau),$$

...

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + a \frac{d}{dt} + \bar{b} \right) x_N(t) + \sigma (x_{N+1}(t) \alpha_{N+1}^\lambda + x_{N-1}(t) \beta_{N-1}^\lambda) + \bar{b} c g_N^\lambda \\ + \sigma (g_{N+1}^\lambda \alpha_{N+1}^\lambda + g_{N-1}^\lambda \beta_{N-1}^\lambda) \\ = \eta b_N^\lambda \Gamma x_N(t - \tau).$$

利用(27)式, 就可以研究随机系统(26)混沌响应的反馈抑制或诱导. 从数学角度看, 这类问题归结为确定延迟反馈控制系统发生随机分叉的条件, 也就是要确定系统(26)的最大 Lyapunov 指数为零的条件. 那些使被控系统的最大 Lyapunov 指数不大于零的 Γ 和 τ 值, 对应于被控系统运动呈现周期态. 反之, 那些使被控系统的最大 Lyapunov 指数大于零的 Γ 和 τ 值, 对应于被控系统运动呈现混沌态.

4.1. 延迟反馈抑制混沌

首先研究如何调节反馈强度 Γ 和延迟时间 τ , 使被控系统 (26) 从混沌态转变到周期轨道上. 不失一般性, 系统 (26) 的参数取值仍为 $a = 0.3, \bar{b} = -1.0, \sigma = 0.1, c = -1.0, \lambda = 1.0$, 系数 $\eta = 1$. 图 3 给出了 τ 取不同值时, 系统 (26) 最大 Lyapunov 指数 Θ 随反馈强度 Γ 的变化情况. 图 3 清晰地显示, 反馈强度 Γ 和延迟时间 τ 是如何影响系统动力学行为的. 当 Γ 值从小变大时, 系统从混沌态逐渐向周期态转化. 从图 3 可以看到: 对应于 $\tau = 0.4\pi, F = 0.4$, 当 $\Gamma > 0.2$ 时, 反馈系统的集合平均响应将是周期的; 对应于 $\tau = 0.2\pi, F = 0.6$, 当 $\Gamma > 0.54$ 时, 反馈系统的集合平均响应将是周期的.

图 4 和图 5 分别给出了 $F = 0.4$ 和 $F = 0.6$ 时系统的集合平均响应的 Poincaré 映射图. 由图 4 和

图 5 可见, 当 $\Gamma = 0.0$ 即系统未被控时, 随机系统集合平均响应是混沌的. 而当 $F = 0.4, \Gamma = 0.26$ 和 $\tau = 0.4\pi$ 或 $F = 0.6, \Gamma = 0.6$ 和 $\tau = 0.2\pi$ 时, 反馈系统的集合平均响应将是周期的.

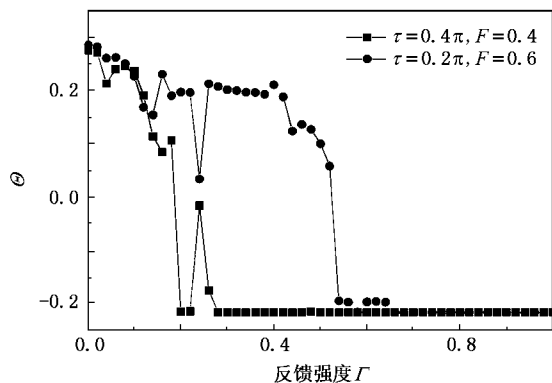


图 3 系统 (26) 最大 Lyapunov 指数 Θ 随反馈强度 Γ 的变化曲线

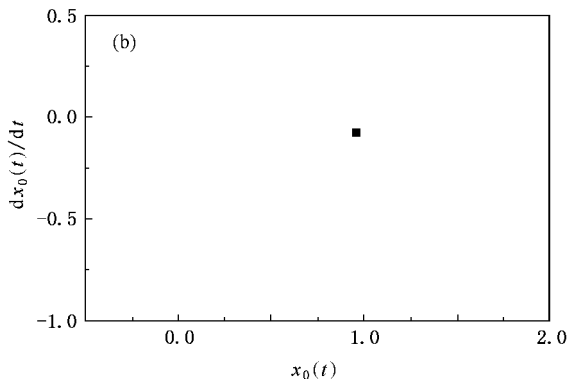
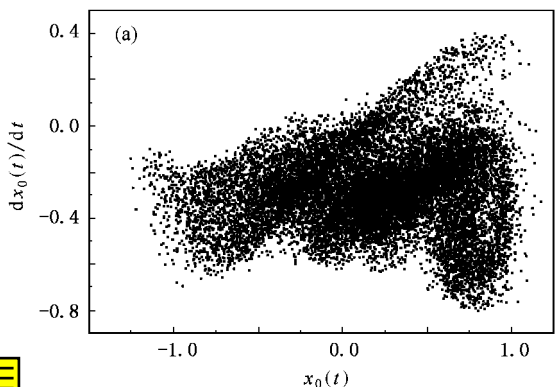


图 4 当 $F = 0.4$ 时被控系统 (26) 的 Poincaré 映射 (a) $\Gamma = 0.0$ (b) $\Gamma = 0.26, \tau = 0.4\pi$

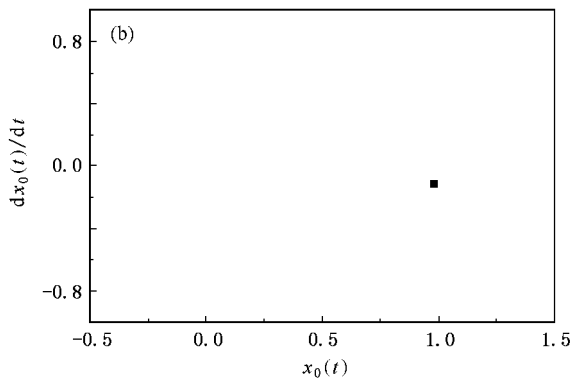
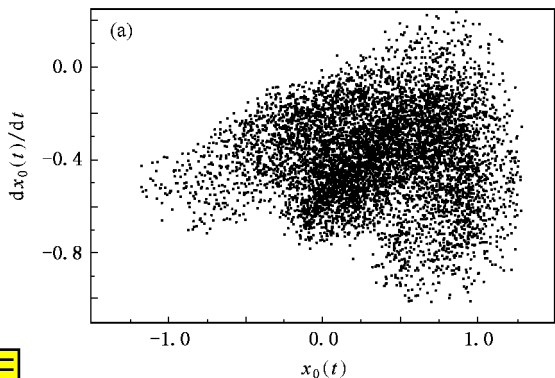


图 5 当 $F = 0.6$ 时被控系统 (26) 的 Poincaré 映射 (a) $\Gamma = 0.0$ (b) $\Gamma = 0.6, \tau = 0.2\pi$

4.2. 延迟反馈诱发混沌

下面我们研究延迟反馈诱发混沌, 即通过调节系数 η 、反馈强度 Γ 和延迟时间 τ 将系统 (26) 从周

期态控制到混沌态. 这里, 系统参数仍为 $a = 0.3, \bar{b} = -1.0, \sigma = 0.1, c = -1.0, \lambda = 1.0$, 而系数 $\eta = -1$. 从图 1 知, 当激励频率 $\omega = 1.2$, 激励幅值 $F = 0.2$ 或 $F = 0.85$, 未受控系统集合平均响应是周期的.

图 6 给出了 $\tau = 0.1\pi, F = 0.2$ 和 $\tau = 0.2\pi, F = 0.85$ 时, 被控系统 (26) 的最大 Lyapunov 指数 Θ 随反馈强度 Γ 的变化曲线. 从图 6 可以看出, 随着 Γ 的增加, 系统从周期态逐渐进入混沌态. 图 7 和图 8 给出了系统 (26) 的 Poincaré 映射, 显然 $\Gamma = 0$ 即系统未被控制时, 系统集合平均响应是周期的, 而当 $F = 0.2, \Gamma = 0.5, \tau = 0.1\pi$ 或 $F = 0.85, \Gamma = 0.65, \tau = 0.2\pi$ 时, 系统集合平均响应将是混沌的.

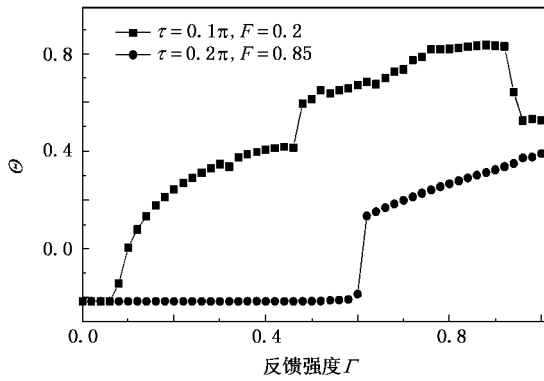


图 6 系统 (26) 的最大 Lyapunov 指数 Θ 随反馈强度 Γ 的变化曲线

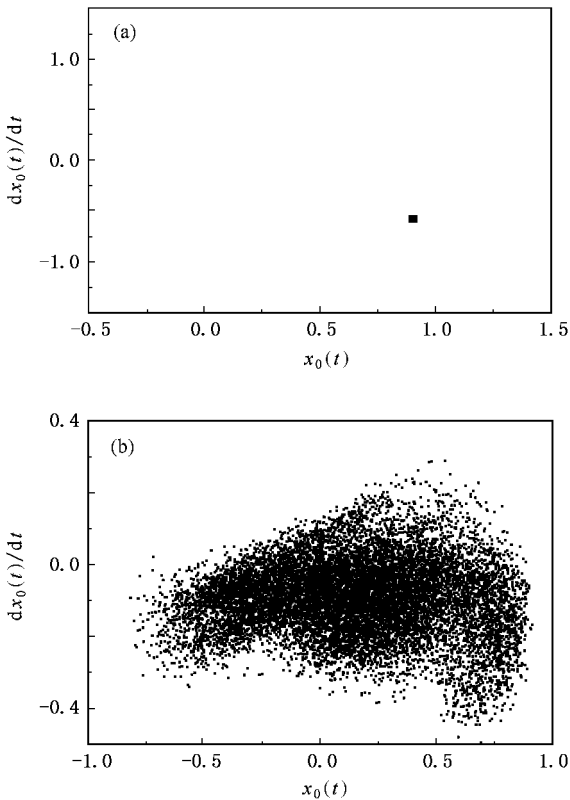


图 7 $F = 0.2$ 时系统 (26) 的 Poincaré 映射 (a) $\Gamma = 0.0$, (b) $\Gamma = 0.5, \tau = 0.1\pi$

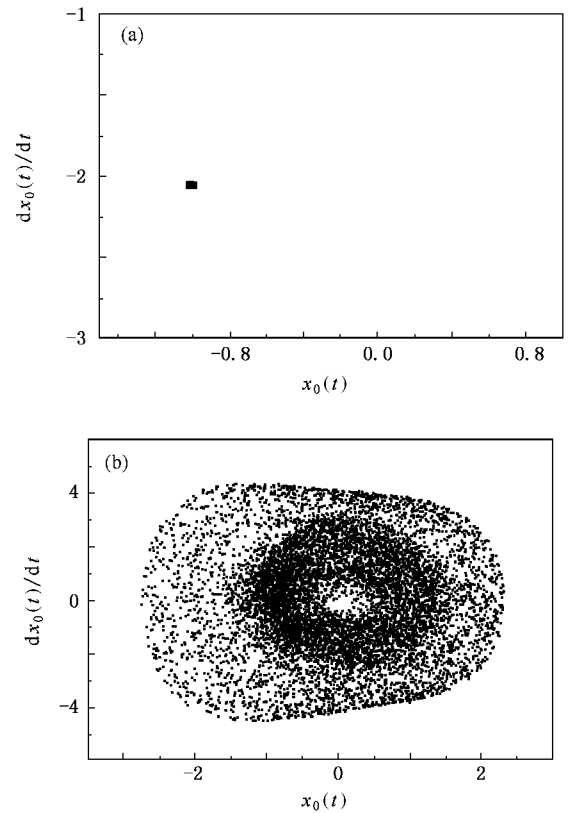


图 8 $F = 0.85$ 时系统 (27) 的 Poincaré 映射 (a) $\Gamma = 0.0$, (b) $\Gamma = 0.65, \tau = 0.2\pi$

5. 结 论

随机混沌指的是含不确定参数系统中的混沌, 它是一个集合现象, 是随机系统无穷多个混沌样本的共同表现, 其特征为: 不仅随机响应的统计特性如集合平均响应呈确定性混沌, 而且其每一个样本响应也是确定性混沌. 本文所考察系统随机参数的概率密度函数设定为 λ -PDF. 这样, 借助于 Gegenbauer 多项式近似, 原随机参数系统可以被转化成等效确定性非线性系统. 实际上, 本文得到的等效系统是与原系统的均方残差为极小的一种加权平均近似. 通过它得到的各个样本解也是在同样意义下的近似解. 借助等效确定性非线性系统来研究随机参数 Duffing 系统的混沌及混沌抑制和诱发问题, 好处在于可以利用现有的各种有效的适用于确定性系统的解析和数值方法以及控制策略来求解复杂的随机系统的响应及其控制问题. 如用 Wolf 算法计算最大 Lyapunov 指数来确定随机系统的动力学行为, 并通过反馈技术来抑制或诱发随机系统中的随机混沌.

本文采用延迟反馈技术来抑制或诱发随机 Duffing 系统中的随机混沌. 数值模拟结果表明, 这一控制策略是十分有效的.

- [1] Ott E , Grebogi C , Yorke J 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [2] Hu H Y 1996 *Adv. Mech.* **26** 453 (in Chinese) [胡海岩 1996 力学进展 **26** 453]
- [3] Chen L Q , Liu Y Z 1998 *Adv. Mech.* **28** 289 (in Chinese) [陈立群、刘延柱 1998 力学进展 **28** 289]
- [4] Liu X D , Huang W H 2001 *Adv. Mech.* **31** 18 (in Chinese) [刘向东、黄文虎 2001 力学进展 **31** 18]
- [5] Wang G R , Yu X L , Chen S G 2001 *Control , Synchronization and Utilization of Chaos* (Beijing : National Defense Industry Press) (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用 (北京 : 国防工业出版社)]
- [6] Tang G N , Luo X S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 15 (in Chinese) [唐国宁、罗晓曙 2004 物理学报 **53** 15]
- [7] Li R H , Xu W , Li S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 598 (in Chinese) [李瑞红、徐 伟、李 爽 2006 物理学报 **55** 598]
- [8] Yu H Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5053 (in Chinese) [于红治 2005 物理学报 **54** 5053]
- [9] Zhang X M , Peng J H , Zhang R Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3019 (in Chinese) [张晓明、彭建华、张入元 2005 物理学报 **54** 3019]
- [10] Gong L H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3502 (in Chinese) [龚礼华 2005 物理学报 **54** 3502]
- [11] Huang W , Yu C X , Zheng J *et al* 2004 *Chin. Phys.* **13** 1913
- [12] Lei Y M , Xu W , Xu Y *et al* 2004 *Chaos Solitons Fract.* **21** 1175
- [13] Yang X L , Xu W , Sun Z K *et al* 2005 *Chaos Solitons Fract.* **25** 415
- [14] Wang H L , Hu H Y , Wang Z H 2004 *Int. J. Bifurc. Chaos* **14** 2753
- [15] Sun Z K , Xu W , Yang X L *et al* 2006 *Chaos Solitons Fract.* **27** 705
- [16] Nbandjo B N , Tchoukuengno R , Woafu P 2003 *Chaos Solitons Fract.* **18** 345
- [17] Li S , Xu W , Li R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1049 (in Chinese) [李 爽、徐 伟、李瑞红 2006 物理学报 **55** 1049]
- [18] Wu C L , Lei Y M , Fang T 2006 *Chaos Solitons Fract.* **27** 459
- [19] Fang T , Leng X L , Ma X P *et al* 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 292
- [20] Wolf A , Swift J B , Swinney H L *et al* 1985 *Physica D* **16** 285

Stochastic chaos in stochastic Duffing systems and its control by delayed feedback^{*}

Wu Cun-Li^{1,2)} Ma Shao-Juan³⁾ Sun Zhong-Kui³⁾ Fang Tong¹⁾†

1) College of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

2) Aircraft Strength Research Institute of China, Xi'an 710065, China)

3) College of Science, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 29 March 2006; revised manuscript received 31 July 2006)

Abstract

The problem of stochastic chaos and its control by delayed feedback in a Duffing system with bounded random parameters (a stochastic Duffing system in short) under harmonic excitations is considered in detail. At first, the stochastic Duffing system is transformed into its equivalent deterministic nonlinear system by the Gegenbauer polynomial approximation. Thus, the problem of chaotic response and its control in stochastic Duffing system can be reduced to that in an equivalent deterministic system. So the available effective mathematical methods and control strategies can be applied to the latter. Then, the main feature of stochastic chaos is fully explored, where the top Lyapunov exponent of the equivalent system obtained by Wolf's algorithm is used to identify the dynamic behavior of stochastic Duffing system. Finally, the control strategy of delayed feedback is applied to suppress or to induce chaotic response in the system. The results of numerical simulation show that by proper choice of feedback intensity and time delay, either suppressing or inducing stochastic chaos can be achieved. Hence, the strategy of delayed feedback control is also effective to stochastic chaos.

Keywords : stochastic Duffing system, delayed feedback control, stochastic chaos, Gegenbauer polynomial

PACC : 0545, 0547, 0540

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10332030, 10472091) and the Doctoral Dissertation Foundation of Northwestern Polytechnical University, China (Grant No. CX200415).

† Corresponding author. E-mail : tfang@nwpu.edu.cn