

# 基于非线性控制的超混沌 Chen 系统混沌同步<sup>\*</sup>

武相军<sup>1)†</sup> 王兴元<sup>1)</sup>

1) 大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

2) 河南大学计算中心, 开封 475001)

(2006 年 4 月 17 日收到, 2006 年 5 月 2 日收到修改稿)

研究了基于非线性控制的超混沌 Chen 系统的混沌同步问题. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 设计了非线性控制器, 改进了 Jiang 和 Huang 等设计的同步误差系统的 Lyapunov 函数形式, 理论证明了超混沌 Chen 系统的自同步和超混沌 Chen 系统与超混沌 Rössler 系统的异结构同步. 数值模拟进一步验证了所提出方案的有效性.

关键词: 超混沌 Chen 系统, 自同步, 异结构同步, 非线性控制器

PACC: 0545, 0555

## 1. 引 言

1990 年, Pecora 和 Corroll<sup>[1, 2]</sup>首次提出混沌同步的原理, 并在电路实验中成功地实现. 由于混沌同步在保密通信、信号处理和生命科学等方面有着十分广泛的应用前景, 引起了人们极大的关注, 并对此做了深入的研究<sup>[3-6]</sup>. Murali 和 Kapitaniak 等<sup>[7, 8]</sup>推广了 Corroll 和 Pecora 的工作, 提出了单向耦合同步法; Celka<sup>[9]</sup>提出了实现混沌同步的时滞反馈方法; Agiza 等<sup>[10]</sup>采用激活控制法实现 Rössler 和 Chen 系统的异结构同步; Liu 等<sup>[11]</sup>给出了一类混沌系统的线性反馈同步定理; 文献[12—15]基于系统状态观测器实现了不同非线性系统的混沌同步; Jiang 等<sup>[16]</sup>给出了两个耦合混沌系统达到全局同步的条件; Huang 等<sup>[17]</sup>利用非线性控制器使两个相同或不同的混沌系统达到了同步. 其中, 非线性控制是使两个相同或不同的混沌系统达到同步的一种有效的方法, 但是以往这个方法总是假设同步误差系统的 Lyapunov 函数为  $V(e) = 1/2e^T e$ . 为了克服这一局限性, 作者在上述研究基础上, 基于 Lyapunov 稳定性理论, 设计了非线性控制器, 改进了文献[16, 17]的同步误差系统的 Lyapunov 函数形式, 实现了超混沌 Chen 系统的自同步和超混沌 Chen 系统与超混沌 Rössler 系统的异结构同步. 数值模拟验证了所提出方案的有效性.

## 2. 超混沌 Chen 系统描述

超混沌系统的一般定义如下: 具有四维或四维以上的微分方程系统, 并且至少有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数. 2004 年, Li 等<sup>[18]</sup>通过设计非线性状态反馈控制器从 Chen 系统<sup>[19]</sup>中得到了超混沌系统, 并对其动力学行为进行了研究. 超混沌 Chen 系统用如下方程来描述:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) + w, \\ \dot{y} &= dx - xz + cy, \\ \dot{z} &= xy - bz, \\ \dot{w} &= yz + rw. \end{aligned} \quad (1)$$

系统(1)中  $x, y, z$  和  $w$  为系统的状态变量,  $a, b, c, d$  和  $r$  为系统的控制参数. 当参数  $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$  和  $0 \leq r \leq 0.085$  时, 系统(1)表现为混沌运动. 当  $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$  和  $0.085 \leq r \leq 0.798$  时, 系统(1)表现为超混沌运动. 当  $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$  和  $0.798 \leq r \leq 0.90$  时, 系统(1)表现为周期性运动<sup>[20]</sup>.

本文研究的是超混沌 Chen 系统, 即选取系统(1)的参数  $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$  和  $0.085 \leq r \leq 0.798$ . 当  $a = 35, b = 3, c = 12, d = 7$  和  $r = 0.6$  时, 图 1 给出了超混沌 Chen 系统吸引子的投影. 通过计算得到, 此时系统(1)只有一个平衡点  $(0, 0, 0, 0)$ . 根据

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60573172)和辽宁省高等学校科学技术研究计划(批准号: 20040081)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xjwu1980@tom.com

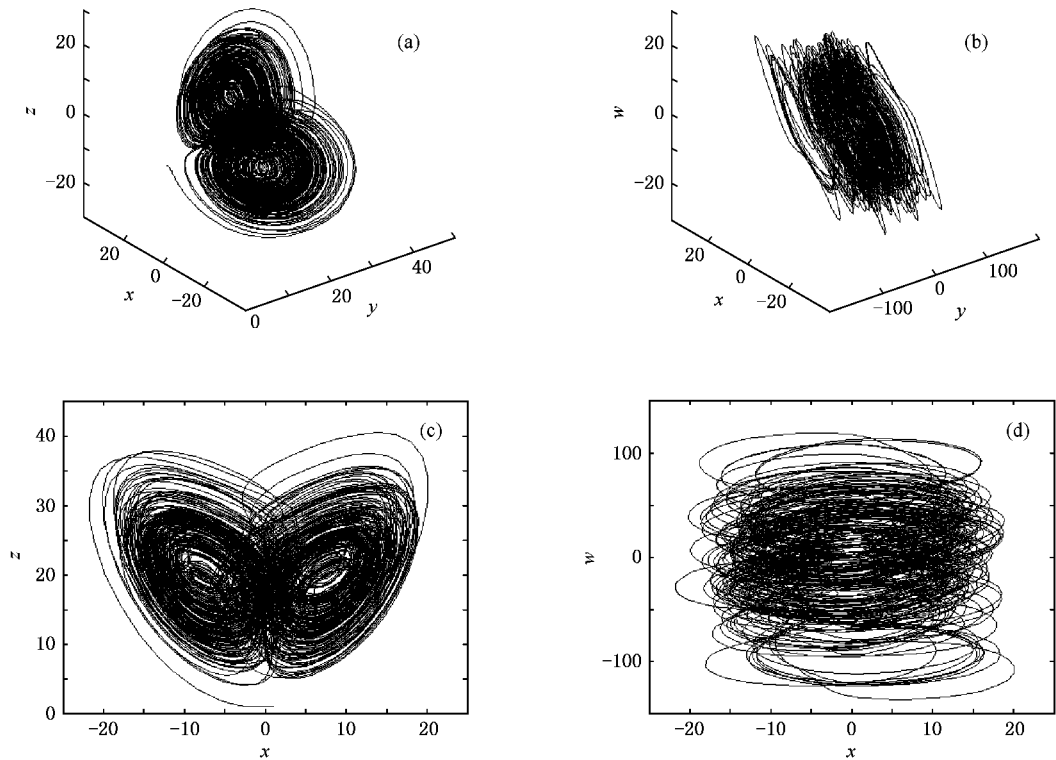


图1 系统1的超混沌吸引子在空间和平面上的投影 (a)在空间 $(x, y, z)$ 上的超混沌吸引子 (b)在空间 $(x, y, w)$ 上的超混沌吸引子, (c)在平面 $(x, z)$ 上的超混沌吸引子 (d)在平面 $(x, w)$ 上的超混沌吸引子

Ramasubramanian等<sup>[21]</sup>计算微分方程组 Lyapunov 指数谱的方法,计算出系统1)有两个正的 Lyapunov 指数,分别为  $\lambda_1 = 0.567$ ,  $\lambda_2 = 0.126$ .

当  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 12$ ,  $d = 7$  和  $0.085 < r \leq 0.798$  时,系统1)流的微分为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_4}{\partial w} \\ &= c - (a + b) + r \\ &= r - 26 < 0. \end{aligned}$$

这里  $F = (F_1, F_2, F_3, F_4) = (a(y - x) + w, dx - xz + cy, xy - bz, yz + rw)$ . 可见系统1)是受迫耗散系统. 故  $\forall t \geq 0, \exists x(t), y(t), z(t)$  和  $w(t)$  全局有界并且连续可微. 因此,  $\forall t \geq 0$ , 存在常数  $\xi > 0$ , 使  $|x(t)| \leq \xi < \infty, |y(t)| \leq \xi < \infty, |z(t)| \leq \xi < \infty$  和  $|w(t)| \leq \xi < \infty$  成立.

### 3. 非线性控制器的设计

本文研究的是如下一类混沌系统:

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad (2)$$

式中  $x \in R^n$  是状态变量,  $A \in R^{n \times n}$  是系数矩阵,  $f(x)$  是非线性连续函数. 若将系统(2)作为驱动系

统,令  $U \in R^n$  为外部输入控制向量,则响应系统可表示为

$$\dot{\tilde{x}} = B\tilde{x} + g(\tilde{x}) + U, \quad (3)$$

式中  $\tilde{x} \in R^n$  是响应系统的状态变量,  $B \in R^{n \times n}$  是响应系统的系数矩阵,  $g(\tilde{x})$  是非线性连续函数. 如果  $A = B$  且  $f(x) = g(x)$ , 则  $x$  和  $\tilde{x}$  是两个相同的混沌系统的状态变量. 若  $A \neq B$  或  $f(x) \neq g(x)$ , 则  $x$  和  $\tilde{x}$  是两个不同的混沌系统的状态变量.

若令误差向量  $e = \tilde{x} - x$ , 则误差系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\tilde{x}} - \dot{x} \\ &= B\tilde{x} - Ax + g(\tilde{x}) - f(x) + U. \end{aligned} \quad (4)$$

要使驱动系统(2)与响应系统(3)达到同步, 须使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0,$$

也就是设计合适的控制器  $U$ , 使误差系统(4)在平衡点(原点)渐近稳定.

如果我们选取 Lyapunov 函数  $V(e) = e^T P e$  ( $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)^T$ ,  $P$  为正定矩阵), 则有  $V(e) > 0$ . 若  $\dot{V}(e) = -e^T Q e$  ( $Q$  为正定矩阵), 则可推出  $\dot{V}(e) < 0$ . 这表明此时误差系统全局渐近稳定, 即驱动系统与响应系统达到了同步. 如何设计合适的控制器

$U$ , 以满足上述假设, 成为拟解决的关键问题.

## 4. 超混沌系统混沌同步

### 4.1. 自同步

设驱动系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(y_1 - x_1) + w_1, \\ \dot{y}_1 &= dx_1 - x_1 z_1 + cy_1, \\ \dot{z}_1 &= x_1 y_1 - bz_1, \\ \dot{w}_1 &= y_1 z_1 + rw_1, \end{aligned} \quad (5)$$

响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= a(y_2 - x_2) + w_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= dx_2 - x_2 z_2 + cy_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 &= x_2 y_2 - bz_2 + u_3, \\ \dot{w}_2 &= y_2 z_2 + rw_2 + u_4. \end{aligned} \quad (6)$$

这里,  $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  为控制向量. 在  $U$  的控制下可使得驱动系统(5)与响应系统(6)达到全局渐近自同步. 若令误差变量

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2 - x_1, \\ e_2 &= y_2 - y_1, \\ e_3 &= z_2 - z_1, \\ e_4 &= w_2 - w_1, \end{aligned}$$

则可得到误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= a(e_2 - e_1) + e_4 + u_1, \\ \dot{e}_2 &= de_1 + ce_2 - z_1 e_1 - x_1 e_3 - e_1 e_3 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= -be_3 + x_1 e_2 + y_1 e_1 + e_1 e_2 + u_3, \\ \dot{e}_4 &= re_4 + y_1 e_3 + z_1 e_2 + e_2 e_3 + u_4. \end{aligned} \quad (7)$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V(e) = e^T P e, \quad (8)$$

式中

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

显然  $V(e) > 0$ , 为了使得  $\dot{V}(e) < 0$ , 设计控制器为

$$\begin{aligned} u_1 &= -e_4, \\ u_2 &= -2de_1 - (c+1)e_2 + z_1 e_1 + x_1 e_3, \\ u_3 &= -x_1 e_2 - y_1 e_1, \\ u_4 &= -e_4 - e_2 e_3 - y_1 e_3 - z_1 e_2. \end{aligned} \quad (9)$$

对(8)式求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= -70e_1^2 - 10e_2^2 - 30e_3^2 - 1.6e_4^2 \\ &= -e^T Q e, \end{aligned}$$

式中

$$Q = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix}.$$

显然  $Q$  是正定矩阵, 故有  $\dot{V}(e) < 0$ . 根据 Lyapunov 稳定性理论, 误差系统(7)在原点渐近稳定, 即驱动系统(5)和响应系统(6)可达到同步.

### 4.2. 异结构同步

设系统(5)为驱动系统, 响应系统为超混沌 Rössler 系统<sup>[22]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -y_2 - w_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= x_2 + 0.25y_2 + z_2 + u_2, \\ \dot{z}_2 &= 0.05z_2 - 0.5w_2 + u_3, \\ \dot{w}_2 &= x_2 w_2 + 3 + u_4. \end{aligned} \quad (10)$$

令误差变量

$$\begin{aligned} e_1 &= x_2 - x_1, \\ e_2 &= y_2 - y_1, \\ e_3 &= z_2 - z_1, \\ e_4 &= w_2 - w_1, \end{aligned}$$

则可得到误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= -e_2 - e_4 + ax_1 - (a+1)y_1 \\ &\quad - 2w_1 + u_1, \\ \dot{e}_2 &= e_1 + 0.25e_2 + e_3 - (d-1)x_1 \\ &\quad - (c-0.25)y_1 + z_1 + x_1 z_1 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= 0.05e_3 - 0.5e_4 + (b+0.05)z_1 \\ &\quad - 0.5w_1 + x_1 y_1 + u_3, \\ \dot{e}_4 &= e_1 e_4 + w_1 e_1 + x_1 e_4 + x_1 w_1 \\ &\quad - y_1 z_1 - rw_1 + 3 + u_4. \end{aligned} \quad (11)$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V(e) = e^T P e, \quad (12)$$

式中

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然  $V(e) > 0$ , 为了使得  $\dot{V}(e) < 0$ , 设计控制器为

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -e_1 - ax_1 + (a+1)y_1 + 2w_1, \\
 u_2 &= -e_2 - e_3 + (d-1)x_1 \\
 &\quad + (c-0.25)y_1 - z_1 - x_1z_1, \\
 u_3 &= -0.05e_3 + 0.5e_4 - (b+0.05)z_1 \quad (13) \\
 &\quad + 0.5w_1 - x_1y_1, \\
 u_4 &= -e_4 + e_1 - e_1e_4 - w_1e_1 - x_1e_4 \\
 &\quad - x_1w_1 + y_1z_1 + rw_1 - 3.
 \end{aligned}$$

对(12)式求导,可得

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\mathbf{e}) &= \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P}\mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{e}} \\
 &= -2e_1^2 - 1.5e_2^2 - e_3^2 - e_4^2 \\
 &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q}\mathbf{e},
 \end{aligned}$$

式中

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然  $\mathbf{Q}$  是正定矩阵,故有  $\dot{V}(\mathbf{e}) < 0$ . 根据 Lyapunov 稳定性理论,误差系统(11)在原点渐近稳定,即驱动

系统(5)和响应系统(10)可达到同步.

## 5. 数值模拟

### 5.1. 自同步数值模拟

采用 ODE45 算法求解方程(7),利用控制器(9)式,作者模拟了驱动系统(5)与响应系统(6)的自同步过程(如图2所示).驱动系统(5)与响应系统(6)的初始点分别选取为  $x_1(0)=1, y_1(0)=-1, z_1(0)=1$  和  $w_1(0)=0; x_2(0)=3, y_2(0)=-2, z_2(0)=0$  和  $w_2(0)=1$ . 因此误差系统(7)的初始值为  $e_1(0)=2, e_2(0)=-1, e_3(0)=-1$  和  $e_4(0)=1$ . 为使驱动系统(5)处于超混沌状态,选取参数  $a=35, b=3, c=12, d=7$  和  $r=0.6$ . 由误差效果图可看到,当  $t$  分别接近 0.3, 0.3, 0.5 和 2.2 s 时,误差  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  和  $e_4(t)$  已分别稳定在零点,即驱动系统(5)与响应系统(6)达到了同步.

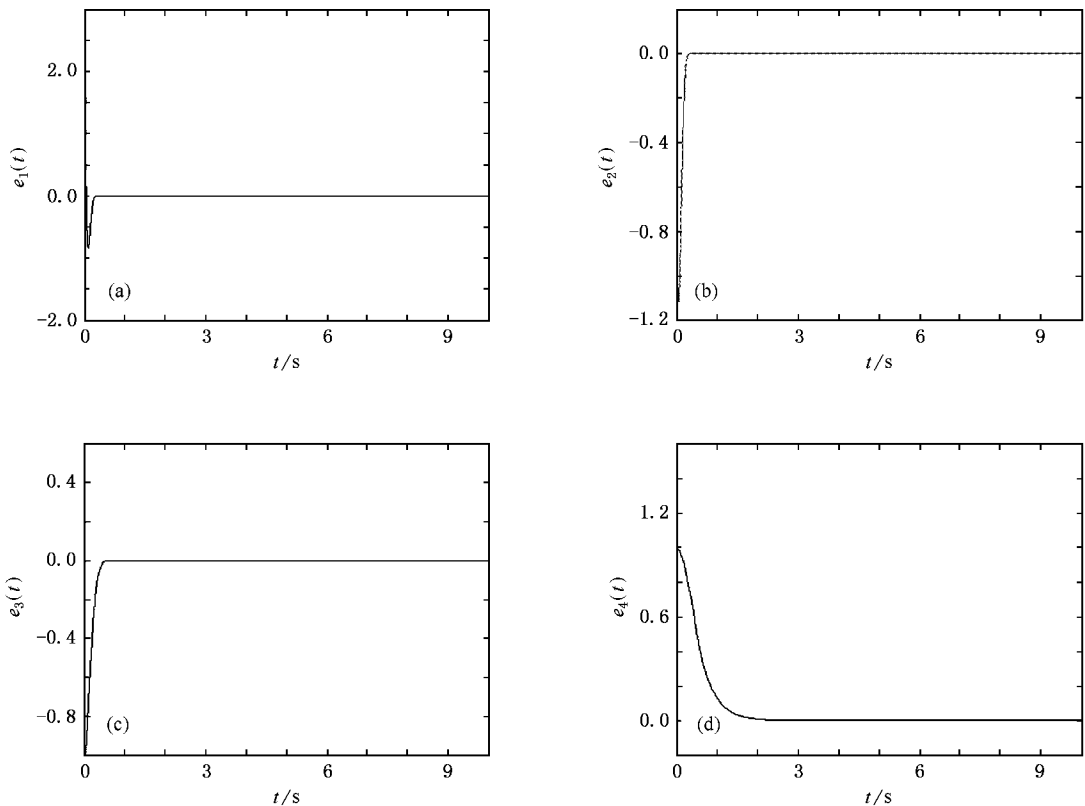


图2 控制器(9)式的作用下系统(5)和(6)的同步误差曲线 (a)  $e_1(t)$  随时间  $t$  的变化曲线 (b)  $e_2(t)$  随时间  $t$  的变化曲线 (c)  $e_3(t)$  随时间  $t$  的变化曲线 (d)  $e_4(t)$  随时间  $t$  的变化曲线

### 5.2. 异结构同步数值模拟

采用 ODE45 算法求解方程(11),利用控制器(13),作者模拟了驱动系统(5)与响应系统(10)的异结构同步过程(如图3所示).驱动系统(5)与响应系统(10)的初始点分别选取为  $x_1(0)=1, y_1(0)=-2, z_1(0)=0$  和  $w_1(0)=0; x_2(0)=-20, y_2(0)=0,$

$z_2(0)=10$  和  $w_2(0)=0$ .因此误差系统(11)的初始值为  $e_1(0)=-21, e_2(0)=2, e_3(0)=10$  和  $e_4(0)=0$ .为使驱动系统(5)处于超混沌状态,选取参数  $a=35, b=3, c=12, d=7$  和  $r=0.6$ .由误差效果图可看到,当  $t$  分别接近 5.5, 6, 12 和 7 s 时,误差  $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$  和  $e_4(t)$  已分别稳定在零点,即驱动系统(5)与响应系统(10)达到了同步.

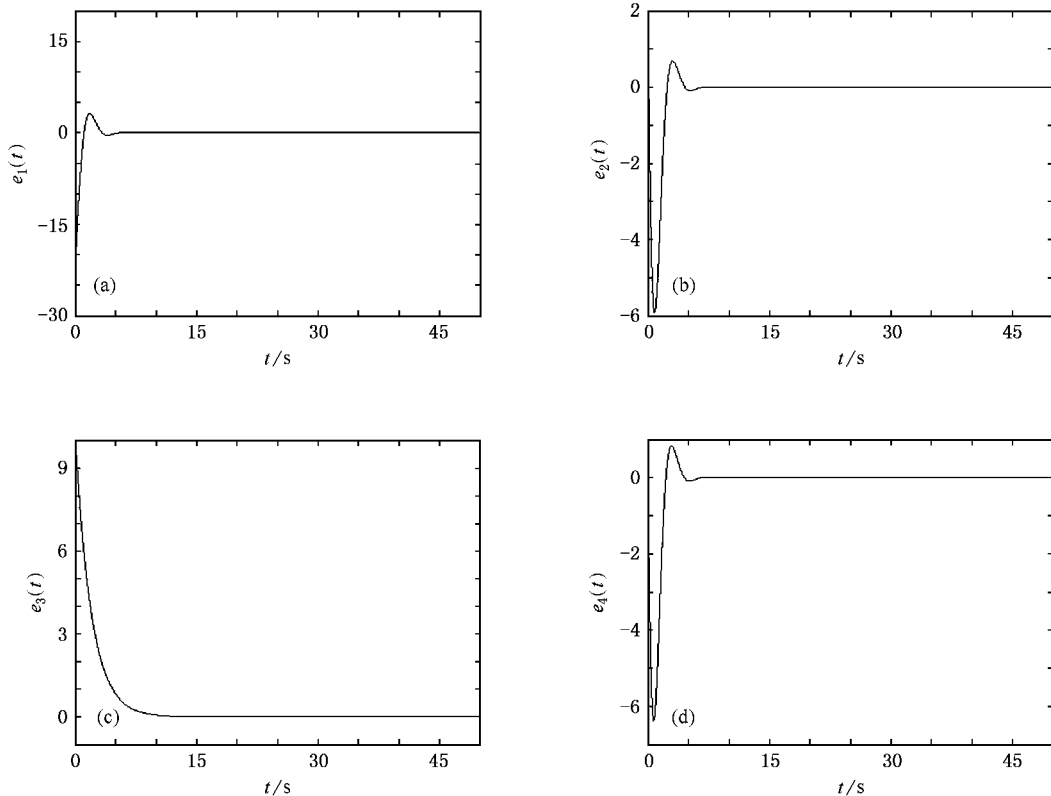


图3 控制器(13)式的作用下系统(5)和(10)的同步误差曲线 (a)  $e_1(t)$  随时间  $t$  的变化曲线 (b)  $e_2(t)$  随时间  $t$  的变化曲线 (c)  $e_3(t)$  随时间  $t$  的变化曲线 (d)  $e_4(t)$  随时间  $t$  的变化曲线

## 6. 结 论

非线性控制是使两个相同或不同的混沌系统达到同步的一种有效方法,但以往这个方法总是假设同步误差系统的 Lyapunov 函数为  $V(e) = 1/2 e^T e$ ,

为了克服这一局限性,本文基于 Lyapunov 稳定性理论,设计了非线性控制器,研究了超混沌 Chen 系统的混沌同步问题.理论证明了超混沌 Chen 系统的自同步和超混沌 Chen 系统与超混沌 Rössler 系统的异结构全局同步.数值模拟进一步证明了作者提出方案的有效性.

[1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821  
 [2] Carroll T L, Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **38** 453  
 [3] Chen G, Dong X 1998 *From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications* (Singapore: World Scientific) Chap 1

[4] Wang G R, Yu X L, Chen S G 2001 *Chaotic Control, Synchronization and Utilizing* (Beijing: National Defence Industry Press) Chap 7 (in Chinese) [王光瑞、于熙龄、陈式刚 2001 混沌的控制、同步与利用(北京:国防工业出版社)第7章]

- [ 5 ] Liu F C , Wang J , Shi M *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2707 ( in Chinese ) [ 刘福才、王 娟、石 淼等 2002 物理学报 **51** 2707 ]
- [ 6 ] Wang X Y , Wu X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 605 ( in Chinese ) [ 王兴元、武相军 2006 物理学报 **55** 605 ]
- [ 7 ] Murali K , Lakshmanan M 1996 *Chaos in Nonlinear Oscillators Controlling and Synchronization* ( Singapore : World Scientific ) Chap 1
- [ 8 ] Kapitaniak T 1996 *Controlling Chaos : Theoretical and Practical Methods in Nonlinear Dynamics* ( London : Academic Press ) Chap 1
- [ 9 ] Celka P 1996 *Physica D* **90** 235
- [ 10 ] Agiza H N , Yassen M T 2000 *Phys. Lett. A* **278** 191
- [ 11 ] Liu F , Ren Y , Shan X M *et al* 2002 *Chaos Solitons Fract.* **13** 723
- [ 12 ] Morgul Ö , Solak E 1996 *Phys. Rev. E* **54** 4803
- [ 13 ] Grassi G , Mascolo S 1997 *IEEE Trans. Circuits Syst. I : Fundam. Theory Appl.* **44** 1011
- [ 14 ] Huijberts H , Lilge T , Nijmeijer H 2001 *Int. J. Bifur. Chaos* **11** 1997
- [ 15 ] Feki M , Robert B 2003 *Chaos Solitons Fract.* **15** 831
- [ 16 ] Jiang G P , Tang K S , Chen G 2003 *Chaos Solitons Fract.* **15** 925
- [ 17 ] Huang L L , Feng R P , Wang M 2004 *Phys. Lett. A* **320** 271
- [ 18 ] Li Y X , Tang W K S , Chen G R 2005 *Int. J. Bifur. Chaos* **15** 3367
- [ 19 ] Chen G R , Lü J H 2003 *Dynamical Analyses , Control and Synchronization of the Lorenz System Family* ( Beijing : Science Press ) Chap 2 ( in Chinese ) [ 陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步(北京 科学出版社)第 2 章 ]
- [ 20 ] Yan Z Y 2005 *Appl. Math. Comput.* **168** 1239
- [ 21 ] Ramasubramanian K , Sriram M S 2000 *Physica D* **139** 72
- [ 22 ] Rössler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155

## Chaos synchronization of the new hyperchaotic Chen system via nonlinear control<sup>\*</sup>

Wu Xiang-Jun<sup>1,2)†</sup> Wang Xing-Yuan<sup>1)</sup>

1) *School of Electronic and Information Engineering , Dalian University of Technology , Dalian 116024 , China*

2) *Computing Center , Henan University , Kaifeng 475001 , China*

( Received 17 April 2006 ; revised manuscript received 2 May 2006 )

### Abstract

This paper studies chaos synchronization of the new hyperchaotic Chen system via nonlinear control. A new method for improving the Lyapunov function of error dynamics of synchronization designed by Jiang and Huang *et al* is presented. The method removes the limitation occasioned by the Lyapunov function having only one form. Based on Lyapunov theory , a nonlinear controller is designed to synchronize two identical systems and two different chaotic systems. Chaos synchronization of two identical hyperchaotic Chen systems and two different chaotic systems ( the hyperchaotic Chen system and the hyperchaotic Rössler system ) have been proved theoretically. Numerical simulations show the effectiveness of the proposed method.

**Keywords :** hyperchaotic Chen system , synchronization of two identical chaotic systems , synchronization of two different chaotic systems , nonlinear controller

**PACC :** 0545 , 0555

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60573172 ) and the Science and Technology Research Program of Institution of Higher Education of Liaoning Province , China ( Grant No. 20040081 ).

<sup>†</sup> E-mail : xjwu1980@tom.com