

# 频率分辨光学开关法行迹相位还原的时频分析<sup>\*</sup>

邓玉强<sup>1)†</sup> 王清月<sup>2)</sup> 张志刚<sup>2)‡</sup>

1) 中国计量科学研究院光学与激光计量科学研究所, 北京 100013)

2) 天津大学精密仪器与光电子工程学院, 天津 300072)

3) 北京大学信息科学与技术学院, 北京 100871)

(2006 年 4 月 27 日收到, 2006 年 7 月 27 日收到修改稿)

将小波变换分析光谱相位相干原理应用于频率分辨光学开关(FROG)行迹图的时间-频率分析, 不需要传统的迭代算法, 从对 FROG 行迹的脊的分析中, 直接得到超短脉冲的相位. 对于 FROG 行迹的脊变化平缓的脉冲得到了精确的相位.

关键词: 超短脉冲, 相位重建

PACC: 4280W, 0760L

## 1. 引 言

频率分辨光学开关(FROG)法<sup>[1-3]</sup>和光谱相位相干直接电场重建(SPIDER)法<sup>[4,5]</sup>是目前最为常用的两种飞秒脉冲相位测量方法. FROG 法具有直观的优点, 可以从 FROG 行迹图中直观地判断脉冲啁啾情况<sup>[1-3]</sup>, 然而其相位还原过程需要迭代的算法才能找到近似解, 消耗时间较长, 不利于脉冲相位的实时测量. 相比之下, SPIDER 法没有需要移动的部件, 也不需要迭代的算法, 计算简单, 在极短的时间内就可以得到精确解<sup>[6]</sup>. 我们引入小波变换还原 SPIDER 光谱相位<sup>[7-10]</sup>, 消除了传统 Fourier 变换方法因为滤波窗口引入的不确定性, 同时还得到了和 FROG 行迹类似的 SPIDER 行迹, 可以从直观地判断脉冲的光谱相位情况.

FROG 方法和小波变换还原 SPIDER 光谱相位都可以产生一个二维的时间-频率分布图, 这里分别称为“FROG 行迹”和“SPIDER 行迹”. 它们的区别在于 FROG 行迹反映的是飞秒脉冲时域电场振荡的时间-频率分布, 而 SPIDER 行迹反映的是飞秒脉冲光谱剪切干涉的时间-频率分布信息. 引入小波变换方法, SPIDER 的光谱相位差可以从 SPIDER 行迹中直接读取. 本文研究 FROG 脉冲时域相位的直接还原,

即根据小波变换识别相位的原理, 通过对 FROG 行迹的时间-频率分析, 从 FROG 行迹中直接提取脉冲的时域相位, 而不需要迭代的算法.

## 2. FROG 行迹的数学意义

对于任意一个光脉冲, 其时域电场振荡表达式为

$$E(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (1)$$

式中  $\omega_0$  为中心波长  $\lambda_0$  对应的角频率, 称为中心角频率;  $\varphi(t)$  为光脉冲的时域相位, 是随时间变化的量, 反映脉冲的啁啾信息. 相位  $\varphi(t)$  和角频率  $\omega(t)$  的关系为

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (2)$$

将(1)式改写为如下形式:

$$E(t) = A(t) \cos(\Omega(t)t), \quad (3)$$

其中

$$\Omega(t) = \omega_0 + \omega(t). \quad (4)$$

(3)式中的  $\Omega(t)$  反映的是光脉冲的电场振荡频率随时间变化的信息.

如果脉冲有啁啾, 其振荡周期是不等距的, 也就是角频率  $\omega$  是时间  $t$  的函数, 即  $\omega = \omega(t)$ .

小波变换是一种加窗的 Fourier 变换, 窗口是可

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60178007) 国家自然科学基金重大项目(批准号: 60490280) 国家重点基础研究发展规划(批准号: G1999075201-2) 和中国计量科学研究院博士科研专项启动基金(批准号: TGQD05-12) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yqdeng@nim.ac.cn

调的,可以识别局域电场振荡频率,反映的是电场振荡频率随时间变化的情况,即脉冲的啁啾信息.对(3)式作小波变换,可以得到脉冲电场振荡二维的时间-频率分布.因为电场振荡信号的局域最大频率信息反映在小波变换的脊上,所以小波变换的脊就是 $\Omega(t)$ .

FROG 方法测量的也是脉冲二维的时间-频率信息.从数学上看,偏振开关 FROG(PG-FROG)法就是光脉冲电场振荡的加窗 Fourier 变换,PG-FROG 的窗函数就是脉冲本身的强度包络.FROG 行迹图反映的是脉冲的时间-频率分布,不同时间的脉冲振荡周期反映在 FROG 行迹图的每一时间列的极大值处,这里称为 FROG 行迹的“脊”,FROG 行迹的脊也是 $\Omega(t)$ .从 FROG 行迹中读出 $\Omega(t)$ ,就可以求出脉冲相位

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= \int \Omega(t) dt = \int (\omega_0 + \alpha(t)) dt \\ &= \omega_0 t + \int \alpha(t) dt \\ &= \omega_0 t + \int \frac{d\varphi(t)}{dt} dt \\ &= \omega_0 t + \varphi(t),\end{aligned}\quad (5)$$

从而有

$$\varphi(t) = \Phi(t) - \omega_0 t, \quad (6)$$

式中 $\omega_0$ 为中心角频率.

由(5)(6)式可知,对于任意 FROG 行迹,用 FROG 的脊线 $\Omega(t)$ 减去中心波长 $\lambda_0$ 对应的中心角频率 $\omega_0$ ,在时域 $t$ 上积分,就得到了时域脉冲相位 $\varphi(t)$ .

### 3. 时频分析还原 FROG 行迹脉冲相位

下面用模拟的 FROG 行迹说明脉冲相位的直接提取过程.假设脉冲为高斯型,其半高宽为 20 fs,中心波长为 800 nm.脉冲时域相位表示为

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \phi'' t^2 + \phi''' t^3 + \phi^{(4)} t^4, \quad (7)$$

式中 $\omega_0 = 375 \times 2\pi \times 10^{12}$  rad/s.

对含有各阶啁啾的脉冲作模拟相位还原验证.假设时域脉冲分别为变换极限脉冲、线性啁啾脉冲、二次啁啾脉冲和三次啁啾脉冲.

首先,假设一个变换极限脉冲(7)式中取 $\phi'' = \phi''' = \phi^{(4)} = 0$ .脉冲和它的 PG-FROG 行迹如图 1 所示.

由图 1(b)可见,在 PG-FROG 行迹中,探测每一时间点的频率极大值,极大值的频率坐标就是所探

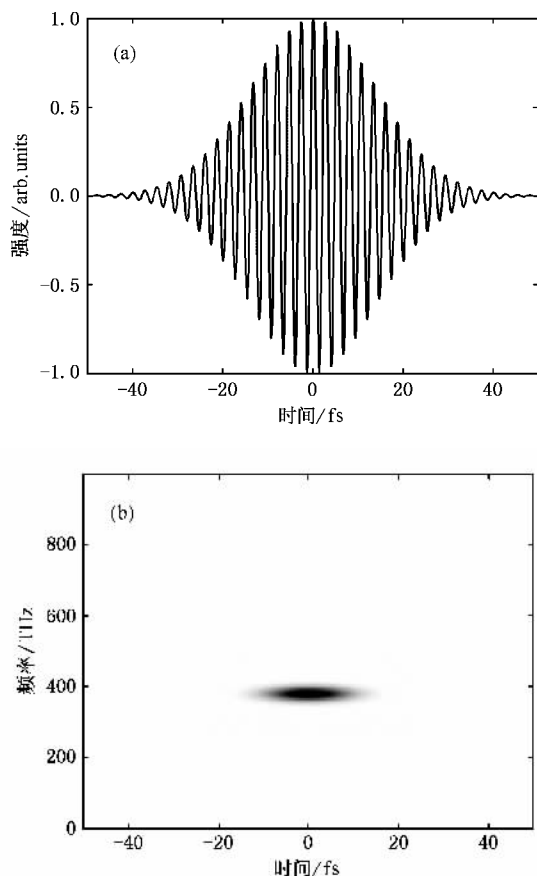


图 1 变换极限脉冲及其 PG-FROG 行迹 (a)变换极限脉冲, (b)变换极限脉冲的 PG-FROG 行迹

测点的局域频率 $\Omega(t)$ .局域频率 $\Omega(t)$ 减去中心角频率 $\omega_0$ 后得到 $\alpha(t)$ ,如图 2(a)所示.按(5)式对 $\alpha(t)$ 进行积分,就可以得到脉冲时域相位 $\varphi(t)$ ,如图 2(b)所示.

由图 2(b)可以看出,脉冲相位与模拟给定的变换极限脉冲相位一致,说明 FROG 行迹的时频分析方法可以还原变换极限脉冲的相位,并可以得到准确的结果.下面再用这种方法还原具有线性啁啾脉冲的时域相位.

假设脉冲有线性负啁啾: $\phi'' = -2 \times 10^{-2}$  fs<sup>2</sup>, $\phi''' = \phi^{(4)} = 0$ ,按照以上所述的相位求解过程,求解的结果如图 3(a)所示,图中实线为模拟给定的相位,虚线为时频分析方法求解的相位.设脉冲具有线性正啁啾: $\phi'' = 2 \times 10^{-2}$  fs<sup>2</sup>, $\phi''' = \phi^{(4)} = 0$ ,其相位求解结果如图 3(b)所示.

图 3 为时频分析法求解线性啁啾脉冲得到的相位.从图 3 可以看出,对于线性啁啾脉冲,时频分析方法仍然得到了精确的相位结果,求解的相位与给定的相位能够精确相符.

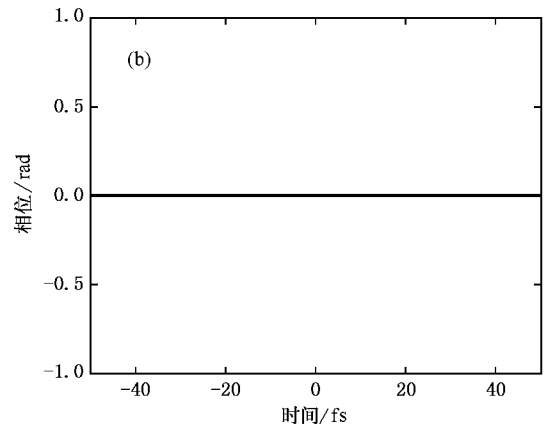
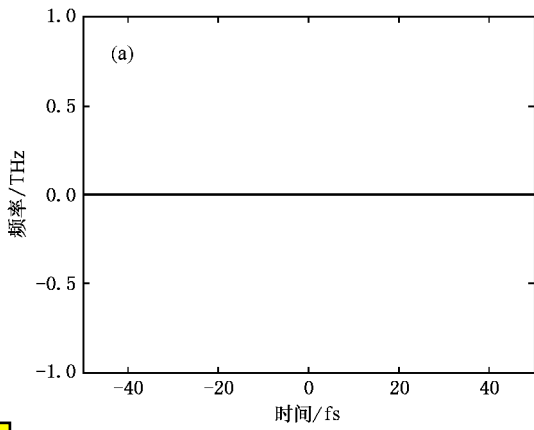


图 2 脉冲的局域频率和求得的相位 (a)脉冲的局域频率 (b)积分局域频率求得的相位

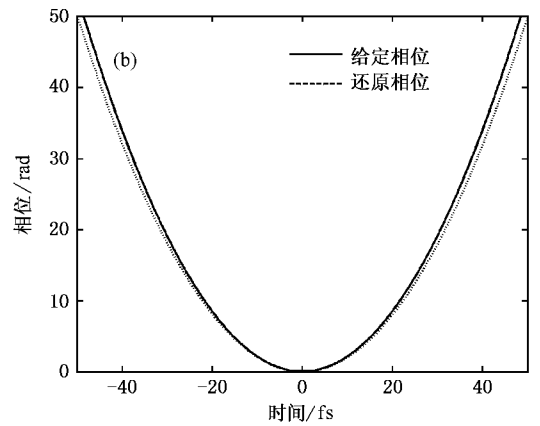
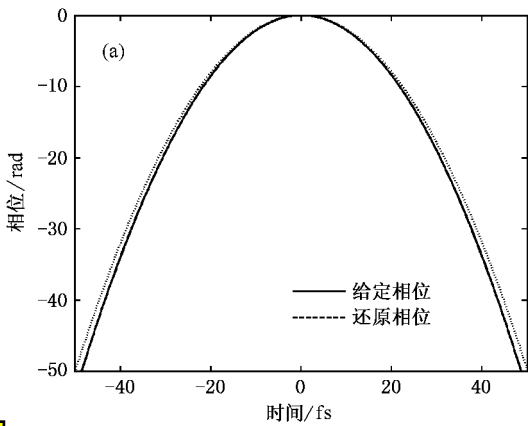


图 3 时频分析法求解线性啁啾脉冲的相位 (a)线性负啁啾脉冲 (b)线性正啁啾脉冲

再假设脉冲具有负二次啁啾和正二次啁啾： $\phi'' = -6 \times 10^{-4} \text{ fs}^{-2}$ ,  $\phi''' = \phi^{(4)} = 0$  和  $\phi''' = 6 \times 10^{-4} \text{ fs}^{-2}$ ,  $\phi'' =$

$= \phi^{(4)} = 0$  相位求解结果如图 4 所示.

图 4 为时频分析法求解二次啁啾脉冲的相位.

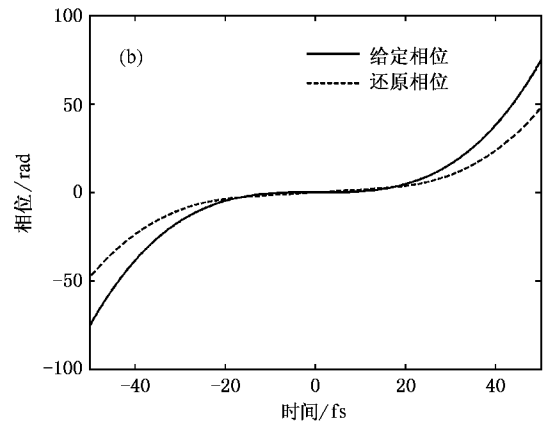
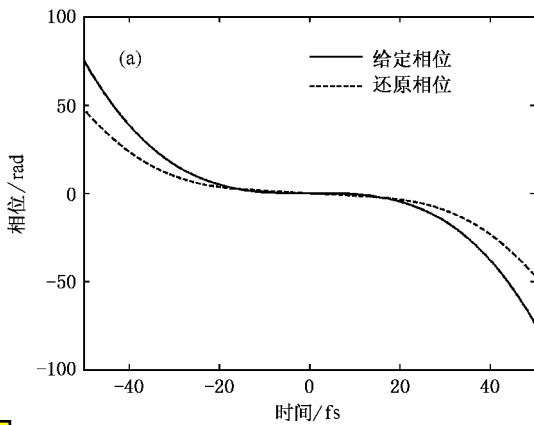


图 4 时频分析法求解二次啁啾脉冲的相位 (a)负二次啁啾脉冲 (b)正二次啁啾脉冲

由图 4 可以看出,对于二次啁啾脉冲,时频分析方法在脉冲峰值附近的大部分区域,还原的相位都能与

给定的相位符合,但是在脉冲两端却产生较大误差,偏离于给定的相位值。

假设脉冲具有负三次啁啾和正三次啁啾: $\phi'' = \phi''' = 0$ ,  $\phi^{(4)} = -6 \times 10^{-6} \text{ fs}^2$  和  $\phi'' = \phi''' = 0$ ,  $\phi^{(4)} = 6 \times 10^{-6} \text{ fs}^2$ , 根据时间-频率分析方法求解的结果如图 5 所示。

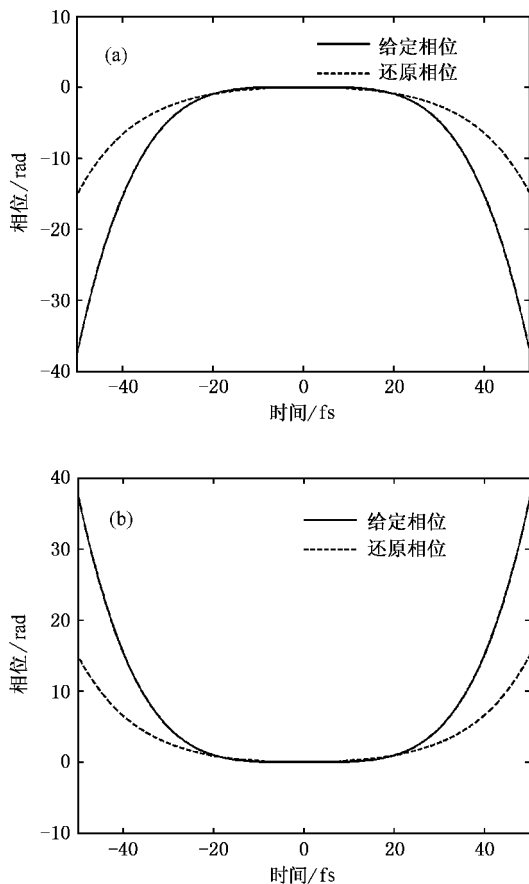


图 5 时频分析法求解三次啁啾脉冲的相位 (a)负三次啁啾脉冲 (b)正三次啁啾脉冲

图 5 为时频分析法求解三次啁啾脉冲的相位。图 5 表明,对于三次啁啾脉冲,时频分析方法还原脉冲相位也产生较大的误差,与二次啁啾脉冲时域相位还原结果类似,在脉冲峰值附近的大部分区域,还原的相位可以与给定的相位符合,而在脉冲两端偏离给定的相位值。

## 4. 分析及讨论

我们研究了不同形状因子的 Gabor 小波作为小

波母函数对于 SPIDER 光谱相位还原的影响<sup>[8]</sup>。研究表明,对于小波变换的脊变化平缓的信号,形状因子对于相位还原的影响不大,大形状因子也可以精确地还原相位信息;而对于小波脊变化较大的信号,需要小形状因子的小波函数才能精确地还原相位,大形状因子的小波函数会产生较大的相位误差<sup>[8]</sup>。

大形状因子的 Gabor 母小波函数包络较宽,在包络下存在多次振荡。本文中假设的脉冲为 20 fs,电场在包络下也存在多次振荡,与小波变换方法中的大形状因子的小波相类似。在分析变换极限脉冲和线性啁啾脉冲时,时间-频率脊较平缓,因而可以得到精确的结果。而在分析高阶啁啾脉冲时,时间-频率脊随频率变化较显著,所以还原相位的误差较大。

另一方面,FROG 的行迹与 SPIDER 行迹不同,SPIDER 行迹除了产生一个强度图外,还产生一个相位图。SPIDER 的相位图既反映局域时间-频率的变化,又反映干涉的峰谷位置。因此,即使探测脊的位置有小的偏差,也能读取精确的相位。而 FROG 只有强度图,没有相位图,因此只能从强度图中找出局域频率,通过积分局域频率而获得相位。这样,探测的局域频率的偏差就会累计到相位中,导致误差的增加。

为了进一步减小误差,期待从以下两方面来解决:一是选择具有较窄宽度的脉冲作为频率分辨光学开关法的“开关”;二是采用分辨率高的光谱仪,增加 FROG 行迹的分辨率以提高局域时间-频率脊线探测的精度。

## 5. 结 论

本文将小波变换还原 SPIDER 光谱相位的原理应用于 FROG 行迹图的分析,提出了时频分析方法从 FROG 行迹中直接提取脉冲相位。这种方法简单,且不需要迭代的过程,因而具有极快的相位还原速度。该方法对于时间-频率脊线变化平缓的脉冲得到了精确的相位还原结果,对于时间-频率脊线变化较大的脉冲,在脉冲尾部相位还原有较大的误差,但在脉冲的峰值附近的相位误差较小。该方法的研究和完善有利于 FROG 行迹的相位还原,对超短脉冲的特性评价将会产生重要影响。

- [ 1 ] Kane D J , Trebino R 1993 *Opt. Lett.* **18** 823
- [ 2 ] Kane D J , Trebino R 1993 *IEEE J. Quantum Electron.* **29** 571
- [ 3 ] Trebino R 2002 *Frequency-resolved Optical Gating : The Measurement of Ultrashort Laser Pulses* ( Boston : Kluwer Academic Publishers )
- [ 4 ] Iaconis C , Walmsley I A 1998 *Opt. Lett.* **23** 792
- [ 5 ] Iaconis C , Walmsley I A 1999 *IEEE J. Quantum Electron.* **35** 501
- [ 6 ] Shuman T M , Anderson M E , Bromage J *et al* 1999 *Opt. Express* **5** 134
- [ 7 ] Deng Y , Wu Z , Chai L *et al* 2005 *Opt. Express* **13** 2120
- [ 8 ] Deng Y , Wang C , Chai L *et al* 2005 *Appl. Phys. B* **81** 1107
- [ 9 ] Deng Y Q , Wu Z B , Chen S H *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3716 ( in Chinese ) [ 邓玉强、吴祖斌、陈盛华等 2005 物理学报 **54** 3716 ]
- [ 10 ] Deng Y Q , Zhang Z G , Chai L *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4176 ( in Chinese ) [ 邓玉强、张志刚、柴路等 2005 物理学报 **54** 4176 ]

## Time-frequency analysis for phase retrieval from traces of frequency resolved optical gating \*

Deng Yu-Qiang<sup>1 2)†</sup> Wang Qing-Yue<sup>2)</sup> Zhang Zhi-Gang<sup>2)B)</sup>

1) *Division of Metrology in Optics and Laser , National Institute of Metrology , Beijing 100013 , China*

2) *College of Precision Instruments and Optoelectronics Engineering , Tianjin University , Tianjin 300072 , China*

3) *School of Electronics Engineering and Computer Science , Peking University , Beijing 100871 , China*

( Received 27 April 2006 ; revised manuscript received 27 July 2006 )

### Abstract

Based on the theory of wavelet-transform analysis for spectral phase retrieval from spectral shearing interferogram , we extract phases from the traces of frequency resolved optical gating ( FROG ) with time-frequency analysis method . The method enables the phases to be extracted from the ridges of FROG traces directly , and requires no iterative algorithm . For the flap ridges , accurate phases can be extracted . However , for the frequency-varying ridges , the results have great error at the tails of the pulses , and the reasons for error generation are analyzed .

**Keywords :** ultrafast pulses , phase retrieval

**PACC :** 4280W , 0760L

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60178007 ) , the Major Program of the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60490280 ) , the State Key Development Program for Basic Research of China ( Grant No. G1999075201-2 ) and the Special Foundation of Starting Research for Doctor of National Institute of Metrology , China ( Grant No. TGQD05-12 ) .

† E-mail : yqdeng@nim.ac.cn