

# 简谐速度噪声及其与势场之间的频率共振<sup>\*</sup>

宋艳丽<sup>†</sup>

(天津大学理学院, 天津 300072)

(2006 年 3 月 10 日收到, 2006 年 5 月 22 日收到修改稿)

为了描述复杂的噪声环境, 考虑了一种具有频率结构的噪声——简谐速度噪声, 包括它的产生、关联函数、功率谱以及作为热噪声时的频率特性所导致的一些行为. 结果表明, 在频谱空间中简谐速度噪声是一种带通噪声, 存在一个峰值频率, 且噪声带宽由参量  $\Gamma$  控制. 当简谐势中的一个布朗粒子受热简谐速度噪声驱动时, 粒子能量极大值出现在两种频率相等的情况下. 这表明噪声和势场的频率之间存在动力学共振, 决定着粒子能量的大小.

关键词: 简谐噪声, 简谐速度噪声, 功率谱, 频率共振

PACC: 4350, 7270, 8670J

## 1. 引言

近年来, 利用随机动力学理论来研究细胞的各种功能、分析噪声的性质以及它对各类宏观系统的影响, 已取得了很多的成果, 包括分子马达理论<sup>[1]</sup>、神经元理论<sup>[2]</sup>、离子通道理论等等. 对这些问题的研究使我们能够在分子水平上进一步了解生命过程所蕴含的物理机制, 从而更好地理解肌肉收缩、细胞内部运输、离子跨膜通道、感觉器官的兴奋系统等一系列生物现象.

每一个生命系统都是一个高度非平衡的体系. 在分子水平的小尺度上, 生物体内液体分子对研究目标的无规碰撞起着不可忽视的重要作用, 在随机理论中常将其简化为某种形式的噪声<sup>[3]</sup>. 由系统加热浴模型的研究可知, 研究目标的运动被其自身质量、外部势场和热浴(即阻尼项和噪声项)的特性三个因素所确定<sup>[4]</sup>. 目前的很多研究都利用白噪声的形式<sup>[5-7]</sup>. 白噪声的关联时间为零, 即不同时刻的随机力完全不相关. 在宏观作用时间远大于微观分子对目标的碰撞时间的情况下, 这是一种合理的近似. 另有一些研究则利用 Ornstein-Uhlenbeck(O-U)噪声<sup>[8-10]</sup>或简谐噪声(harmonic noise)<sup>[11, 12]</sup>. 根据以往的研究可知, 反映白噪声的参量只有噪声强度, 反映 O-U 噪声的则有噪声强度和关联时间, 而对于噪声

的频率特征则无法具体研究. 在频谱空间, 白噪声的谱密度与频率无关, O-U 噪声的谱密度呈单调衰减. 这样的噪声不存在非零特征频率, 我们称之为没有频率结构的噪声. 由于细胞内部环境的复杂性, 考虑有频率结构的噪声的宏观作用成为一个现实的物理问题. 基于这种考虑, 本文详细研究了一种有结构的噪声——简谐速度噪声(harmonic velocity noise), 包括它的产生、关联函数、功率谱以及作为热噪声时的频率特性所导致的一些行为.

## 2. 简谐速度噪声

### 2.1. 噪声的产生

随机理论中有一个常用的准单色噪声——简谐噪声, 它是由一个高斯型的白噪声驱动一个阻尼谐振子而生成的<sup>[12-14]</sup>. 例如, 当一个 RLC 二阶电路中有噪声的扰动作用时(如图 1), 根据基尔霍夫电压定律, 有

$$LC \frac{d^2 \epsilon(t)}{dt^2} + RC \frac{d\epsilon(t)}{dt} + \epsilon(t) = \eta(t). \quad (1)$$

(1) 式等号左端第一项为电感  $L$  上的电压, 第二项为电阻  $R$  上的电压,  $\epsilon(t)$  为电容电压, 等号右端的  $\eta(t)$  为扰动噪声. 若令

$$\Gamma = R/L,$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10547133)和天津大学青年教师基金(批准号: 5110118)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: songyanli2003@sohu.com

$$\Omega^2 = 1/(LC),$$

$$\xi(t) = \gamma(t)(LC),$$

则得到常见的噪声谐振子模型

$$\ddot{\epsilon}(t) + \Gamma\dot{\epsilon}(t) + \Omega^2\epsilon(t) = \xi(t). \quad (2)$$

当扰动噪声满足

$$\xi(t) = 0,$$

$$\xi(t)\xi(s) = 2\alpha\delta(t-s)$$

时,即  $\xi(t)$  为一高斯型白噪声,相应的电压信号  $\epsilon(t)$  就是我们常用的简谐噪声,其中  $\alpha$  为一个噪声强度参数.

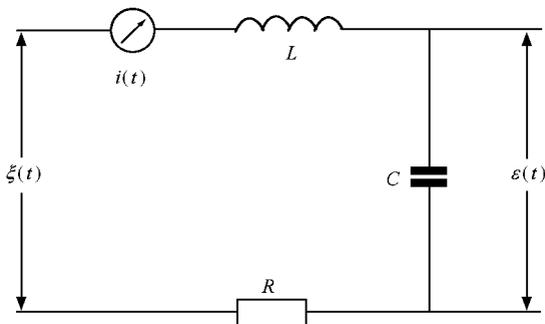


图 1 有噪声扰动的 RLC 电路

若把电路中电流信号作为一个噪声源来研究,我们发现:在频谱空间中它是一种带通噪声,存在一个由  $\Omega$  决定的峰值频率.事实上,这种形式的噪声以前未见有人考虑过.由于这种噪声对应噪声谐振子方程中的速度项,我们称之为简谐速度噪声.无论是简谐噪声,还是简谐速度噪声,都是“有结构的噪声”,即其频谱关系均呈非单调变化,存在一个峰值,

有一个特征频率,而其中简谐速度噪声的频率特征尤为显著.

我们以 RLC 电路为例引出了简谐速度噪声的形式,但这种噪声并不局限于电路问题中.比如,旋转布朗马达在跨类囊体膜(如线粒体膜、细菌的浆膜等)合成三磷酸腺苷的过程中,如果我们把膜内部分视作一个谐振子,膜内液体环境简化为一个白噪声,则转子的角位移和角速度就分别具有简谐噪声和简谐速度噪声的形式<sup>[15]</sup>.

### 2.2. 噪声的关联函数

用电流变量  $i(t)$  表示简谐速度噪声(2)式可写为

$$\dot{\epsilon}(t) = i(t), \quad (3)$$

$$i(t) = -\Gamma\dot{\epsilon}(t) - \Omega^2\epsilon(t) + \xi(t).$$

解此随机微分方程,可得

$$i(t) = a_{10}\mu_1 \exp(\mu_1 t) + a_{20}\mu_2 \exp(\mu_2 t) + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \times \int_0^{\infty} [\mu_1 \exp(\mu_1(t-t')) - \mu_2 \exp(\mu_2(t-t'))] \xi(t') dt'. \quad (4)$$

这里  $\mu_1, \mu_2$  是特征方程  $\mu^2 + \Gamma\mu + \Omega^2 = 0$  的两个根,实部为负.  $a_{10}, a_{20}$  是两个待定系数,可由初始条件  $\epsilon(0), i(0)$  确定,满足

$$\epsilon(0) = a_{10} + a_{20}, \quad (5)$$

$$i(0) = \mu_1 a_{10} + \mu_2 a_{20}.$$

由(4)式可得不同时刻的关联函数

$$i(t)i(s) = \left[ \mu_1^2 a_{10}^2 + \frac{\mu_1 \alpha}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \right] \times \exp(\mu_1(t+s)) + \left[ \mu_2^2 a_{20}^2 + \frac{\mu_2 \alpha}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \right] \exp(\mu_2(t+s)) + \left[ \mu_1 \mu_2 a_{10} a_{20} - \frac{2\mu_1 \mu_2 \alpha}{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^2} \right] (\exp(\mu_1 t + \mu_2 s) + \exp(\mu_2 t + \mu_1 s)) + \frac{\alpha}{\mu_1^2 - \mu_2^2} [-\mu_1 \exp(\mu_1 |t-s|) + \mu_2 \exp(\mu_2 |t-s|)]. \quad (6)$$

(6)式等号右端前三项为老化(aging)项,长时间后消失,最后一项为时间平移不变项,只与两个时刻的差有关.如果我们想获得稳态的噪声,则噪声的关联应满足时间平移不变性,即只有最后一项,那么必须要满足下列关系:

$$a_{10}^2 + \frac{\alpha}{\mu_1(\mu_1 - \mu_2)^2} = 0,$$

$$a_{20}^2 + \frac{\alpha}{\mu_2(\mu_1 - \mu_2)^2} = 0, \quad (7)$$

$$a_{10} a_{20} - \frac{2\alpha}{(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^2} = 0.$$

将(5)式代入(7)式,可得

$$\begin{aligned} \epsilon^2(0) &= \frac{\alpha}{\Gamma\Omega^2}, \\ i^2(0) &= \frac{\alpha}{\Gamma}, \\ \epsilon(0)\xi(0) &= 0. \end{aligned}$$

这就意味着简谐速度噪声的稳定关联函数为

$$\begin{aligned} \xi(t)\xi(s) &= \frac{\alpha}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \\ &\times [ -\mu_1 \exp(\mu_1 |t-s|) \\ &+ \mu_2 \exp(\mu_2 |t-s|) ]. \end{aligned} \quad (8)$$

白噪声的关联函数为

$$\xi(t)\xi(s) = 2D\delta(t-s),$$

描述噪声的参数只有噪声强度  $D$ ;O-U 噪声的稳态关联为<sup>[16]</sup>

$$\zeta(t)\zeta(s) = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right),$$

描述噪声的有噪声强度  $D$  和关联时间  $\tau$ ;而对于简谐噪声<sup>[14]</sup>,

$$\begin{aligned} \epsilon(t)\epsilon(s) &= \frac{D\Omega^4}{\mu_1^2 - \mu_2^2} \\ &\times \left[ \frac{1}{\mu_1} \exp(\mu_1 |t-s|) \right. \\ &\left. - \frac{1}{\mu_2} \exp(\mu_2 |t-s|) \right] \end{aligned}$$

和(8)式,噪声的形式由  $D, \Gamma, \Omega$  三个参数描述.

### 2.3. 极限情况和频谱关系

设

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}(-\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - 4\Omega^2}), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(-\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - 4\Omega^2}), \end{aligned}$$

当  $\Omega \rightarrow 0$  时,有  $\mu_1 \rightarrow 0, \mu_2 \rightarrow -\Gamma$ ,因此

$$\xi(t)\xi(s) = \frac{\alpha}{\Gamma} \exp(-\Gamma |t-s|).$$

欲使简谐速度噪声能退化到 O-U 噪声的形式,必须满足

$$\frac{\alpha}{\Gamma} = D\Gamma,$$

即  $\alpha = \Gamma^2 D$ ,此时

$$\xi(t)\xi(s) = D\Gamma \exp(-\Gamma |t-s|).$$

进而当  $\Gamma \rightarrow \infty$  时,有

$$\xi(t)\xi(s) = 2D\delta(t-s),$$

简谐速度噪声就退化为一个白噪声.

在物理现象中,谱的概念总是和频率联系在一

起的.光谱给出了各种单色光在频率域的分布,声谱给出了各种声波在频率域的分布,而功率谱则给出了振动能量在频率域上的分布.谱密度分析比时间关联函数的分析能给出更多的随机振动信息.对噪声的关联函数进行傅里叶变换,可得到噪声的功率谱.白噪声的功率谱

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) 2D\delta(t) dt = 2D \quad (9)$$

为一常数,与频率  $\omega$  无关,即为白谱.仿照光学中白光的定义,我们称关联为  $\delta$  函数的噪声为白噪声.同理, O-U 噪声的功率谱为

$$S(\omega) = \frac{2D}{1 + \tau^2\omega^2}.$$

由图 2 可以看出, O-U 噪声低频丰富,高频衰减,当  $\tau \rightarrow 0$  时可退化到白噪声形式.

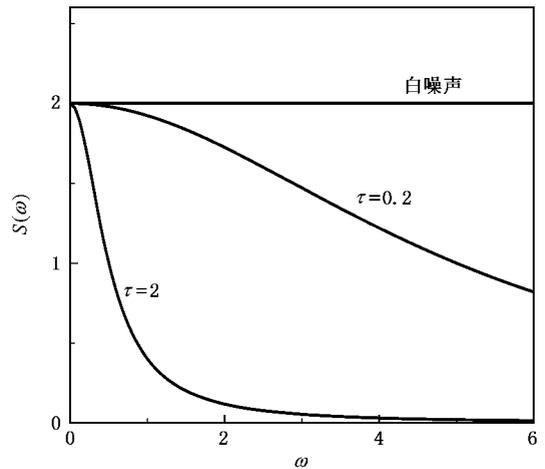


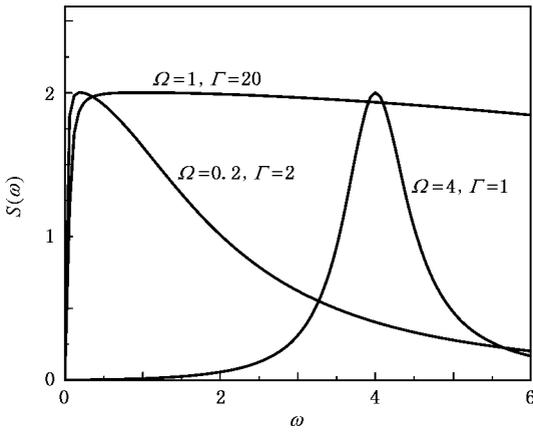
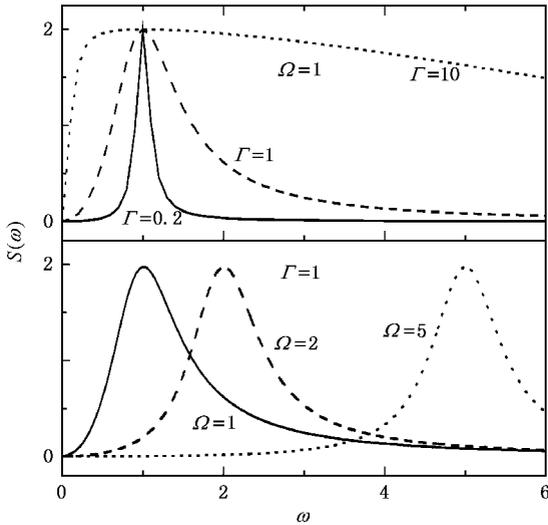
图 2 O-U 色噪声的功率谱  $D=1$

下面分析简谐速度噪声,对(8)式进行傅里叶变换并应用  $\alpha = \Gamma^2 D$ ,可得到简谐速度噪声的功率谱

$$S(\omega) = \frac{2D\Gamma^2\omega^2}{\Gamma^2\omega^2 + (\Omega^2 - \omega^2)^2}. \quad (10)$$

从图 3 可以看出,简谐速度噪声是一种“带通”噪声,它在  $\omega = 0$  处的功率谱恒为零.当  $\Omega \rightarrow 0$  时,简谐速度噪声接近 O-U 噪声形式;当  $\Omega \rightarrow 0, \Gamma \rightarrow \infty$  时,简谐速度噪声又可退化为白噪声.相比较很多文献称简谐噪声为准单色噪声(quasimonochromatic noise)<sup>[11,13]</sup>,我们的简谐速度噪声是一种“单色噪声”,其频域带宽取决于阻尼参数  $\Gamma$ ,而峰值频率则由频率参数  $\Omega$  决定.在图 4 中我们分别给出简谐速度噪声的功率谱随参量  $\Gamma$  和  $\Omega$  的变化规律.

根据功率等效原则<sup>[17]</sup>,当简谐速度噪声功率谱的中心频率为  $\omega_m$  时,噪声的带宽为

图3 不同  $\Omega, \Gamma$  所对应的简谐速度噪声功率谱  $D=1$ 图4  $\Omega, \Gamma$  对简谐速度噪声功率谱的影响  $D=1$ 

$$\Delta\omega = \frac{1}{S(\omega_m)} \int_0^\infty S(\omega) d\omega. \quad (11)$$

对于简谐速度噪声, 我们根据

$$\left. \frac{\partial}{\partial \omega} S(\omega) \right|_{\omega_m} = 0$$

解析得到了中心频率

$$\omega_m = \Omega$$

和噪声带宽

$$\Delta\omega = \frac{\Gamma\pi}{2}.$$

这正是图4所描述的结果。

### 3. 热简谐速度噪声与简谐势的频率共振

为了说明噪声频率对随机系统的作用, 我们以简谐势为例来分析噪声频率和势场频率之间相互作用

对粒子能量的影响. 简谐势是描述微观物质结构和物质运动的一种重要物理模型, 且简谐势中由热白噪声驱动的布朗粒子是一个精确可解的问题<sup>[18]</sup>. 若换作非对称周期势, 粒子的能量影响着定向粒子流的大小<sup>[11]</sup>, 若为亚稳态势, 粒子的能量则影响着其亚稳态的寿命<sup>[11, 43]</sup>. 我们考虑一个质量为  $m$  的布朗粒子, 处在频率为  $\omega_0$  的简谐势中并由热简谐速度噪声驱动, 其一维运动的广义 Langevin 方程为

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad (12)$$

$$m\dot{v}(t) = -m \int_0^t \beta(t-s)v(s)ds - \frac{\partial U(x)}{\partial x} + i(t),$$

式中,  $U(x)$  是粒子的势能;  $\beta(t-s)$  是记忆阻尼核函数. 与稳态的简谐速度噪声  $i(t)$  之间满足 Kubo 涨落耗散定理:  $i(t)i(s) = D\beta(|t-s|)$ , 其中  $D = m\eta_0 k_B T$ ,  $k_B$  是玻尔兹曼常数,  $T$  是热浴环境的温度.

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2,$$

$$\beta(|t-s|) = \frac{\eta_0 \Gamma^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2} [ -\mu_1 \exp(\mu_1 |t-s|) + \mu_2 \exp(\mu_2 |t-s|) ]. \quad (13)$$

对方程(12)进行 Monte-Carlo 数值模拟. 设

$$h(t) = -m \int_0^t \beta(t-s)v(s)ds + i(t)$$

并进行变量代换, 则非 Markovian Langevin 方程可变为六维的 Markovian Langevin 方程组

$$\dot{x} = v,$$

$$m\dot{v} = -m\omega_0^2 x + h,$$

$$\dot{h} = -\Gamma h - m\eta_0 \Gamma v - \Omega^2 \varepsilon - z + \xi(t), \quad (14)$$

$$\dot{z} = \Omega^2 (h - i),$$

$$\dot{\varepsilon} = i,$$

$$\dot{i} = -\Gamma i - \Omega^2 \varepsilon + \xi(t).$$

这里  $\xi(t)$  即为(2)式中的白噪声,

$$\xi(t) = 0,$$

$$\xi(t)\xi(s) = 2\Gamma^2 D\delta(t-s).$$

在计算中取自然单位  $m=1, k_B T=1$ , 时间步长取  $\Delta t=10^{-3}$ , 统计的粒子数为  $N=10^4$ , 对以上六维方程组应用二阶随机 Runge-Kutta 算法. 布朗粒子的平均能量

$$E(t) = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2(t) + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2(t) \quad (15)$$

是我们感兴趣的物理量. 由于(12)式用了稳态的简谐速度噪声, 故在计算中我们依照

$$\begin{aligned} \epsilon(0) &= \sqrt{\alpha \kappa \Gamma \Omega^2} r_1, \\ \dot{\epsilon}(0) &= \sqrt{\alpha / \Gamma} r_2 \end{aligned}$$

给定噪声的初始分布, 从一开始就能得到稳态的噪声. 这里的  $r_1, r_2$  为两个相互独立且均值为零, 方差为 1 的高斯型随机数.

图 5 给出了在一定频率的势场中不同频率的简谐噪声作用下粒子平均能量随时间的变化, 并对比白噪声的解析结果. 从图 5 可以看出, 尽管初始情况一样, 但时间足够长粒子达到稳态后,  $\omega_0 \neq \Omega$  情况下粒子的稳态能量均低于二者相等的情况. 这意味着两种频率之间存在相互作用, 影响着粒子的稳态能量. 图 5 中虚线为白噪声情况, 白噪声没有频率特征, 与势场频率无相互作用.

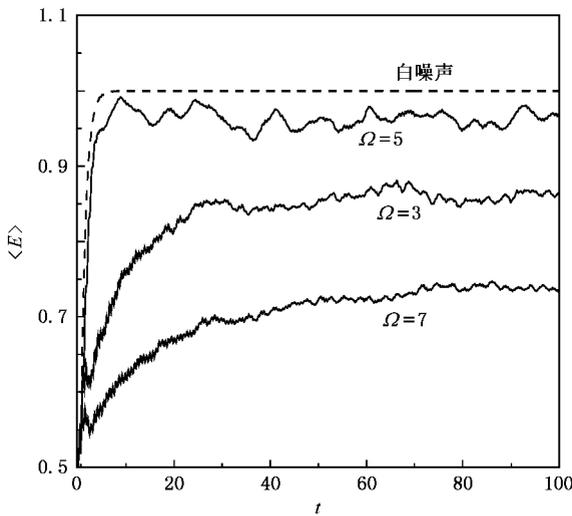


图 5 不同频率匹配下粒子平均能量随时间的变化  $\Gamma = k_B T = \eta_0 = m = 1, \Delta t = 0.001, \omega_0 = 5$

图 6 给出了不同的势场频率下, 粒子总能量的稳态值随简谐速度噪声频率的变化. 可以看出, 曲线呈非单调变化, 势场频率不同时稳态能量极大值对噪声频率有选择性. 三条曲线的能量极大值均出现

在  $\Omega = \omega_0$  的情况下, 亦即能量的稳态值受内噪声频率和谐振势频率的耦合作用而控制的, 两种频率之间存在动力学共振. 当两种频率都很大时能量极大值下降, 这是因为噪声和势场力的急速变化, 作用在具有一定质量和惯性的粒子上, 其平均驱动效果下降. 而不同的势场频率对白噪声的解析结果稳态值没有影响<sup>[15]</sup>.

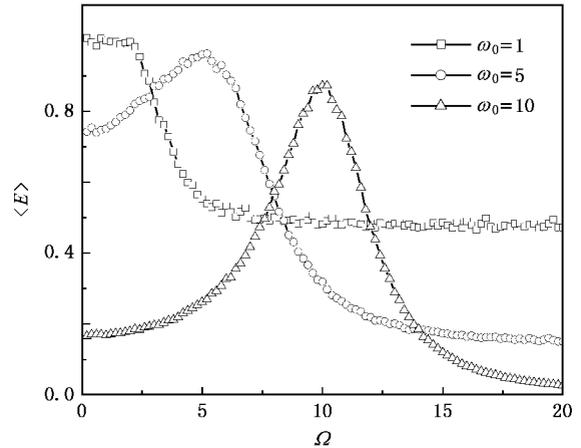


图 6 不同的势场频率下, 粒子稳态平均能量随噪声频率的变化  $\Gamma = k_B T = \eta_0 = m = 1, \Delta t = 0.001$

### 4. 结 论

为了更全面地描述复杂的噪声环境对系统随机运动的影响, 我们引进了一种有频率结构的新噪声——简谐速度噪声. 它对应噪声谐振子方程中的速度项, 在频域空间是一种‘带通’噪声, 其特征频率可由参量  $\Omega$  精确控制. 在  $\Omega \rightarrow 0$  时噪声可退化到 O-U 噪声, 进而  $\Gamma \rightarrow \infty$  时则成为白噪声. 我们考察了热简谐速度噪声驱动的布朗粒子在简谐势中的能量. 计算结果表明: 噪声和势场频率之间存在动力学共振, 决定着粒子能量的大小; 当两种频率相等时, 出现能量极大值. 因此, 考虑噪声的频率结构将有助于我们解释更多随机现象的物理机制.

[ 1 ] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57  
 [ 2 ] Lindner B, García-Ojalvo J, Neiman A *et al* 2004 *Phys. Rep.* **392** 321  
 [ 3 ] Hu G 1995 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p17 (in Chinese) [ 胡 岗 1995 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第 17 页 ]  
 [ 4 ] Grifoni M, Hänggi P 1998 *Phys. Rep.* **304** 229  
 [ 5 ] Shi X, Lu Q S 2005 *Chin. Phys.* **14** 1088  
 [ 6 ] Xu W, Jin Y F, Li W *et al* 2005 *Chin. Phys.* **14** 1077

- [ 7 ] Xiao F H , Yan G R , Han Y H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 396 ( in Chinese ) [ 肖方红、闫桂荣、韩雨航 2004 物理学报 **53** 396 ]
- [ 8 ] Jin Y F , Xu W , Li W *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2562 ( in Chinese ) [ 靳艳飞、徐 伟、李 伟等 2005 物理学报 **54** 2562 ]
- [ 9 ] Zhang L Y , Cao L , Wu D J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1174 ( in Chinese ) [ 张良英、曹 力、吴大进 2003 物理学报 **52** 1174 ]
- [ 10 ] Ibarra-Bracamontes L , Romero-Rochín V 1997 *Phys. Rev. E* **56** 4048
- [ 11 ] Dykman M I , McClintock P V E , Stein N D *et al* 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 933
- [ 12 ] Munakata T , Kawakatsu T 1985 *Prog. Theor. Phys.* **74** 262
- [ 13 ] Einchcomb S J B , McKane A J 1994 *Phys. Rev. E* **49** 259
- [ 14 ] Bartussek R , Hänggi P , Linder B *et al* 1997 *Physica D* **109** 17
- [ 15 ] D 'Anna G , Mayor P , Barrat A *et al* 2003 *Nature* **424** 909
- [ 16 ] Bartussek R , Reimann P , Hänggi P 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1166
- [ 17 ] Wu Q Y 1984 *The Stochastic Processes* ( Beijing : National Defence Industry Press ) p18 ( in Chinese ) [ 吴祁耀 1984 随机过程(北京:国防工业出版社)第 18 页 ]
- [ 18 ] Song Y L , Bao J D 2005 *Chin. J. Comput. Phys.* **22** 1 ( in Chinese ) [ 宋艳丽、包景东 2005 计算物理 **22** 1 ]

## Harmonic velocity noise and its frequency resonance with the potential<sup>\*</sup>

Song Yan-Li<sup>†</sup>

( School of Science , Tianjin University , Tianjin 300072 , China )

( Received 10 March 2006 ; revised manuscript received 22 May 2006 )

### Abstract

A noise with frequency structure , i. e. the harmonic velocity noise is investigated to describe the complicated noise environment . We studied the noise 's occurrence , correlation function , power spectrum , as well as some behaviors caused by its frequency characteristics when it acts as a thermal noise . The results show that the harmonic velocity noise is band-passing in frequency spectral space with a peak frequency and the band width is determined by  $\Gamma$  . If a Brownian particle in a harmonic potential is driven by a thermal harmonic velocity noise , its maximum energy appears when the two frequencies are equal . This testifies that there is a dynamical resonance between the frequencies of the noise and the potential , which controls the particle 's energy .

**Keywords** : harmonic noise , harmonic velocity noise , power spectrum , frequency resonance

**PACC** : 4350 , 7270 , 8670J

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10547133 ) and the Foundation for Young Teachers of Tianjin University , China ( Grant No. 5110118 ).

<sup>†</sup> E-mail : songyanli2003@sohu.com