

# 颗粒物质内部滑动摩擦力的非线性振动现象<sup>\*</sup>

杜学能<sup>1,2)†</sup> 胡 林<sup>1)</sup> 孔维姝<sup>1)</sup> 王伟明<sup>1)</sup> 吴 宇<sup>1)</sup>

1) 贵州大学理学院, 贵州省光电子技术与应用重点实验室, 贵阳 550025)

2) 铜仁学院物理系, 铜仁 554300)

(2006 年 1 月 23 日收到, 2006 年 6 月 19 日收到修改稿)

实验研究了探测棒竖直穿过圆筒中颗粒物质运动时所受的滑动摩擦阻力. 研究发现, 厚度为容器直径的 0.5 到 2 倍之间, 粒径为 2 mm 的颗粒堆, 对探测棒的滑动摩擦力在一个平均水平上随时间作非线性振动. 当探测棒以小于  $2 \times 10^{-3}$  m/s 的匀速率上升时, 滑动摩擦力平均水平超过初始最大静摩擦力  $F_0$  的 0.2 到 0.5 倍, 变化范围可从  $F_0$  到  $2F_0$ . 频率低于 1.35 Hz 时, 各种频率成分的强度随频率增加按幂函数方式衰减, 其主要部分的平均周期  $T$  与探测棒运动速率  $v$  成反比关系.

关键词: 颗粒物质, 滑动摩擦力, 非线性振动

PACC: 4610, 6220P, 0540

## 1. 引 言

离散态颗粒物质体系具有十分复杂的物理性质. 颗粒物质在静止、流动或受到某种激励时, 往往会出现一些难以用传统的固态、液态或气态物质运动规律进行描述<sup>[1,2]</sup>的奇特现象. 例如沙堆底部压力的中心凹陷<sup>[3]</sup>、粮仓底部压力的临界饱和<sup>[4]</sup>、颗粒物质流运动状态的突变<sup>[5]</sup>、颗粒流密度波的形成<sup>[6,7]</sup>、振动床中颗粒的对流和分离及有序结构(斑图)的形成<sup>[8,9]</sup>等. 这些奇特现象以及产生这些现象的机理, 受到物理学界的广泛关注.

颗粒物质内部相互作用以摩擦和碰撞为主, 颗粒体系的静态性质以及对各种激励的响应与颗粒之间的摩擦有关. Nasuno 等<sup>[10]</sup>对颗粒堆上表面与固体之间的摩擦进行的研究表明, 颗粒的摩擦有别于固体接触表面之间的摩擦. Horvath 等<sup>[11]</sup>把一根圆棒预置在颗粒中, 通过测量拉出圆棒所需的力研究了不同堆积密度颗粒中的摩擦力. 实验表明, 颗粒物质中的摩擦力随堆积密度  $C$  呈指数形式增长,

$$F(C) = ke^{C/C^*}.$$

文献 [12] 通过在填充了颗粒的圆筒容器中提升探测

棒(圆棒), 测量了棒受到的最大静摩擦力  $F_0$ , 结果表明

$$F_0 \propto \pi \mu DP_m [h + \lambda(e^{-h/\lambda} - 1)], \quad (1)$$

式中,  $D$  是圆筒内直径,  $h$  是颗粒填充高度,  $P_m$  是当高度足够大时容器底部压强的饱和值<sup>[4]</sup>,  $\mu$  是颗粒与棒的摩擦系数,  $k$  是由颗粒性质和堆积密度决定的常数, 而  $\lambda = R/2\mu_\omega k$  称为相关长度, 与颗粒和筒之间的摩擦系数  $\mu_\omega$ 、棒的半径  $R$  及  $k$  有关. 最近, 厚美瑛等<sup>[13]</sup>研究了自由落体球进入松散颗粒床后的运动, 发现物体在颗粒物质内的穿透速度  $u$  可以描述为

$$\frac{m du}{dt} = -\gamma u - \kappa z + mg', \quad (2)$$

式中,  $\gamma$  和  $\kappa$  分别是表征颗粒床的黏性阻力和静压阻力的系数,  $z$  是物体透入颗粒床的深度,  $mg'$  是对重力的约化.

物体在颗粒物质体系内部移动, 对其周围颗粒的激励形成直接或间接的挤压, 雷诺兹(Reynolds)挤压原理<sup>[14]</sup>表明, 持续挤压可能会使颗粒的堆积密度发生不断变化, 这将会引起颗粒物质中摩擦力的变化. 本文通过实验观察了探测棒竖直穿过圆筒容器内颗粒堆的下落并研究了在颗粒堆中匀速提升探测棒时的

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10374021)、贵州省科技发展基金(批准号: 20041036)、贵州省高层次人才基金(批准号: 20031227)和贵州省省长基金(批准号: 2004007)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: szdun@sina.com

滑动摩擦力,发现滑动摩擦力  $F$  随时间  $t$  出现非线性振动式变化。

## 2. 实验装置及测量方法

实验测量装置如图 1 所示,用内径分别为  $D_1 = 0.070$  m 和  $D_2 = 0.120$  m 的有机玻璃圆筒作为盛颗粒的容器,用长 1 m、横截面直径为 0.015 m,表面光洁的铝质圆管作为探测棒,探测棒内可灌玻璃珠以调节重量。圆筒的金属底座中央开有一个直径为 0.017 m 的圆孔,可容穿过孔的探测棒与孔壁无接触地沿竖直方向上下运动。实验用干净玻璃珠,密度  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>,粒径  $d = 0.002$  m。当容器中装有颗粒时,探测棒在运动过程中其上下两端始终穿出颗粒堆,侧面与颗粒接触的宏观高度(被颗粒包围部分的高度)  $h$  保持不变。棒与底座孔壁之间的缝隙宽度小于颗粒直径,颗粒不会漏下。

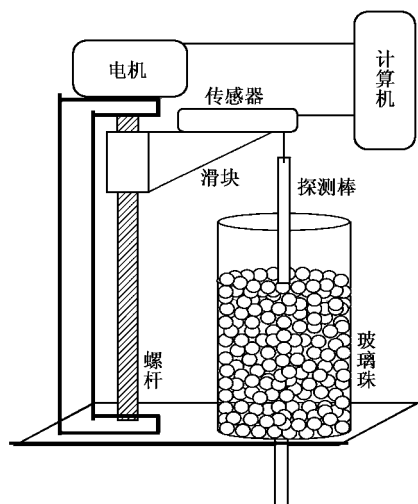


图 1 实验装置示意图

提拉部分由北京卓立汉光仪器公司生产的 SC3 型步进电机控制器和电控位移台组成。步进电机可提供 256 种转速,驱动滑块以不同的速率上下移动。设定滑块移动最低速率  $v_0 = 0.095 \times 10^{-3}$  m/s,可选择的速率是  $v_0$  的整数倍。固定在滑块平台上的称重传感器灵敏度为 0.001 kg,通过挂钩悬挂探测棒。数据采集通过称重传感器、GM8803 型称重控制器和计算机自动完成。空载运行时,读数只记录了棒的重量,数据点连成平滑的水平直线,启动加速过程可以忽略不计。

当探测棒以速度  $v_i$  在填充了一定质量颗粒的

圆筒中向上运行时,传感器记录到一个作用力的时间序列,减去空载本底便得到当提拉速度为  $v_i$  时随时间变化的一组滑动摩擦力。实际采用的是相同条件下多组数据的平均值  $F_i(t)$ 。改变实验条件,可得到不同情况下滑动摩擦力  $F$  与时间  $t$  的关系或与相对位移  $x$  的关系。

## 3. 实验结果及讨论

### 3.1. 探测棒在容器内颗粒堆中的下落

在内径为  $D_2$  的圆筒中,用细线将探测棒沿中轴线提升到一个起始位置,在容器中填入一定高度的颗粒,剪断悬线观察棒在颗粒中的运动。改变棒的重量进行多次实验后,发现棒在颗粒堆中的下落大致可分为 3 种类型。(1)较轻的棒在悬线被剪断之后不会下落,或者下落一段距离后停止,下落的距离与颗粒的堆积高度和棒的重量有关,适当减少圆筒内颗粒的高度或增加棒的重量可延长下落距离。棒停止后,在外力帮助下可突破阻塞,但下落一段距离后出现二次阻塞。(2)较重的棒在剪断悬线后加速落下。(3)当探测棒的重量被调整到一个合适范围内时,在颗粒中下落的速率随时间作起伏变化,平均速率随棒的重量增加而增加。

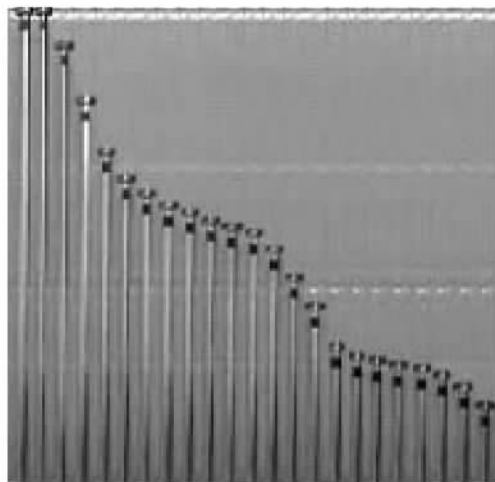


图 2 质量为 0.325 kg 的探测棒在堆积高度为 0.175 m 的颗粒中的下落过程,从  $t = 0$  到  $t = 22$  s,时间间隔为 1 s

图 2 是质量为 0.325 kg 的探测棒在质量为 3 kg、堆积高度为 0.175 m、堆积密度为 0.61 的颗粒中竖直下落时,从摄像记录中按照时间顺序提取的从  $t = 0$  到  $t = 22$  s,时间间隔为 1 s 的 23 张照片,下

落全过程经历的时间为 22 s.从图 2 中可以看出,在下落过程中探测棒顶端的轨迹(位移曲线)随时间作非线性变化,并且出现拐点,还观测到棒下落的速率忽快忽慢.这种现象反映了棒的加速度发生起伏变化.由于棒所受的重力不变,故起伏变化与滑动摩擦阻力有关.这说明棒在颗粒中所受到的滑动摩擦阻力不是常量,它的变化包含了较明显的振动成分.

### 3.2. 探测棒匀速上升的滑动摩擦力

在探测棒处于提升的起始位置时,填充颗粒后匀速提升探测棒并且测量棒受到的摩擦力.每一轮测量都给出一种填充高度以及一种提升速率条件下的摩擦力.

图 3 是在内径  $D_1 = 0.070$  m 的圆筒中,对 3 种不同填充高度、以同样速率  $v_1 = 7.64 \times 10^{-4}$  m/s 匀速提升探测棒得到的 3 组不同的摩擦力  $F(t)$ .图 3 曲线 a、曲线 b 和曲线 c 分别对应于  $h = 0.070$  m,  $h = 0.139$  m 和  $h = 0.180$  m,棒的位移全程  $X = 0.640$  m.从图 3 可以看出,在 3 种情况下被提拉的棒最初都受到的由零开始急剧增加的摩擦阻力.当摩擦力单调增加到一个临界点(例如 A 点)时,偏离最初的增长趋势,出现小起伏并进入较大起伏变化的振动状态.摩擦力从零到临界点之间的数据反映了探测棒由静止到以速率  $v_1$  运动的初始扰动过程中受力的变化.临界点 A、B、C 摩擦力的值分别约为 0.8、1.7、2.5 N,是 3 种情况下初始扰动的结果,与通过用弹簧测得的最大静摩擦力  $F_0$  相符.忽略初始扰动,我们认为滑动摩擦过程是从临界点开始的, $F(t)$ 就是以最大静摩擦力  $F_0$  为初始值的滑动摩擦力. $F(t)$ 可以分离成静态摩擦力  $F_0$  和动态摩擦力  $\Phi(t)$ 两部分,即

$$F(t) = F_0 + \Phi(t). \quad (3)$$

$F_0$  已由文献 [12] 做过研究,其结果基本适用于滑动摩擦力的静态分量. $F_0$  提供了滑动摩擦力振动的起点值. $\Phi(t)$  是颗粒物质体系在初始扰动,即静态摩擦的基础上对持续激励的响应,它反映了  $F(t)$  随时间  $t$  或随相对位移  $x$  变化的关系.

图 4(a) 给出了图 3 曲线 b 所表示的滑动摩擦力的动态部分  $\Phi_2(t)$  与时间的关系,图 4(b) 则是图 4(a) 中  $t = 40 \sim 70$  s 之间摩擦力的局部放大,它们从两个方面反映了  $\Phi_2(t)$  随时间变化的情况.图 4(a) 记录了幅度较大的缓慢起伏,这类变化描述了

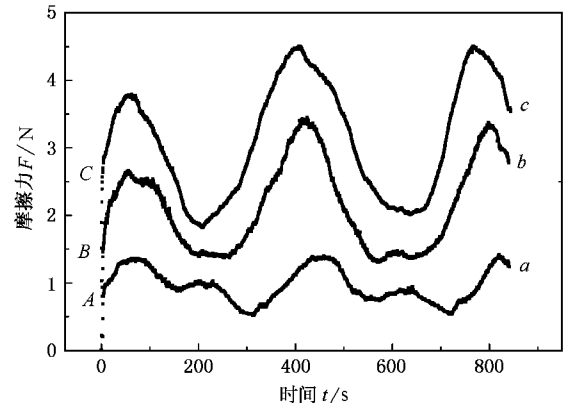


图 3 在  $D_1 = 0.070$  m 的筒内,不同填充高度的颗粒对棒的摩擦力与测量时间的关系.曲线 a 为  $h = 0.070$  m,曲线 b 为  $h = 0.139$  m,曲线 c 为  $h = 0.180$  m

$\Phi_2(t)$  的主体部分,是一条不规则的振动曲线.由图 4(a) 可读出  $\Phi_2(t)$  的平均值约为 0.45 N,变化的范围(峰峰值)约为 1.8 N.读取图 3 曲线 b 和曲线 c 滑动摩擦力动态部分  $\Phi_1(t)$  及  $\Phi_3(t)$  的平均值,并与其起点值比较后,可得  $F(t)$  的平均水平高于起点  $F_0$  的范围约在 0.2—0.3 倍之间.图 4(b) 记录的是幅度较小、变化较快的起伏,小起伏使主体曲线有一定的粗糙程度.这一局部放大图显示,各时刻测得的摩擦力在起伏分布中形成主体曲线,数据点离散的范围约为 0.1 N.

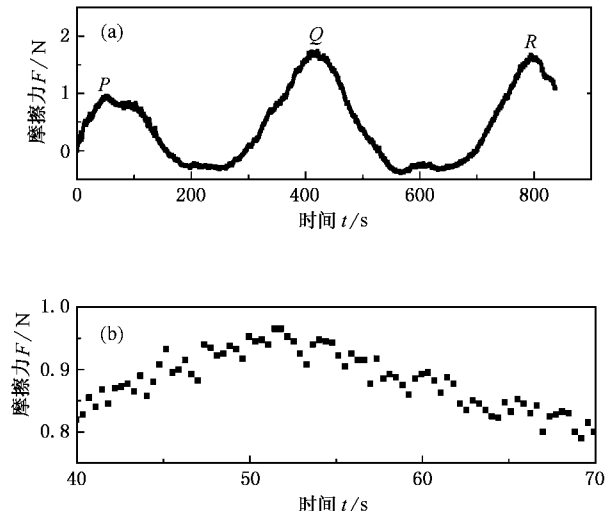


图 4 滑动摩擦力  $F(t)$  动态部分  $\Phi(t)$  与时间  $t$  的关系 (a) 为 (b) 的局部放大

$\Phi(t)$  的起伏变化反映了整个滑动摩擦是一个黏滑运动过程.向上运动的探测棒使其周围颗粒产生黏滑性蠕动,导致  $\Phi(t)$  出现小的离散起伏,类似

于固体接触面之间摩擦的黏滑现象. 大的缓慢起伏也许还反映了黏滑会深入到颗粒体系的内部, 引起体系结构和应力的缓慢变化, 使得颗粒体系内部的滑动摩擦力在宏观上表现为在平均水平上的、包含多种频率成分的非线性振动.

### 3.3. 滑动摩擦力的功率谱

根据图 3 所示的实验结果,  $F(t)$  随时间  $t$  的变化量  $\Phi(t)$  包含周期变化. 在图 4(a) 的曲线中拾取峰值  $P$ ,  $Q$  和  $R$  点的坐标, 对  $\Phi_2(t)$  进行周期的估算, 用同样的方法估算  $\Phi_1(t)$  和  $\Phi_3(t)$  的周期, 得到基本平均周期为  $T = 380 \pm 20$  s.

图 5 是用数据分析软件 Origin 对  $\Phi_2(t)$  进行分析得到的功率谱. 谱中给出  $F(t)$  的频率范围为 0—1.35 Hz, 频率的宽度为  $0.66 \times 10^{-3}$  Hz, 各种频率成分的相对强度  $S(f)$  的数量级范围为  $10^{-13}$ — $10^{-3}$ , 且随着频率的增加而逐渐衰减. 取对数坐标时, 相对强度与频率基本呈线性关系, 作直线拟合其斜率  $k = -1.79 \pm 0.02$ . 依次对  $\Phi_1(t)$  和  $\Phi_3(t)$  作相同的处理, 得到  $S(f)$  随频率的增加按幂函数规律衰减, 即

$$S(f) \propto f^{-1.8 \pm 0.05}. \quad (4)$$

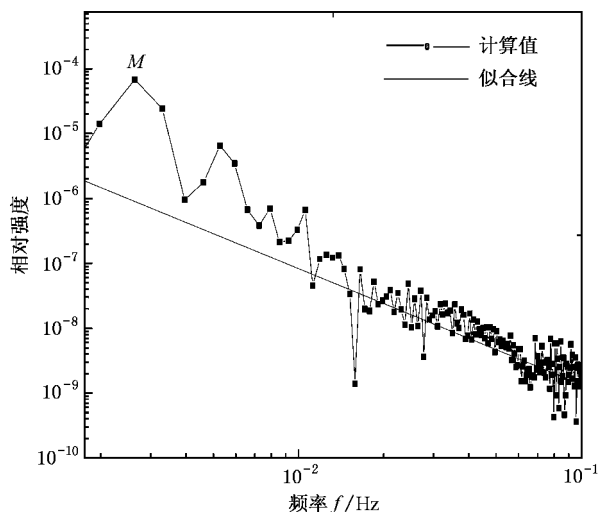


图 5 滑动摩擦力动态部分  $\Phi_2(t)$  的功率谱及拟合直线

图 5 中  $M$  点对应的频率为  $f = 2.64 \times 10^{-3}$  Hz, 是  $\Phi_2(t)$  主要振动部分的中心频率, 该频率对应的平均周期  $T = 379$  s, 与估计值基本相符. 对  $\Phi_1(t)$  和  $\Phi_3(t)$  进行功率谱分析, 与  $\Phi_2(t)$  的分析结果一致, 表明  $\Phi(t)$  的非线性振动以中心频率  $f = 2.64 \times 10^{-3}$  Hz 及其相邻频率  $1.98 \times 10^{-3}$  Hz 和  $3.3 \times 10^{-3}$  Hz 为

主. 功率谱给出  $\Phi(t)$  具有零频率分量, 并与估计的平均值相符, 零频率分量与静态分量  $F_0$  之和代表了  $F(t)$  变化的平均水平. 由分析可知,  $F(t)$  随时间的变化是围绕其平均水平, 包含  $0.66 \times 10^{-3}$  Hz 的整数倍频率的非线性振动.

### 3.4. 滑动摩擦力与相对位移的关系

在  $D_2 = 0.120$  m 的圆筒中, 填入高度  $h = 0.118$  m 的颗粒, 设定探测棒行程  $X = 0.650$  m, 图 6 分别以四种速率  $v_1 = 0.764 \times 10^{-3}$  m/s,  $v_2 = 1.146 \times 10^{-3}$  m/s,  $v_3 = 1.528 \times 10^{-3}$  m/s 和  $v_4 = 1.910 \times 10^{-3}$  m/s 提升探测棒测得的滑动摩擦力  $F(x)$ , 图中取探测棒与颗粒堆的相对位移  $x$  为横轴. 从图 6 可以看出, 滑动摩擦力都呈现与图 3 类似的振动. 在相对位移标度下, 滑动摩擦力的变化趋势基本相同. 对应于不同提升速率的振动, 相对位移有一个不变的类似于“波长”的特征长度, 可以表示为

$$L = v_i T_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (5)$$

(5) 式反映出非线性振动的平均周期与提升速率成反比关系. 在图 6 中  $L \approx 0.310$  m, 对同一填充质量的颗粒堆运行多种速率提升探测棒的实验结果表明, 在相对位移标度下, 滑动摩擦力  $F(x)$  的变化趋势有很好的相似性, 棒的速度与基本平均周期的乘积是一个稳定的特征长度.

### 3.5. 颗粒堆厚度对振动的影响

图 7 是在直径为  $D_2$  的圆筒中, 颗粒填充高度依次为 0.060, 0.088, 0.118, 0.175, 0.230 和 0.285 m 时, 以速率  $v = 0.764 \times 10^{-3}$  m/s 运行探测棒测得的  $F(t)$ . 从图 7 可以看出, 当  $F(t)$  的平均水平随着颗粒高度的增加而增加时, 仍基本保持了非线性振动趋势. 振动平均周期基本上没有随高度的变化作连续变化, 但是在颗粒高度值小于容器直径时, 一个平均周期内会出现两个峰, 随着颗粒填充高度的增加, 较小的峰逐渐消失. 图 3 也显示出这种情况.

图 8 是  $F(t)$  的滑动摩擦力初始值、波谷、平均值和波峰随颗粒填充高度变化的关系. 从图 8 可以看出, 颗粒堆厚度从容器直径的 0.5 倍增加到 2 倍过程中,  $F(t)$  的平均水平相对于  $F_0$  抬高, 可比  $F_0$  高出约 0.5 倍. 振动幅度随厚度增加而增加, 但颗粒堆高度大于 1.5 倍容器直径后, 幅度增加变慢, 有接近饱和的趋势.

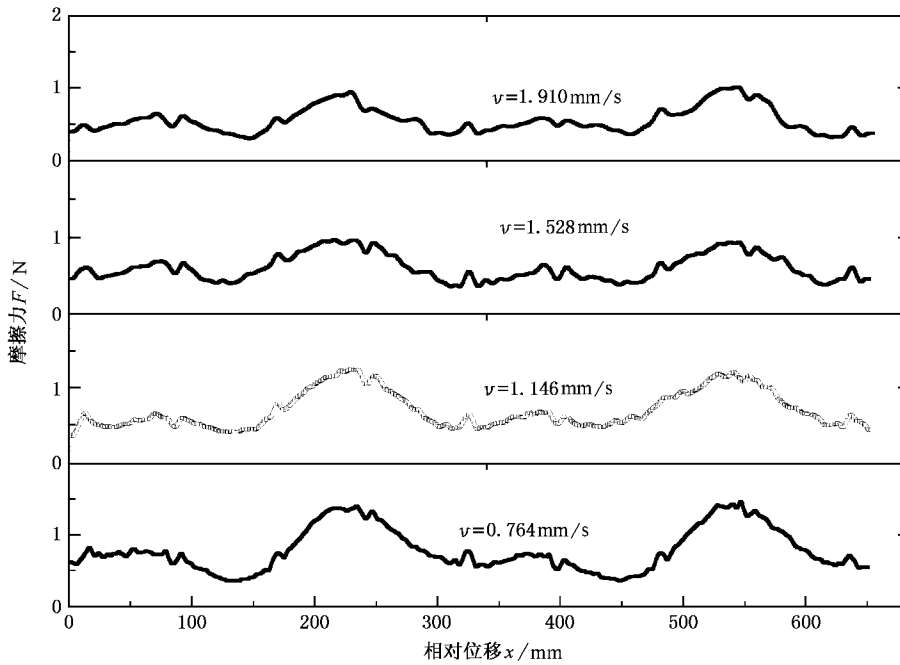


图 6 在  $D_2 = 0.120$  m 圆筒中, 填充质量  $m = 2$  kg, 高度  $h = 0.118$  m 时不同提升速率测得的滑动摩擦力  $F(x)$

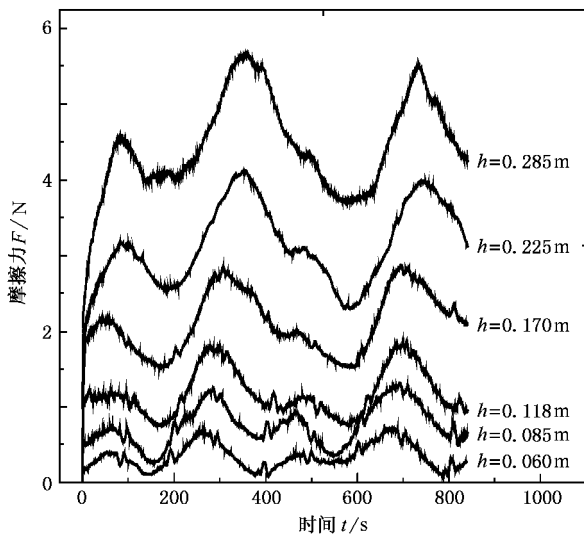


图 7 不同颗粒填充高度下的  $F(t)$

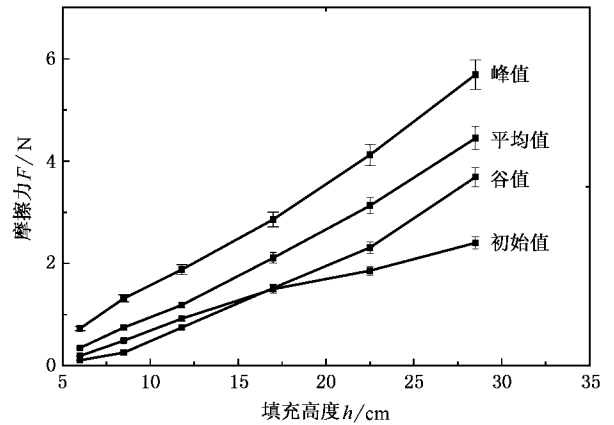


图 8 滑动摩擦力初始值、谷值、均值和峰值与填充高度  $h$  的关系

探测棒在离散态颗粒物质层内部运动时, 滑动摩擦阻力  $F(t)$  作非线性振动的这种现象, 与连续介质之间的滑动摩擦力有些不同. 我们认为, 这一现象可能是因为棒的运动引起与其接触颗粒的蠕动, 从而使周围颗粒出现结构重组、堆积密度发生局部改变所致. 实验中观察到探测棒周围颗粒的蠕动, 但颗粒体系没有出现可观测的密度改变.

## 4. 结 论

对颗粒物质中滑动摩擦力的研究表明: 对于颗粒直径为  $2 \times 10^{-3}$  m, 堆积厚度为容器直径的 0.5 倍到 2 倍之间的颗粒体系, 当探测棒在颗粒堆中运动时, 黏滑运动使滑动摩擦阻力会大于初始最大静摩擦力  $F_0$ , 并出现缓慢的非线性振动现象. 探测棒以小于  $2 \times 10^{-3}$  m/s 的速率匀速向上运动时, 滑动摩擦

力的平均水平高出  $F_0$  约为 0.2 到 0.5 倍, 振动的频率范围在 1.35 Hz 以下时, 各种频率成分的相对强度随着频率的增加按幂函数规律衰减. 振动主要部

分的平均周期与探测棒提升速率成反比关系. 棒与颗粒的相对位移有一个稳定的特征长度反映这种比例关系.

- [ 1 ] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [ 2 ] Jaeger H M , Nagel S R , Behringer R P 1996 *Rev. Mod. Phys.* **68** 1259
- [ 3 ] Jaeger H M , Liu C H , Nagel S R 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 10
- [ 4 ] Janssen H A , Vereins Z 1895 *Ver. Deutsch Ing.* **39** 1045
- [ 5 ] Xu G L , Hu G Q , Zhang X S *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 875 ( in Chinese ) [ 徐光磊、胡国琦、张训生等 2003 物理学报 **52** 875 ]
- [ 6 ] Bao D S , Zhou Y , Zhang X S *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1279 ( in Chinese ) [ 鲍德松、周英、张训生等 2005 物理学报 **54** 1279 ]
- [ 7 ] Moriyama O , Kuroiwa N , Matsushita M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2833
- [ 8 ] Jiang Z H , Lu K Q , Hou M Y *et al* 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2244 ( in Chinese ) [ 姜泽辉、陆坤权、厚美瑛等 2003 物理学报 **52** 2244 ]
- [ 9 ] Melo F , Umbanhowar P B , Swinney H L 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3838
- [ 10 ] Nasuno S , Kudrolli A , Bak A *et al* 1998 *Phys. Rev. E* **58** 2161
- [ 11 ] Horvath V K , Janosi I M , Vella P J 1996 *Phys. Rev. E* **54** 2005
- [ 12 ] Hu L , Yang P , Xu T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 879 ( in Chinese ) [ 胡林、杨平、徐亭 2003 物理学报 **52** 879 ]
- [ 13 ] Hou M Y , Peng Z , Liu R *et al* 2005 *Sci. Techn. Adv. Mater.* **6** 855
- [ 14 ] Reynold O 1885 *Phil. Mag. Ser.* **50** 469

## On the nonlinear oscillation of internal sliding friction in particulate matter \*

Du Xue-Neng<sup>1,2†</sup> Hu Lin<sup>1)</sup> Kong Wei-Shu<sup>1)</sup> Wang Wei-Ming<sup>1)</sup> Wu Yu<sup>1)</sup>

1 *Key Laboratory for Photoelectronics Technology and Application of Guizhou Province, School of Science, Guizhou University, Guiyang 550025, China*

2 *Department of Physics, Tongren Institute, Tongren 554300, China*

( Received 23 January 2006 ; revised manuscript received 19 June 2006 )

### Abstract

Experiments are designed to explore the sliding friction that the particulate material bears in the movement when the detecting rod goes vertically through the material contained in a round tube. The research result shows that the sliding friction makes nonlinear oscillations about an average value when the depth of the particulate pile with 2 mm particulate diameter is greater than 0.5 to 2 times the diameter of the container. When the detecting rod goes up with the uniform velocity of less than  $2 \times 10^{-3}$  m/s, the average value of the sliding friction is 0.2 to 0.5 times greater than the maximum static friction  $F_0$  and the value fluctuates within the range from  $F_0$  to  $2F_0$ . When the frequency is lower than 1.35 Hz, the intensity of various frequencies goes down exponentially with increasing frequency. The average period  $T$  of the main frequency is inversely proportional to the velocity  $v$  of the detecting rode.

**Keywords** : granular material , sliding friction , nonlinear oscillation

**PACC** : 4610 , 6220P , 0540

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10374021 ) , the Science and Technology Development Foundation of Guizhou Province , China ( Grant No. 20041036 ) , the Excellent Talents Foundation of Guizhou Province , China ( Grant No. 20031227 ) and the Provincial Governor Foundation of Guizhou Province , China ( Grant No. 2004007 ).

† E-mail : szdun@sina.com