第 55 卷 第 2 期 2006 年 2 月
1000-3290/2006/55(02)/0504-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.2, February, 2006

单面非 Chetaev 型非完整约束系统的非 Noether 守恒量*

张 毅†

(苏州科技学院土木工程系,苏州 215011)

(2005 年 4 月 21 日收到;2005 年 6 月 6 日收到修改稿)

研究单面非 Chetaev 型非完整约束力学系统的对称性与非 Noether 守恒量.建立了系统的运动微分方程;给出了系统的 Lie 对称性和 Mei 对称性的定义和判据;对于单面非 Chetaev 型非完整系统,证明了在一定条件下,由系统的 Lie 对称性可直接导致一类新守恒量——Hojman 守恒量,由系统的 Mei 对称性可直接导致一类新守恒量——Mei 守恒量;研究了对称性和新守恒量之间的相互关系.文末,举例说明结果的应用.

关键词:分析力学,单面约束,非完整系统,对称性,Hojman 守恒量,Mei 守恒量

PACC:0320

1. 引 言

力学系统的对称性与守恒量研究,是数学物理科学,特别是分析力学的一个近代发展方向.近年来,在力学系统的对称性与守恒量的研究方面已取得了一系列重要成果[1—21],但是研究主要局限于双面约束情形,对单面约束系统的研究还很少.本文研究单面非 Chetaev 型非完整约束力学系统的对称性与守恒量.建立了系统的运动微分方程;利用微分方程在群的无限小变换下的不变性建立了系统的 Lie 对称性确定方程、限制方程及附加限制方程;由系统的动力学函数在群的无限小变换下仍然满足原来方程的不变性,建立了系统的 Mei 对称性的判据方程;给出了由单面非 Chetaev 型非完整约束力学系统的一般 Lie 对称性直接导致的一类新守恒量,即 Hojman 守恒量;给出了由单面非 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性直接导致的一类新守恒量——称之为 Mei 守恒量.Hojman 守恒量和 Mei 守恒量不同于 Noether 守恒量,它们是非 Noether 守恒量.单面 Chetaev 型非完整系统、双面非完整系统、完整系统的情况均可作为本文的特例,因此本文结果具有普遍意义.

2. 系统的运动微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s ($s = 1,\cdots,n$)来确定,系统的运动受有 g 个理想单面非 Chetaev 型非完整约束

$$\varphi_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) \geqslant 0,(\beta = 1,\cdots,g), \tag{1}$$

(1)式中,当左边部分函数值为正时,系统脱离约束;当左边部分函数值等于零时,系统处于约束上.当系统处于约束上时,设约束加在虚位移上的限制为

$$\Phi_{\beta s}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\delta q_s = 0, \tag{2}$$

一般而言,$\Phi_{\beta s}$ 与 $\dfrac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_s}$ 没有联系.如果

$$\Phi_{\beta s} = \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_s}, \tag{3}$$

则非 Chetaev 型约束成为 Chetaev 型约束[6].

单面非 Chetaev 型非完整系统的 Routh 方程可表为

$$E_s(L) = Q_s + \lambda_\beta\Phi_{\beta s},(s = 1,\cdots,n), \tag{4}$$

对每一个 β,有

$$\lambda_\beta \geqslant 0,\varphi_\beta \geqslant 0,\lambda_\beta\varphi_\beta = 0, \tag{5}$$

其中 $L = T - V$ 为系统的 Lagrange 函数;Q_s 为非势广义力;λ_β 为约束乘子;而

---

* 江苏省高校自然科学基金(批准号:04KJA130135)、江苏省青蓝工程基金资助的课题.

† E-mail:weidiezh@pub.sz.jsinfo.net

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \tag{6}$$

为 Euler 算子.

若系统处于约束上,约束(1)取等号,设系统非奇异,则可解出约束乘子 λ_β 作为 $t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}$ 的函数,而方程(4)成为

$$E_s(L) = Q_s + \Lambda_s, (s = 1, \cdots, n), \tag{7}$$

其中

$$\Lambda_s = \lambda_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\Phi_{\beta s}. \tag{8}$$

展开方程(7),有

$$\ddot{q}_s = A_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), (s = 1, \cdots, n). \tag{9}$$

若系统脱离约束,约束(1)中不等号严格成立,方程(4)成为

$$E_s(L) = Q_s, (s = 1, \cdots, n). \tag{10}$$

展开方程(10),有

$$\ddot{q}_s = B_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), (s = 1, \cdots, n). \tag{11}$$

3. 系统的 Lie 对称性

取时间和广义坐标的群的无限小变换

$$t^* = t + \Delta t, q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s, \tag{12}$$

或其展开式

$$t^* = t + \varepsilon\tau(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{13}$$

其中 ε 为无限小参数,τ, ξ_s 为无限小变换的生成元.引入无限小生成元向量

$$X^{(0)} = \tau\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{14}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{15}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_k\frac{\partial}{\partial q_k} + \begin{cases} A_k\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\text{在约束上}), \\ B_k\dfrac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(\text{脱离约束}). \end{cases} \tag{16}$$

在无限小变换(12)下,若系统处于约束上,方程(9)的 Lie 对称性确定方程可表为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau - 2A_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau = X^{(1)}(A_s), \tag{17}$$

而当系统脱离约束时,方程(11)的 Lie 对称性确定方程为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau - 2B_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau = X^{(1)}(B_s). \tag{18}$$

定义 1

如果无限小生成元 τ, ξ_s 满足确定方程(17)与(18),则称相应对称性为与单面非 Chetaev 型非完整系统(1),(4)相应的完整系统(9)与(11)的 Lie 对称性.

单面非完整约束(1)在无限小变换(12)下的不变性归为满足限制方程

$$X^{(1)}(\varphi_\beta) = 0(\text{在约束上}). \tag{19}$$

定义 2

如果无限小生成元 τ, ξ_s 满足确定方程(17),(18),以及限制方程(19),则称相应对称性为单面非 Chetaev 型非完整系统(1),(4)的弱 Lie 对称性.

虚位移方程(2)对无限小生成元 τ, ξ_s 的限制表为如下附加限制方程

$$\Phi_{\beta s}(\xi_s - \dot{q}_s\tau) = 0\ (\text{在约束上}). \tag{20}$$

定义 3

如果无限小生成元 τ, ξ_s 满足确定方程(17),(18),限制方程(19),以及附加限制方程(20),则称相应对称性为单面非 Chetaev 型非完整系统(1),(4)的强 Lie 对称性.

4. 系统的 Mei 对称性

假设在经历无限小变换(12)式后,动力学函数 $L, Q_s, \Lambda_s, \varphi_\beta$ 分别变为 $L^*, Q_s^*, \Lambda_s^*, \varphi_\beta^*$,则有

$$\begin{aligned}
L^* &= L\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\
&= L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(L) + o(\varepsilon^2), \\
Q_s^* &= Q_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\
&= Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(Q_s) + o(\varepsilon^2), \\
\Lambda_s^* &= \Lambda_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\
&= \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(\Lambda_s) + o(\varepsilon^2), \\
\varphi_\beta^* &= \varphi_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\
&= \varphi_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(1)}(\varphi_\beta) + o(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{21}$$

定义 4

在无限小变换(12)下,如果方程(7),(10)的形式保持不变,即成立

$$E_s(L^*) = Q_s^* + \Lambda_s^*, \text{(在约束上)} \tag{22}$$

$$E_s(L^*) = Q_s^*, \text{(脱离约束)} \tag{23}$$

则称这种不变性为与单面非 Chetaev 型非完整系统(1),(4)相应的完整系统的 Mei 对称性.

定义 5

在无限小变换(12)下,如果方程(7),(10)的形式保持不变,且满足

$$\varphi_\beta^* = \varphi_\beta\left(t^* \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = 0, \text{(在约束上)} \tag{24}$$

则称这种不变性为单面非 Chetaev 型非完整系统的 Mei 对称性.

将(21)式分别代入方程(22),(23)和(24),忽略 ε^2 及更高阶小项,并利用方程(7),(10)和(1)式,得到

$$E_s[X^{(1)}(L)] - X^{(1)}(Q_s) - X^{(1)}(\Lambda_s) = 0, \text{(在约束上)} \tag{25}$$

$$E_s[X^{(1)}(L)] - X^{(1)}(Q_s) = 0, \text{(脱离约束)} \tag{26}$$

$$X^{(1)}(\varphi_\beta) = 0, \text{(在约束上)} \tag{27}$$

于是有

判据 1 如果无限小生成元 τ,ξ_s 满足判据方程(25),(26),则相应不变性为与单面非 Chetaev 非完整系统(1),(4)相应的完整系统(7),(10)的 Mei 对称性.

判据 2 如果无限小生成元 τ,ξ_s 满足判据方程(25),(26),以及限制方程(27),则相应不变性为单面非 Chetaev 型非完整系统(1),(4)的 Mei 对称性.

5. 对称性导致的一类非 Noether 守恒量——Hojman 守恒量

对于单面非 Chetaev 型非完整约束力学系统,在一定条件下,由 Lie 对称性可直接导出一类新守恒量,称之为 Hojman 守恒量.有如下结果

命题 1 对于单面非 Chetaev 型非完整系统,如果无限小生成元 τ,ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程(17),(18),且存在规范函数 $G_H = G_H(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$,当系统处于约束上时,满足

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau = 0, \frac{\partial A_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln G_H = 0. \tag{28}$$

而当系统脱离约束时,满足

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau = 0, \frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln G_H = 0. \tag{29}$$

则相应完整系统的 Lie 对称性直接导致 Hojman 守恒量,形如

$$I_H = \frac{1}{G_H}\frac{\partial}{\partial t}(G_H\tau) + \frac{1}{G_H}\frac{\partial}{\partial q_s}(G_H\xi_s) + \frac{1}{G_H}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left[G_H\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)\right] = \text{const}. \tag{30}$$

证 若系统处于约束上,将(30)式按方程(9)对时间求导数,得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H = \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}[X^{(1)}(\ln G_H)] + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tau}{\partial t} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s} + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right). \tag{31}$$

容易验证下列关系式:

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau - \frac{\partial A_k}{\partial t}\frac{\partial\tau}{\partial\dot{q}_k},$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s} = \frac{\partial}{\partial q_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \frac{\partial A_k}{\partial q_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial\dot{q}_k},$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)\\
&\quad - \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right)\\
&\quad - \frac{\partial A_k}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s - \dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau\right).
\end{aligned} \tag{32}$$

将(32)式代入(31)式,并利用 Lie 对称性确定方程(17),则有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H = \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}[X^{(1)}(\ln G_H)] + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau + \frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau + X^{(1)}\left(\frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}\right). \tag{33}$$

对任意函数 $F(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$,有

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}[X^{(1)}(F)] = X^{(1)}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}F\right) + \frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}F\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\tau. \tag{34}$$

利用关系式(34)和条件(28),(33)式可进一步表为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}I_H = X^{(1)}\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}(\ln G_H) + \frac{\partial A_s}{\partial\dot{q}_s}\right]$$

$$+\left[\frac{\bar{d}}{dt}(\ln G_H)+\frac{\partial A_s}{\partial \dot{q}_s}\right]\frac{\bar{d}}{dt}\tau$$

$$+\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\tau=0, \tag{35}$$

当系统脱离约束时,同理可得

$$\frac{\bar{d}}{dt}I_H=0.$$

于是有守恒量(30).证毕.

命题 2　对于单面非 Chetaev 型非完整系统,如果无限小生成元 τ,ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程(17),(18),以及限制方程(19),且存在规范函数 $G_H=G_H(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得条件(28)式与(29)式成立,则系统的弱 Lie 对称性直接导致 Hojman 守恒量(30)式.

命题 3　对于单面非 Chetaev 型非完整系统,如果无限小生成元 τ,ξ_s 满足 Lie 对称性确定方程(17),(18),限制方程(19),以及附加限制方程(20),且存在规范函数 $G_H=G_H(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,使得条件(28),(29)成立,则系统的强 Lie 对称性直接导致 Hojman 守恒量(30)式.

命题 4　对于单面非 Chetaev 型非完整系统,如果 Mei 对称性生成元 τ,ξ_s 满足确定方程(17),(18),且存在规范函数 $G_H=G_H(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得条件(28),(29)成立,则系统的 Mei 对称性间接导致 Hojman 守恒量(30)式.

6. 对称性导致的一类非 Noether 守恒量——Mei 守恒量

对于单面非 Chetaev 型非完整系统,在一定条件下,由 Mei 对称性可直接导致一类新守恒量,称之为 Mei 守恒量.有如下结果:

命题 5　对于单面非 Chetaev 型非完整系统,如果无限小生成元 τ,ξ_s 满足 Mei 对称性判据方程(25)与(26),且存在规范函数 $G_M=G_M(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,当系统处于约束上时,满足结构方程

$$X^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\tau+X^{(1)}[X^{(1)}(L)]$$

$$+X^{(1)}(Q_s+\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\tau)$$

$$+\frac{\bar{d}}{dt}G_M=0, \tag{36}$$

而当系统脱离约束时,满足结构方程

$$X^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\tau+X^{(1)}[X^{(1)}(L)]$$

$$+X^{(1)}(Q_s)(\xi_s-\dot{q}_s\tau)$$

$$+\frac{\bar{d}}{dt}G_M=0. \tag{37}$$

则相应完整系统的 Mei 对称性直接导致 Mei 守恒量,形如

$$I_M=X^{(1)}(L)\tau+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\tau)$$

$$+G_M=\text{const}. \tag{38}$$

证　若系统处于约束上,将(38)式按方程(9)对时间求导,利用结构方程(36)和 Mei 对称性的判据方程(25),有

$$\begin{aligned}\frac{\bar{d}}{dt}I_M=&\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s}+A_s\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\right)\tau\\&+X^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\tau+\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\right)(\xi_s-\dot{q}_s\tau)\\&+\frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s}\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{d}}{dt}\tau-A_s\tau\right)+\frac{\bar{d}}{dt}G_M\\=&X^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\tau+X^{(1)}[X^{(1)}(L)]\\&+X^{(1)}(Q_s)(\xi_s-\dot{q}_s\tau)+X^{(1)}(\Lambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\tau)\\&+\frac{\bar{d}}{dt}G_M\\=&0.\end{aligned} \tag{39}$$

若系统脱离约束,将(38)式按方程(11)对时间求导,利用结构方程(37)和 Mei 对称性的判据方程(26),同理可得

$$\frac{\bar{d}}{dt}I_M=0,$$

故有守恒量(38).证毕.

命题 6　对于单面非 Chetaev 型非完整系统,如果无限小生成元 τ,ξ_s 满足 Mei 对称性判据方程(25),(26),以及限制方程(27),且存在规范函数 $G_M=G_M(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,使得结构方程(36),(37)成立,则系统的 Mei 对称性直接导致 Mei 守恒量(38).

命题 7　对于单面非 Chetaev 型非完整系统,如果弱(强)Lie 对称性的生成元 τ,ξ_s 满足 Mei 对称性判据方程(25),(26),且存在规范函数 $G_M=G_M(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得结构方程(36),(37)成立,则 Lie 对称性导致 Mei 守恒量(38).

7. 算 例

系统的 Lagrange 函数为[6]

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \tag{40}$$

非势广义力

$$Q_1 = Q_2 = 0, \tag{41}$$

其运动受有单面非 Chetaev 型非完整约束

$$\varphi = \dot{q}_1 - bt\dot{q}_2 + bq_2 + t \geqslant 0, \tag{42}$$

当系统处于约束上时,满足虚位移方程

$$\delta q_1 - \delta q_2 = 0. \tag{43}$$

试研究系统的非 Noether 守恒量,

方程(4)给出

$$\ddot{q}_1 = \lambda, \ddot{q}_2 = -\lambda. \tag{44}$$

若系统处于约束上,即约束(42)式取等号,此时与方程(44)联立,可得到

$$\lambda = -\frac{1}{1+bt}, \tag{45}$$

于是有

$$\Lambda_1 = -\frac{1}{1+bt}, \Lambda_2 = \frac{1}{1+bt}. \tag{46}$$

方程(9)给出

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{1+bt}, \ddot{q}_2 = \frac{1}{1+bt}. \tag{47}$$

而当系统脱离约束时,方程(11)给出

$$\ddot{q}_1 = 0, \ddot{q}_2 = 0. \tag{48}$$

系统的 Lie 对称性确定方程(17),(18)给出

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 - \dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\tau + \frac{2}{1+bt}\frac{\bar{d}}{dt}\tau \\
&= \frac{b}{(1+bt)^2}\tau, \\
&\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 - \dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\tau - \frac{2}{1+bt}\frac{\bar{d}}{dt}\tau \\
&= -\frac{b}{(1+bt)^2}\tau, \text{当 } \varphi = 0,
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 - \dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\tau = 0, \\
&\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 - \dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\tau = 0, \text{当 } \varphi > 0,
\end{aligned} \tag{50}$$

限制方程(19)给出

$$\begin{aligned}
&(1 - b\dot{q}_2)\tau + b\xi_2 + \frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 - \dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\tau \\
&- bt\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 - \dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\tau\right) = 0. \text{当 } \varphi = 0,
\end{aligned} \tag{51}$$

附加限制方程(20)给出

$$\xi_1 - \dot{q}_1\tau - \xi_2 + \dot{q}_2\tau = 0, \text{当 } \varphi = 0, \tag{52}$$

方程(49),(50)有解

$$\tau = 0, \xi_1 = \xi_2 = t - \frac{1}{b}, \tag{53}$$

生成(53)式满足限制方程(51)和附加限制方程(52),它对应系统的 Lie 对称性.

(28)式和(29)式给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln G_H = 0, \tag{54}$$

它有解

$$G_H = t\dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_1 - q_2. \tag{55}$$

由(53)式和(55)式,利用命题 1,得到 Hojman 守恒量

$$I_H = \frac{2}{b}(t\dot{q}_1 + t\dot{q}_2 - q_1 - q_2)^{-1} = \text{const}. \tag{56}$$

并有

$$\begin{aligned}
X^{(1)}(L) &= \dot{q}_1\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 - \dot{q}_1\frac{\bar{d}}{dt}\tau\right) \\
&\quad + \dot{q}_2\left(\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 - \dot{q}_2\frac{\bar{d}}{dt}\tau\right), \\
X^{(1)}(\Lambda_1) &= \frac{b}{(1+bt)^2}\tau, \\
X^{(1)}(\Lambda_2) &= -\frac{b}{(1+bt)}\tau.
\end{aligned} \tag{57}$$

取生成元为

$$\tau = 0, \xi_1 = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 - bt, \xi_2 = 1, \tag{58}$$

则有

$$\begin{aligned}
&X^{(1)}(L) = -b\dot{q}_1, \\
&X^{(1)}(\Lambda_1) = X^{(1)}(\Lambda_2) = 0.
\end{aligned} \tag{59}$$

由判据 2,生成元(58)式对应系统的 Mei 对称性.将(58)式和(59)式代入结构方程(35),(36),得

$$G_M = -b^2 t, \tag{60}$$

由(37)式,得到系统的 Mei 守恒量

$$I_M = -b(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) = \text{const}. \tag{61}$$

8. 结 论

由单面非 Chetaev 型非完整约束系统的 Lie 对称性可以直接导致 Hojman 守恒量,由 Mei 对称性可以间接导致 Hojman 守恒量;由系统的 Mei 对称性可以直接导致 Mei 守恒量,由 Lie 对称性可以间接导致 Mei 守恒量.本文给出了由系统的对称性导致 Hojman 守恒量和 Mei 守恒量的条件以及守恒量的

形式.主要结果是命题 1—7.

当系统始终处于约束时,单面约束成为双面约束,系统成为双面非完整约束系统;当系统始终脱离约束时,系统成为非保守力学系统.因此本文结果具有普遍意义.另一方面,命题 1—7 也表明:尽管单面约束系统的 Hojman 守恒量(30)式和 Mei 守恒量(38)式在形式上与双面非完整系统、非保守系统是一致的,但是由于存在单面约束,由系统的对称性导致守恒量的条件更加严格,这些条件大大限制了无限小变换生成元的选择范围,从而导致守恒量数目的减少以及寻找守恒量的困难.

[1] Lutzky M 1979 *J. Phys. A:Math. Gen.* **12** 973

[2] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) p1 [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京:北京工业大学出版社)第 1 页]

[3] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech. Sin.* **26** 380 (in Chinese) [赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]

[4] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p90 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)第 90 页]

[5] Zhang Y, Mei F X 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1354

[6] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p1 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京:北京理工大学出版社)第 1 页]

[7] Hojman S A 1992 *J. Phys. A:Math. Gen.* **25** L291

[8] Zhang Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 461 (in Chinese) [张 毅 2002 物理学报 **51** 461]

[9] Mei F X 2002 *Chin. Sci. Bull.* **47** 2049

[10] Mei F X 2003 *J. Beijing Inst. Technol.* **23** 1 (in Chinese) [梅凤翔 2003 北京理工大学学报 **23** 1]

[11] Wang S Y, Shang M, Mei F X 2003 *J. Beijing Inst. Technol.* **23** 271 (in Chinese) [王树勇、尚 玫、梅凤翔 2003 北京理工大学学报 **23** 271]

[12] Zhang H B, Chen L Q, Gu S L 2004 *Acta Mech. Sin.* **36** 254 (in Chinese) [张宏彬、陈立群、顾书龙 2004 力学学报 **36** 254]

[13] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 357

[14] Luo S K, Jia L Q 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **40** 265

[15] Fang J H, Peng Y, Liao Y P, Li H 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 440

[16] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[17] Wang S Y, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[18] Fang J H, Yan X H, Chen P S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1561 (in Chinese) [方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[19] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449

[20] Zhang Y, Mei F X 2003 *Chin. Phys.* **12** 1058

[21] Zhang Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3644 (in Chinese) [张 毅 2004 物理学报 **53** 3644]

Non-Noether conserved quantities for systems with unilateral non-Chetaev nonholonomic constraints*

Zhang Yi†

(*Department of Civil Engineering, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou* 215011, *China*)

(Received 21 April 2005; revised manuscript received 6 June 2005)

Abstract

This paper studies the symmetries and non-Noether conserved quantities of mechanical systems with unilateral non-Chetaev nonholonomic constraints. The differential equations of motion of the systems are established, and the definitions and criterions of Lie symmetry and Mei symmetry are given. For the unilateral non-Chetaev nonholonomic constraint system, it is proved that under some conditions a new conserved quantity called Hojman conserved quantity can be directly deduced from Lie symmetry, and a new conserved quantity called Mei conserved quantity can be directly deduced from Mei symmetry. The relations between the symmetries and the new conserved quantities are researched. At the end of the paper, an example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: analytical mechanics, unilateral constraint, nonholonomic system, symmetry, Hojman conserved quantity, Mei conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the Natural Science Foundation of High Education of Jiangsu Province, China (Grant No. 04KJA130135) and the 'Qing Lan' Project Foundation of Jiangsu Province, China.

† E-mail: weidiezh@pub.sz.jsinfo.net