第 55 卷 第 2 期 2006 年 2 月
1000-3290/2006/55(02)/0525-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.2, February, 2006

第二类 Pöschl-Teller 势场中相对论粒子的束缚态

张民仓† 王振邦

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 西安 710062)

(2005 年 6 月 16 日收到; 2005 年 7 月 16 日收到修改稿)

给出了具有第二类 Pöschl-Teller 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解, 其解可用超几何函数表示.

关键词: 第二类 Pöschl-Teller 势, Klein-Gordon 方程, Dirac 方程, 束缚态

PACC: 0365

1. 引 言

在强耦合条件下, 势场中的运动粒子的相对论效应变得十分重要[1,2]. 而在考虑到相对论效应时, 处于势场中的运动粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程描述, 因而近年来, 寻找在典型势场中 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态解引起了人们的广泛兴趣, 并且在标量势等于或大于矢量势的条件下得到了不少有意义的结论[3—16]. Pöschl-Teller 势[17]是一种重要的双原子分子势, 第一类 Pöschl-Teller 势即 Pöschl-Teller 三角函数势及修正 Pöschl-Teller 势(其中参数取自然数时也称无反射势)的 Schrödinger 方程的束缚态解已经得到[18,19]. 在标量势等于矢量势的条件下, 第一类 Pöschl-Teller 势、修正 Pöschl-Teller 势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态解也已获得[20,21]. 第二类 Pöschl-Teller 势即 Pöschl-Teller 双曲函数势为[22]

$$V(r) = \alpha^2\left[\frac{\nu(\nu-1)}{\sinh^2\alpha r} - \frac{\mu(\mu+1)}{\cosh^2\alpha r}\right]. \tag{1}$$

其中 ν, μ 分别是无量纲参数. 文献[22,23]已给出了第二类 Pöschl-Teller 势的 Schödinger 方程的束缚态和散射态解. 本文考虑粒子在第二类 Pöschl-Teller 势场中的相对论效应, 并在标量势等于矢量势的条件下, 分别得到了第二类 Pöschl-Teller 势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解, 给出了 s 波束缚态满足的能谱方程及相应的波函数.

2. 第二类 Pöschl-Teller 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解

文献[3]指出, 具有标量势 $S(r)$ 和矢量势 $V(r)$ 的 s 波 Klein-Gordon 方程为($\hbar = c = 1$)

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + [E - V(r)]^2 - [M + S(r)]^2\right\}u(r) = 0, \tag{2}$$

其中粒子的径向波函数 $R(r)$ 与 $u(r)$ 的关系为

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}. \tag{3}$$

对于第二类 Pöschl-Teller 势, 在标量势等于矢量势的条件下, 即在取

$$S(r) = V(r) = \frac{A}{\sinh^2\alpha r} - \frac{B}{\cosh^2\alpha r} \tag{4}$$

时, s 波的 Klein-Gordon 方程为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + [E^2 - M^2] - 2(E+M)\left[\frac{A}{\sinh^2\alpha r} - \frac{B}{\cosh^2\alpha r}\right]\right\}u(r) = 0. \tag{5}$$

作变换

$$y = \cosh^2\alpha r, \tag{6}$$

$$a^2 = \frac{M^2 - E^2}{\alpha^2}, \tag{7}$$

$$2(E+M)A = \alpha^2\nu(\nu-1), \tag{8}$$

$$2(E+M)B = \alpha^2\mu(\mu+1). \tag{9}$$

---

† 通讯联系人. E-mail: mincangzhang@snnu.edu.cn

则方程(5)变为

$$y(1-y)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}u(y)+\left(\frac{1}{2}-y\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u(y)+\frac{1}{4}\left[a^2-\frac{\nu(\nu-1)}{1-y}-\frac{\mu(\mu+1)}{y}\right]u(y)=0. \quad (10)$$

考虑到方程(10)有三个奇点($y=0,1,\infty$),可设方程(10)的解为

$$u(y)=y^{\lambda}(1-y)^{\nu/2}f(y). \quad (11)$$

把(11)式代入方程(10)可得

$$y(1-y)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}f(y)+\left[\frac{1}{2}+2\lambda-y(2\lambda+\nu+1)\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u(y)+\frac{1}{4}[a^2-(2\lambda+\nu)^2]f(y)=0. \quad (12)$$

式中无量纲参数 λ 应满足关系式

$$\lambda=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{1+4\mu(\mu+1)}. \quad (13)$$

方程(12)为超几何方程,其解可用超几何函数表示为[24]

$$f(y)\sim {}_2F_1(i,j,k,y). \quad (14)$$

其中

$$i=\frac{1}{2}(a+2\lambda+\nu), \quad (15)$$

$$j=\frac{1}{2}(-a+2\lambda+\nu), \quad (16)$$

$$k=\frac{1}{2}+2\lambda. \quad (17)$$

由于 $r\to\pm\infty$ 时,$y\to\infty$,为使得 $y\to\infty$ 时,方程(12)的解满足束缚态的要求,利用超几何函数的变换关系

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma,z)=(1-z)^{-\alpha}{}_2F_1\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{z}{z-1}\right), \quad (18)$$

(14)式可改写为

$$f(y)\sim(1-y)^{-i}{}_2F_1\left(i,k-j,k,\frac{y}{y-1}\right). \quad (19)$$

(19)式为$\frac{y}{y-1}$的幂级数.为满足 $y\to\infty$ 时,波函数趋于零(束缚态),(19)式必须中断为一个多项式,即要求

$$i=-n, \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad (20)$$

或

$$k-j=-n. \quad (n=1,2,3,\cdots) \quad (21)$$

虽然超几何函数对于交换参数 i 和 k-j 是不变的,但对(19)式只有第二个条件符合要求,即

$$k-j=\frac{1}{2}(1+a+2\lambda-\nu)=-n \quad (n=1,2,3,\cdots). \quad (22)$$

由(7)式,(13)式和(22)式可得

$$2\nu-2\sqrt{\frac{M^2-E^2}{\alpha^2}}-\sqrt{1+4\mu(\mu+1)}=4n+3. \quad (23)$$

(23)式即为具有相等的第二类 Pöschl-Teller 标量势与矢量势的 s 波 Klein-Gordon 方程的束缚态满足的能谱方程,相应的束缚态波函数为(未归一化)

$$u_n(y)=y^{\lambda}(1-y)^{\frac{\nu}{2}-i}{}_2F_1\left(i,k-j,k,\frac{y}{y-1}\right). \quad (24)$$

即

$$u_n(r)=(-1)^{\frac{\nu}{2}-i}\cosh^{2\lambda}(\alpha r)\sinh^{\nu-2i}(\alpha r)\times{}_2F_1(i,k-j,k,\coth^2(\alpha r)). \quad (25)$$

3. 第二类 Pöschl-Teller 标量势与矢量势的 Dirac 方程的 s 波束缚态解

文献[5]指出,具有标量势 $S(r)$和矢量势 $V(r)$的 Dirac 方程为($\hbar=c=1$)

$$\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta[M+S(r)]\}\psi=[E-V(r)]\psi. \quad (26)$$

在相对论情况下,中心力场中粒子的守恒量完全集可取为$(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z)$,$(\boldsymbol{H},\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z)$的共同本征函数为[25]

$$\psi=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}f_{n,K}(r)\phi^A_{jm_j}\\ \mathrm{i}g_{n,K}(r)\phi^B_{jm_j}\end{pmatrix} \quad (\text{当 } K=j+\frac{1}{2}\text{ 时}), \quad (27)$$

$$\psi=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}f_{n,K}(r)\phi^B_{jm_j}\\ \mathrm{i}g_{n,K}(r)\phi^A_{jm_j}\end{pmatrix} \quad (\text{当 } K=-(j+\frac{1}{2})\text{ 时}). \quad (28)$$

其中

$$\phi^A_{jm_j}=\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{j+m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{j-m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$

$$\phi^B_{jm_j}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{j-m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\frac{j+m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}. \quad (29)$$

把(27)式或(28)式代入(26)式,可以分离出 Dirac 方程的径向部分为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{K}{r}f=[M+E+S(r)-V(r)]g,\quad(30)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{K}{r}g=[M-E+S(r)+V(r)]f,\quad(31)$$

对于第二类 Pöschl-Teller 势,在标量势等于矢量势时,即在满足(4)式的条件下,方程(30)和方程(31)变为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{K}{r}f=(M+E)g,\qquad(32)$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{K}{r}g=\left\{(M-E)+2\left(\frac{A}{\sinh^2\alpha r}-\frac{B}{\cosh^2\alpha r}\right)\right\}f.\qquad(33)$$

把(32)式代入(33)式消去 g 可得

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+(E^2-M^2)-2(E+M)\left(\frac{A}{\sinh^2\alpha r}-\frac{B}{\cosh^2\alpha r}\right)-\frac{K(K-1)}{r^2}\right]f(r)=0.\qquad(34)$$

对于 s 波,即当 $K=1$ 时,方程(34)变为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+(E^2-M^2)-2(E+M)\left(\frac{A}{\sinh^2\alpha r}-\frac{B}{\cosh^2\alpha r}\right)\right]f(r)=0.\qquad(35)$$

方程(35)与方程(5)完全类似,于是立即可得

$$2\nu-2\sqrt{\frac{M^2-E_{n,1}^2}{\alpha^2}}-\sqrt{1+4\mu(\mu+1)}=4n+3.\qquad(36)$$

(36)式为具有相等的第二类 Pöschl-Teller 标量势与矢量势的 Dirac 方程的 s 波束缚态满足的能谱方程,与 $E_{n,1}$ 相应的束缚态波函数的 $f_{n,1}$ 分量为(未归一化)

$$f_{n,1}(r)=(-1)^{\frac{\nu}{2}-i}\cosh^{2\lambda}(\alpha r)\sinh^{\nu-2i}(\alpha r)\times{}_2F_1(i,k-j,k,\coth^2(\alpha r)).\qquad(37)$$

由(32)式可求出与 $E_{n,1}$ 相应的束缚态波函数的 $g_{n,1}$ 分量为(未归一化)

$$\begin{aligned}g_{n,1}(r)=&\frac{(-1)^{\frac{\nu}{2}-i}}{M+E_{n,1}}\cosh^{2\lambda-1}(\alpha r)\sinh^{\nu-2i-1}(\alpha r)\\&\times\{[2\lambda\alpha\sinh^2(\alpha r)+(\nu-2i)\alpha\cosh^2(\alpha r)\\&-\frac{1}{r}\cosh(\alpha r)\sinh(\alpha r)]\\&\times{}_2F_1(i,k-j,k,\coth^2\alpha r)\\&-\frac{2i(i-j)\alpha}{k}\coth^2(\alpha r)\\&\times{}_2F_1(i+1,k-j+1,k\\&+1,\coth^2\alpha r)\}.\end{aligned}\qquad(38)$$

把 $f_{n,1}(r)$和 $g_{n,1}(r)$代入(27)式,即可给出具有相等的第二类 Pöschl-Teller 标量势和矢量势的 Dirac 方程的 s 波旋量波函数.

4. 结　论

综上所述,具有相等的第二类 Pöschl-Teller 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解可以严格地求出,即在与通常非相对论量子力学的双原子分子问题中处理第二类 Pöschl-Teller 势相同的近似条件下,s 波的 Klein-Gordon 方程能够转化为超几何方程,由超几何函数的变换关系可以得到其满足边界条件的束缚态解.并且 s 波的 Dirac 方程的 f 分量所满足的方程与 s 波的 Klein-Gordon 方程完全类似,其解可用相同的方法得到,从而可求出 s 波的 Dirac 方程的 g 分量,由此获得 Dirac 方程的 s 波束缚态旋量波函数.

[1] Greiner W, Müller B, Rafelski J 1985 *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (New York :Spring-Verlag)

[2] Wang R C, Wang C Y 1988 *Phys. Rev.* D **38** 348

[3] Dominguez-Adame F 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[4] Talukdar B, Yunus A, Amin M R 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326

[5] Hu S Z, Su R K 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1201 (in Chinese)[胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[6] Hou C F, Li Y, Zhou Z X, Zi Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1999 (in Chinese)[候春风、李　炎、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[7] Hou C F, Zhou Z X, Zi Y 1999 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **8** 561

[8] Gou J Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1453 (in Chinese)[郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[9] Qiang W C 2002 *Chin. Phys.* **11** 757

[10] Chen G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 680 (in Chinese)[陈　刚 2004 物理学报 **53** 680]

[11] Chen G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 684 (in Chinese)[陈　刚 2004 物理学报 **53** 684]

[12] Lalit K. Sharma, Joseph Fiase 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1983
[13] Zhang X A, Chen K, Duan Z L 2005 *Chin. Phys.* **14** 42
[14] Lu F L, Chen C Y, Sun D S 2005 *Chin. Phys.* **14** 463
[15] Li N, Ju G X, Ren Z Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2520 (in Chinese) [李 宁、鞠国兴、任中洲 2005 物理学报 **54** 2520]
[16] Chen Z D, Chen G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2524 (in Chinese) [陈子栋、陈 刚 2005 物理学报 **54** 2524]
[17] Pöschl G, Teller E 1933 *Z. Physik* **83** 143
[18] Flügge S 1974 *Practical Quantum Mechanics* Vol. I (Berlin: Springer)
[19] Chen C Y, Hu S Z 1995 *Acta Phys. Sin.* **44** 9 (in Chinese) [陈昌远, 胡嗣柱 1995 物理学报 **44** 9]
[20] Chen G 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1651 (in Chinese) [陈 刚 2001 物理学报 **50** 1651]
[21] Chen G, Lou Z M 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1071 (in Chinese) [陈刚、楼智美 2003 物理学报 **52** 1071]
[22] Infeld I, Hull T E 1951 *Rev. Mod. Phys* **23** 21
[23] Barut A O, Akira Inomata, Raj Wilson 1987 *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** 4083
[24] Wang Z X, Guo D R 2000 *Introdution to Special Function* (Beijing: Peking Univ. Press) (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论 (北京: 北京大学出版社)]
[25] Zeng J Y 1997 *Quantum Mechanics* Vol Ⅱ, 2nd (Beijing: Science Press) (in Chinese) [曾谨言 1997 量子力学卷Ⅱ 第二版(北京: 科学出版社)]

Bound states of relativistic particles in the second Pöschl-Teller potentials

Zhang Min-Cang† Wang Zhen-Bang
(*School of Physics and Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an* 710062, *China*)
(Received 16 June 2005; revised manuscript received 16 July 2005)

Abstract

The s-wave bound states of the Klein-Gordon equation and Dirac equation with the Second Pöschl-Teller scalar and vector potentials are obtained, and the solutions are expressed in terms of hypergeometric function.

Keywords: Second Pöschl-Teller potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation, bound state
PACC: 0365

† Corresponding author. E-mail: mincangzhang@snnu.edu.cn