

# 非对称的玻色-爱因斯坦凝聚中的约瑟夫森结 的动力学性质\*

肖宇飞<sup>1)</sup> 王登龙<sup>1)†</sup> 王凤姣<sup>1)</sup> 颜晓红<sup>1)2)</sup>

1) 湘潭大学物理系和现代物理研究所, 湘潭 411105)

2) 南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

(2005 年 6 月 1 日收到, 2005 年 7 月 12 日收到修改稿)

利用半经典量子理论, 研究了玻色-爱因斯坦凝聚体处于非对称的约瑟夫森结的动力学行为. 结果表明双势阱中不同势阱的基态能量差与其相互作用能量的比率  $\chi = 0$  时, 凝聚体表现为约瑟夫森效应; 当  $\chi \neq 0$  时, 凝聚体中既存在量子宏观隧穿效应, 又存在量子宏观局域效应.

关键词: 玻色爱因斯坦凝聚, 约瑟夫森结, 动力学性质

PACC: 0530J, 6320P, 7450

## 1. 引 言

1997 年, Andrews 等<sup>[1]</sup>利用凝聚体的吸收谱来确定粒子的密度, 就可得出双势阱中的粒子数之差  $z$ ; Hall 等<sup>[2]</sup>通过在一个随时间变化的分离振荡场中使用双声子耦合脉冲来测量凝聚体的相对相位, 因此实验上就可观察到玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)约瑟夫森(Josephson)结的动力学行为. 这使不同于单体 BEC<sup>[3,4]</sup>的两体和多体 BEC 相互作用的一系列新性质成为目前凝聚态物理的研究热点之一. 实验上把 BEC 装载于一个双势阱中, 然后让其自由扩散, 就可以观察到两体 BEC 的一系列现象. Shin 等<sup>[5]</sup>观察了凝聚体间隔在 13—5000  $\mu\text{m}$  范围内的相干相位演化行为, 成功地检测到由约瑟夫森效应引起的非线性的振荡信号; Wang 等<sup>[6]</sup>观察到原子的迈克尔逊(Michelson)干涉现象. 理论上, 物理学家对两体和多体 BEC 的相干过程的动力学行为也进行了广泛的研究, 如 Liu 等<sup>[7]</sup>利用反散射方法结合数值模拟研究了囚禁于双势阱中的 BEC 的相干动力学性质, 而且, 阐明了在垂直重力场作用下光晶格势阱中的 BEC 中的量子隧穿的物理机制<sup>[8]</sup>. Salmond 等<sup>[9]</sup>运用两模式展开方法结合 Floquet 算符解释了在弱周期调制势阱中的 BEC 中的量子隧穿行为动力学性

质. Garnier 等<sup>[10]</sup>采用椭圆函数方法结合数值模拟讨论随机外部力作用下两个弱耦合 BEC 的动力学行为; Xu 等<sup>[11]</sup>运用有效化学势研究了三维光晶格中 BEC 的干涉演化行为.

众所周知, 描述囚禁于耦合的双势阱中玻色-爱因斯坦凝聚体的相位相干状态参量为: 双势阱中的粒子数之差  $z$  和及其相对相位差  $\phi$ . Garnier 等<sup>[10]</sup>认为, 囚禁于双势阱中的原子会产生周期性的振荡行为, 引起原子在双势阱之间迁移, 从而使处于约瑟夫森结中的粒子表现出不同的动力学行为: 当一个周期内双势阱之间交换的粒子数相等, 即  $z = 0$ , 则表现为约瑟夫森效应; 当一个周期内双势阱之间交换的粒子数不相等, 部分粒子局域在其中的一个势阱底部做小幅度的振荡, 即  $z \neq 0$ , 这就成为宏观量子局域效应. Smerzi 等<sup>[12,13]</sup>在对称 BEC 的约瑟夫森结(双势阱中不同势阱的基态能量差与其相互作用能的比率  $\chi = 0$ )中通过运用半经典量子理论研究了双势阱中的量子宏观现象的动力学行为: 在一个周期内双势阱之间交换的粒子数相等, 其相对相位差的时间平均值为零  $\phi = 0$ , 即所谓的零相位模式; 在一个周期内在双势阱之间交换的粒子数相等, 其相对相位差的时间平均值为  $\phi = \pi$ , 即所谓的  $\pi$  相位模式. 在此基础上, 本文利用半经典量子理论研究弱相互作用下的非对称的 BEC 的约瑟夫森结( $\chi \neq 0$ )

\* 教育部重点项目(批准号 204099)湖南省教育厅一般项目(批准号 03C466 和 04C662)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: dlwang@xtu.edu.cn

时的动力学行为.

## 2. 两模式近似下的非对称 BEC 的约瑟夫森结动力学方程

根据平均场理论,囚禁于非对称的约瑟夫森结的玻色-爱因斯坦凝聚体的 Gross-Pitaevskii 方程

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r,t) + [V_{\text{ext}}(r) + g |\Psi(r,t)|^2] \Psi(r,t), \quad (1)$$

其中,  $\Psi(r,t)$  是凝聚体的波函数,  $V_{\text{ext}}$  表示凝聚体所处的外部势阱,  $m$  为玻色子的质量,  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$  为非线性相互作用常数(  $a$  为原子的 s 波散射长度). 处于非对称约瑟夫森结的玻色子可以相互隧穿,而总的粒子数保持守恒. 由于约瑟夫森结中的凝聚体的密度很小, 粒子之间的非线性相互作用可以忽略不计, 从而使得线性叠加原理仍然适用于描述约瑟夫森结的状态. 粒子总的波函数就可以由两个势阱的波函数线性叠加组成. 在此利用广泛采用的两模式模型<sup>[13,14]</sup>, 方程 (1) 的波函数可化为

$$\Psi(r,t) = \psi_1(t)\phi_1(r) + \psi_2(t)\phi_2(r), \quad (2)$$

其中,  $\psi_1 = \sqrt{N_1} e^{i\theta_1(t)}$ ,  $\psi_2 = \sqrt{N_2} e^{i\theta_2(t)}$  是不同势阱中的随时间变化的波函数,  $N_1, N_2$  是不同势阱中的粒子数,  $\theta_1(t), \theta_2(t)$  是不同势阱中的凝聚体的位相,  $\phi_1(r), \phi_2(r)$  是不同势阱中随空间变化的波函数. 则整个体系的总粒子数  $N_T = N_1 + N_2$ .

把方程 (2) 代入方程 (1) 就可以得出体系的动态方程

$$i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = (E_1^0 + U_1 N_1) \psi_1 - k \psi_2, \quad (3)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = (E_2^0 + U_2 N_2) \psi_2 - k \psi_1, \quad (4)$$

其中

$$E_i^0 = \int \left( \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi_i|^2 + |\Psi_i|^2 V_{\text{ext}} \right) dr,$$

$$U_i = \int g |\Psi_i|^4 dr \quad (i = 1, 2),$$

$$k \approx - \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \Psi_1 \nabla \Psi_2 + \Psi_1 V_{\text{ext}} \Psi_2) \right] dr$$

分别为不同势阱中的零点能、不同势阱中的单个粒子在平均场近似下的自相互作用能、不同势阱中的粒子的耦合强度. 在此, 不同势阱中的凝聚体之间的粒子数之差及其相对相位定义为

$$\alpha(t) = (N_1(t) - N_2(t))/N_T, \quad (5)$$

$$\phi(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t). \quad (6)$$

利用变换  $i2k/\hbar \rightarrow t$ , 处于不同势阱中的 BEC 的约瑟夫森结的动力学方程为

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = -\sqrt{1 - z^2(t)} \sin[\phi(t)], \quad (7)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \chi + \Lambda \alpha(t) + \frac{\alpha(t)}{\sqrt{1 - z^2(t)}} \times \cos[\phi(t)], \quad (8)$$

其中  $\chi = (E_1^0 - E_2^0)/2k + (U_1 - U_2)N_T/4k$ ,  $\Lambda = (U_1 + U_2)N_T/4k$  分别为双势阱中不同势阱的基态能量差与其相互作用能的比率、不同势阱的相互作用强度参数. 整个体系的总能量

$$H = \frac{\Lambda z^2}{2} + \chi z - \sqrt{1 - z^2} \cos\phi. \quad (9)$$

基于体系能量守恒, 体系的能量也可表述为

$$H = \frac{\Lambda \alpha(0)^2}{2} + \chi \alpha(0) - \sqrt{1 - \alpha(0)^2} \cos[\phi(0)], \quad (10)$$

其中,  $\alpha(0)$  和  $\phi(0)$  是 BEC 的粒子数之差和相对相位的初始状态.

## 3. 零相位模式和 $\pi$ 相位模式的数值模拟

从方程 (10) 可以看出: 体系的动力学行为由  $\Lambda$  和  $\chi$  来确定, 其具体关系如图 1. 在图 1 中我们示出了两势阱的初始相对相位差为零时  $\chi$  随  $\Lambda$  的变化情况. 图中的直线为 BEC 的总能量为 1 ( $E = 1$ ) 的状态的集合, 是 BEC 的非对称约瑟夫森结中由稳定的零相位模式与无规则相位振荡模式之间的过渡态, 直线下方是稳定的零相位模式 (SZM), 粒子的相位在  $\varphi = 0$  的附近表现为周期性的振荡行为, 如图 1(a) 所

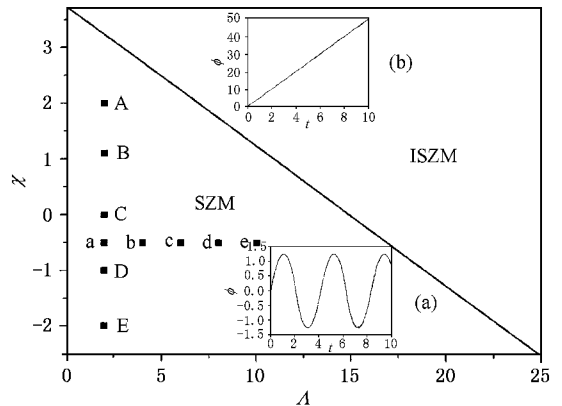


图 1 在  $\alpha(0) = 0.5, \phi(0) = 0$  时, 不同势阱中的粒子基态能量差与其相互作用能的比率  $\chi$  和相互作用强度参数  $\Lambda$  的关系

示,直线上方则为无规则的相位振荡模式( ISZM ),随着  $\Delta$  增强和  $\chi$  的增大,粒子的非线性效应增强,从而破坏了粒子相位的周期性运动,导致凝聚体的相对相位不再在固定的相位附近振荡,而是表现出以  $2\pi$  的形式递增(如图 1(b)所示).在 SZM 区,数值模拟了宏观量子动力学行为,如图 2 所示.图 2(a)中 A, B, C, D, E 曲线的参数  $\chi$  和  $\Delta$  分别对应于图 1 中的 A, B, C, D, E 点.从图 2(a)中可以看出,当  $\chi = 0$  (图 2(a)中的 C 线)时, BEC 的约瑟夫森结就表现出周期性的振荡行为,在一个周期内在双势阱之间交换的粒子数相等,即 Josephson 现象;当  $\chi \neq 0$  时,数值模拟了  $\chi = 2.0, 1.1, -1.0, -2.0$  (分别对应于图 2(a)中的 A, B, D, E 线)时的动态振荡行为,可看出双势阱之间交换的粒子数不再相等:  $z \neq 0$ .当体系从  $\chi = 2.0 \rightarrow 1.1$  (A 线  $\rightarrow$  B 线)的变化过程中,部分粒子局域在一个势阱底部作小幅度的振荡,其粒子数逐渐减少,这意味着此时参与隧穿运动的粒子数增多,粒子逐渐向另一个势阱转移;当体系从  $\chi = 1.1 \rightarrow 0$  (B 线  $\rightarrow$  C 线)的变化过程中,从整个体系来看,粒子仍然局域在原来势阱中运动,但其转移的方向与上述的情况相反;当体系从  $\chi = 0 \rightarrow -2.0$  (C 线  $\rightarrow$  E 线)的变化过程中,部分粒子开始局域在另一个势

阱底部作小幅度的振荡,其粒子数逐渐增多,此时参与隧穿的粒子也相应的增多,处于一个势阱中的粒子通过隧穿运动向另一个势阱转移.总之,当势阱的能量差不为零时,粒子表现出宏观量子局域现象,而局域的粒子则通过宏观量子隧穿来转移,从而实现宏观量子局域现象和宏观量子隧穿现象并存.类似地,图 2(b)中 a, b, c, d, e 曲线的参数  $\chi$  和  $\Delta$  分别对应于图 1 中的 a, b, c, d, e 点.从图 2(b)中可以看出,当 BEC 相互作用强度  $\Delta = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0$  (对应于图 1 中的 a, b, c, d, e 点)时的动态振荡行为.在  $\Delta = 2.0 \rightarrow 10.0$  (a 线  $\rightarrow$  e 线)的变化过程中,由于粒子间的相互作用增强,引起粒子的非线性运动,叠加在体系的周期性振荡运动中,导致 BEC 的振荡频率变小.

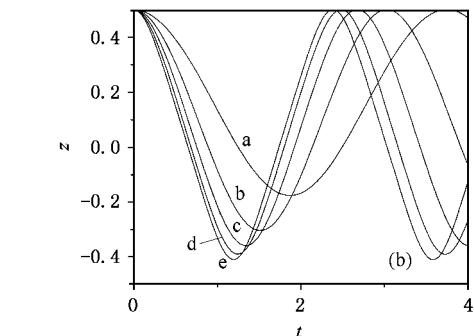
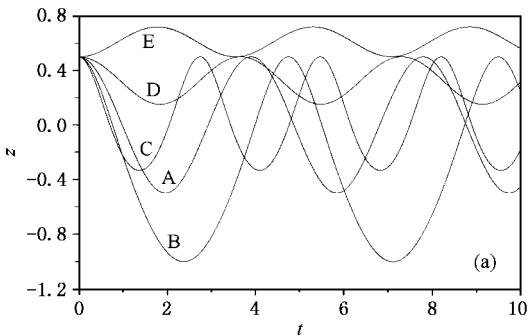


图 2 在  $\alpha(0) = 0.5, \beta(0) = 0$  时 (a)  $\Delta = 2.0, \chi$  取不同值时; (b)  $\chi = -1.5, \Delta$  取不同值时不同势阱中粒子数之差  $z$  随时间  $t$  的演化关系

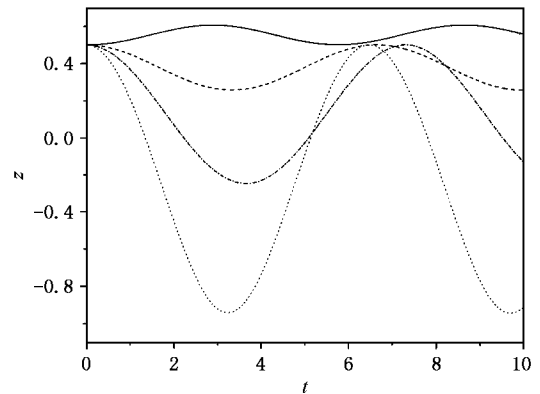


图 3 在  $\alpha(0) = 0.5, \beta(0) = \pi, \Delta = 0.2$  时  $\chi$  取不同值不同势阱中粒子数之差  $z$  随时间  $t$  的演化关系(实线、虚线、点划线和点线分别表示  $\chi = 0.5, 0.3, 0.1, -0.3$ )

与图 1 相类似,数值模拟了当 BEC 的初始状态  $\alpha(0) = 0.5, \beta(0) = \pi$  时的量子宏观局域现象,如图 3 所示.与零相位不同的是,由于 BEC 的约瑟夫森结中  $\chi$  的存在,改变了粒子的能量本征态,使得体系的非线性效应增强,破坏了双势阱的相对相位的稳定性,使得方程(10)不再成为判断相位稳定振荡的条件,只有当  $\chi$  和  $\Delta$  在零附近时,才会出现稳定  $\pi$  相位模式.从图中可以看出,当  $\chi = 0.5, 0.3, 0.1, -0.3$  时动态振荡行为,其情况与零相位模式相类似,但在总粒子数不变时,粒子数随  $\chi$  的减少在双势阱中变化情况与零相位模式相反,但没出现局域在一个势阱中粒子数先增大后减少的情况.

## 4. 结 论

本文研究了囚禁于非对称玻色-爱因斯坦凝聚体中的约瑟夫森结的动力学行为,得到了在体系的总能量  $E < 1$  时与对称双势阱中的约瑟夫森效应相

类似的稳定零相位模式,同时当  $\chi$  和  $\Lambda$  两者接近于零时则具有稳定的  $\pi$  相位模式.然后,通过数值模拟了其运动的动力学性质,得到了非对称 BEC 会抑制量子宏观隧穿运动,使双势阱中的部分粒子表现出宏观量子局域现象;BEC 的相互作用强度的增强会导致 BEC 的振荡频率变小.

- [ 1 ] Andrews M R , Townsend C G , Miesner H J , Durfee D S , Kum D M , Ketterle W 1997 *Science* **275** 637
- [ 2 ] Hall D S , Matthews M R , Wieman C E , Cornell E A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1543
- [ 3 ] Wang C , Yan K Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1284 ( in Chinese ) [ 王、闫珂柱 2004 *物理学报* **53** 1284 ]
- [ 4 ] Xu Y , Jia D J , Li X G , Zuo W , Li F S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 283 ( in Chinese ) [ 徐 岩、贾多杰、李希国、左 维、李发伸 2004 *物理学报* **53** 283 ]
- [ 5 ] Shin Y , Saba M , Pasquini T A , Ketterle W , Pritchard D E , Leanhardt A E 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 050405
- [ 6 ] Wang Y J , Anderson D Z , Bright V M , Cornell E A , Diot Q , Kishimoto T , Prentiss M , Saravanan R A , Segal S R , Wu S J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 090405
- [ 7 ] Liu W M , Wu B , Niu Q 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2294
- [ 8 ] Liu W M , Fan W B , Zheng W M , Liang J Q , Chui S T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 170408
- [ 9 ] Salmond G L , Holmes C A , Milburn G J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 033623
- [ 10 ] Garnier J , Abdullaev F K 2005 *Phys. Rev. A* **71** 033603
- [ 11 ] Xu Z J , Cheng C , Yang H S , Wu Q , Xiong H W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2835 ( in Chinese ) [ 徐志军、程 成、杨欢、武 强、熊宏伟 2004 *物理学报* **53** 2835 ]
- [ 12 ] Smerzi A , Fantoni S , Giovanazzi S , Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **79** 4950
- [ 13 ] Raghavan S , Smerzi A , Fantoni S , Shenoy S R 1999 *Phys. Rev. A* **59** 620
- [ 14 ] Milburn G J , Corney J , Wright E M , Walls D F 1997 *Phys. Rev. A* **55** 4318

# Dynamical properties of an asymmetric Josephson junction in Bose-Einstein condensates \*

Xiao Yu-Fei<sup>1)</sup> Wang Deng-Long<sup>1)†</sup> Wang Feng-Jiao<sup>1)</sup> Yan Xiao-Hong<sup>1)2)</sup>

1) *Physics Department and Institute of Modern Physics, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China*

2) *College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*

( Received 1 June 2005 ; revised manuscript received 12 July 2005 )

## Abstract

Based on the semiclassical quantum theory, we study the dynamical behaviors of Bose-Einstein condensate in an asymmetric Josephson junction. It is shown that the Josephson effect appears in the system when the ratio  $\chi$  of the difference of two ground state energies to the interaction energies is zero. When  $\chi \neq 0$ , the dynamical behavior of the system shows both the macroscopic quantum tunneling and the macroscopic quantum localization.

**Keywords :** Bose-Einstein condensates, Josephson junctions, dynamical properties

**PACC :** 0530J, 6320P, 7450

\* Project supported by the Key Foundation for Science and Technology from the Ministry of Education of China ( Grant No. 204099 ) and Partly by the Scientific Research Foundation of Education Bureau of Hunan Province, China ( Grant No. 03C466 and 04C662 ).

† Corresponding author. E-mail : dlwang@xtu.edu.cn