

Turbo 译码算法的分岔与控制^{*}

张 维 周淑华 任 勇 山秀明[†]

(清华大学电子工程系复杂工程系统实验室, 北京 100084)

(2005 年 5 月 10 日收到, 2005 年 6 月 22 日收到修改稿)

Turbo 码在信道编码中通过迭代译码的方式可以较好的逼近香农限. 本文以其译码算法中的迭代次数作为时间轴, 译码输出作为状态变量, 信噪比 SNR 及信息比特数 N 作为系统参数建立动力学模型, 研究 Turbo 译码输出与迭代次数之间的关系. 通过大量计算机仿真和理论分析发现随着信噪比 SNR 由小到大, 译码算法先后经历了不确定不动点、奇异区和清晰不动点三个阶段, 其中在由不确定不动点过渡到奇异区时发生了分岔现象. 通过改变信息比特数 N 的方法得到了离散时间动力学中的切分岔、倍周期分岔和 Neimark-Sacker 分岔. 在奇异区内观察到倍周期、准周期、周期三、混沌等不同的相空间轨迹. 奇异区的出现给 Turbo 码在低信噪比下的应用带来了一定困难, 本文通过延迟反馈控制的方法将相空间轨道稳定到不动点上, 仿真结果表明, 本算法可以使 Turbo 码在低信噪比奇异区内获得 0.1—0.3 dB 的增益.

关键词: Turbo 译码算法, 动力学, 分岔, 混沌, 延迟反馈控制法

PACC: 0547, 0100, 0545

1. 引 言

Turbo 码优异的性能来源于其迭代译码算法. 当 Berrou^[1]第一次提出 Turbo 码时, 并没有对其迭代过程作详细研究. 人们普遍认为迭代次数越多, Turbo 码的性能越佳. 出于对算法复杂度和编码性能的综合考虑, 实际研究中常常采用一些比较简单的迭代停止准则, 比如, 软信息概率交叉熵最小化准则, 硬判决符号变化准则, 外信息方差准则等等. 但对整个迭代过程的详细研究始终没有进行.

Richardson^[2]首先将 Turbo 译码过程视为一个动力学系统进行研究, 并发现了不动点的存在. Agrawal^[3]进一步分析了这些不动点的唯一性和稳定性, 并首次使用信噪比 SNR 作为系统参数来研究这个动力学系统. Kocarev^[4]在此基础上将整个 SNR 区域分为三部分, 并发现了分岔现象.

本文将 SNR 和信息比特数 N 同时作为系统参数进行研究, 通过改变 N 的大小可以得到不同的分岔. 通过雅可比矩阵特征值的情况我们能够判定出现分岔的具体类型. 如果倍周期分岔出现, 那么相应

的奇异区内为周期二轨道. 如果切分岔出现, 那么 Turbo 译码算法不经历中间奇异区直接收敛到清晰不动点. 最为复杂的是 Neimark-Sacker 分岔, 奇异区内首先出现的是准周期轨道, 其李雅普诺夫指数为零, 紧接着周期三的出现预示着混沌轨道的存在. 选取合适的 SNR, 最终得到了李雅普诺夫指数大于零的混沌轨道.

Turbo 译码算法的最终目的是能够快速的收敛到一个不动点上. 奇异区的存在严重降低了算法的效率. 动力学中有很多稳定不动点的控制方法. 本文根据 Turbo 译码算法缺乏明确的解析表达式的特点, 使用延迟反馈的控制方法来稳定不动点. 实验结果表明, 使用该控制方法后, 虽然在不动点区域内, Turbo 码性能没有任何提高; 但在奇异区内, 使用控制方法的译码算法可以获得 0.1—0.3 dB 的增益, 所付出的代价是算法复杂度有所上升.

2. Turbo 译码算法的动力学模型

Turbo 码获得优异性能的根本原因之一是采用了迭代译码, 通过两个分量译码器之间软信息的交

^{*} 国家自然科学基金(批准号 90204004, 90304005)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: shanxm@tsinghua.edu.cn

换来提高译码性能. 其中一个分量译码器输出的软信息可以分解为系统信息、先验信息和外信息三部分. 由此得到的外信息是在译码过程中得到的附加信息, 可以在交织后送到另一个分量译码器作为先验信息输入. 如果用 X 表示外信息矢量, l 表示迭代次数, $\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ 分别表示译码器接收到的信息序列及两个校验序列, 那么上述过程可以用 (1) 式来表示, 即

$$\begin{aligned} X_1(l+1) &= F_1[X_2(l), \tilde{C}_0, \tilde{C}_1], \\ X_2(l) &= F_2[X_1(l), \tilde{C}_0, \tilde{C}_2]. \end{aligned} \quad (1)$$

动力学是研究系统中状态变量随时间变化规律的学科. 一个动力学系统应该包括状态变量、一定的演化规律以及系统初值三个要素. 根据 (1) 式的形式, 如果我们把外信息 X 看成是状态变量, 迭代次数 l 看成离散的时间轴, 译码算法作为其演化规律, 就可以建立起一个离散时间的动力学系统, 如表 1 所示.

表 1 Turbo 译码算法的动力学模型

Turbo 译码动力模型	
时间轴	迭代次数 l
状态变量	外信息 X
演化规律	译码算法
初始值	各个信息位 0, 1 等概
系统参数	N 个信息比特及 $3N$ 个噪声值

3. Turbo 译码算法动力学系统的分析方法

由于外信息 X , 系统参数 $\tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ 都是 N 维向量, 因此我们所建立的动力学模型是一个具有 N 维状态变量、 $3N$ 个系统参数的高维离散系统. 再考虑到 Turbo 译码算法无法写成一个明晰的解析式, 因此只能通过大量的计算机仿真来进行研究. 为了在二维纸面表现出整个迭代过程, 可以取译码正确率作为状态变量, 这样该 N 维系统就简化为一个一维系统. 当传送的信息序列固定时, 系统的参数就仅仅为 $3N$ 个噪声值. 显然单独的分析每一个噪声值没有实际意义, 这里我们仅把整体的信噪比 SNR 以及传送的比特位数 N 当作系统参数. 通过以上简化, 就可以做仿真实验了.

选取合适的 N , 将 SNR 从 $-\infty$ 开始逐渐增大, 就可以得到文献 [4] 中提到的三个区域, 即不确定不

动点、奇异区和清晰不动点. 其中不确定不动点对应的译码正确率较低, 清晰不动点对应的译码正确率接近 1. 本文主要讨论中间的奇异区.

通过大量仿真, 可以观察到系统在由不确定不动点过渡到清晰不动点的时候发生了分岔. 离散动力学系统中定义的三种分岔都可以通过改变参数 N 来得到.

4. 三种分岔现象的具体分析

首先我们分析不确定不动点的稳定性. 不动点的定义式为 $r_f = F(r_f)$, 考虑定点 r_f 与其邻近另一点 r_n 的距离在迭代过程中的变化. 令 $\delta_n = \|r_n - r_f\|$, 经一次迭代后, 此距离变为

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= \|r_{n+1} - r_f\| = \|K(r_f)(r_n - r_f)\| \\ &= \|K(r_f)\| \cdot \delta_n, \end{aligned}$$

定点的稳定要求 $\delta_{n+1} < \delta_n$. 可见, 稳定性与雅克比矩阵的特征值有关. 上述稳定条件相当于雅克比矩阵的最大特征值 $|\lambda_{\max}| < 1$. 在复平面上, 根据最大特征值离开单位圆时的方向, 可以将稳定点失稳发生的分岔分为倍周期分岔、切分岔和 Neimark-Sacker 分岔三种类型^[5].

4.1. 倍周期分岔

为了简单起见, 我们在发送端发送一个长度为 N 的全零序列. 编码器中系统卷积码的生成多项式为 $\{D^4 + D^3 + D^2 + D^1 + 1, D^4 + 1\}$, 在加性高斯白噪声 (AWGN) 信道中进行传输, 信噪比的取值范围为 $-2 \sim 0$ dB, 译码时迭代 50—600 次, 用 MATLAB 仿真整个过程, 通过改变 N 的大小来得到不同性质的分岔. 我们发现信息比特数 N 为 100 时, Turbo 译码算法发生了倍周期分岔. 在这种情况下, 随着 SNR 的增大, 不确定不动点的稳定性逐渐减弱, 到达不动点所需的迭代次数越来越多. 如图 1 所示, 其雅可比矩阵的特征值中有一个点沿实轴朝 -1 方向不断逼近.

在 SNR 为 -1.80 dB 附近, 该特征值终于从 -1 处离开了单位圆, 算法发生了倍周期分岔. 相空间的轨迹由不动点变为了周期二. 在此后的区域内, 周期二轨道相当稳定, 一直到 SNR 增加到 -1.44 dB 附近后, 周期二轨道才失去了稳定性, 算法收敛到新的清晰的不动点上. Turbo 译码算法由不确定不动点经过倍周期分岔变为周期二, 最后收敛到清晰不动点的过程可以由图 2 所示的相空间分岔图直观的看出.

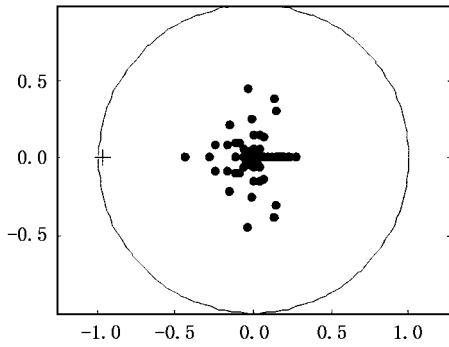


图 1 倍周期分岔临界点特征值分布图(特征值为无量纲,下同)

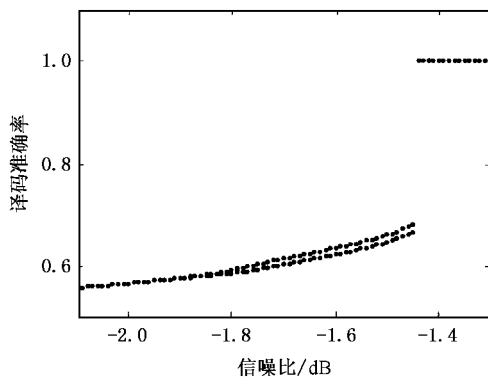


图 2 $N=100$ 时的分岔图

4.2. 切分岔

当 N 变为 50 后, Turbo 译码算法由不确定不动点进入奇异区时发生了切分岔,如图 3 所示,其雅克比矩阵的特征值沿实轴从 +1 处离开单位圆.由于切分岔并不在不动点邻域内产生不变集,相空间轨迹很快离开原来的不动点,重新收敛到一个新的不动点,即清晰不动点.中间不存在奇异区.

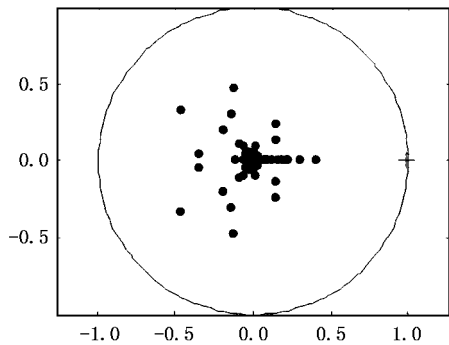


图 3 切周期分岔临界点特征值分布图

4.3. Neimark-Sacker 分岔

我们再次改变 N 到 144, 同样将 SNR 从 $-\infty$ 逐渐增大, 由于其雅克比矩阵有一对共轭特征值从单位圆离开, 如图 4 所示. 故此时 Turbo 译码算法发生了 Neimark-Sacker 分岔. 这种分岔类型比较复杂, 原来的不动点演化为围绕不动点的一个不变集. 此时系统有可能出现准周期、极限环等不同的轨迹. 图 5 所示是一副典型的准周期图, 其轨道的李雅普诺夫指数为 0, 表现出规则的图案.

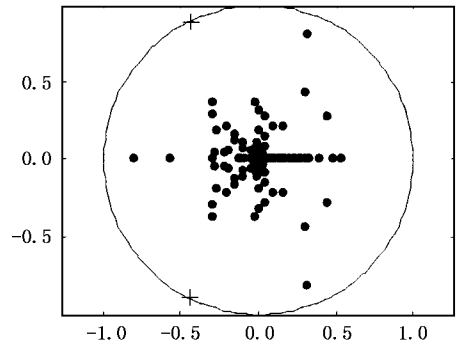


图 4 Neimark-Sacker 分岔临界点特征值分布图

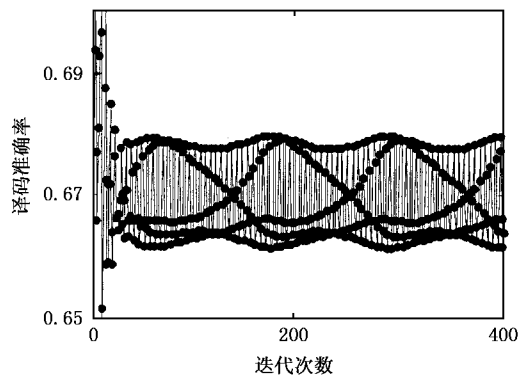


图 5 典型的准周期轨道

为了更仔细的研究中间的奇异区, 图 6 绘制出了相空间分岔图, 在 SNR 为 -1 附近可以清晰的看到周期三的存在, 如图 7 所示. 根据“周期三意味着混沌”^[6], 紧接着在其后的区域内发现了混沌轨道, 如图 8 所示. 通过相空间重构的方法, 可以计算出该混沌轨道的李雅普诺夫指数为 0.7460. 说明该轨道明显具有混沌吸引子的初值敏感性.

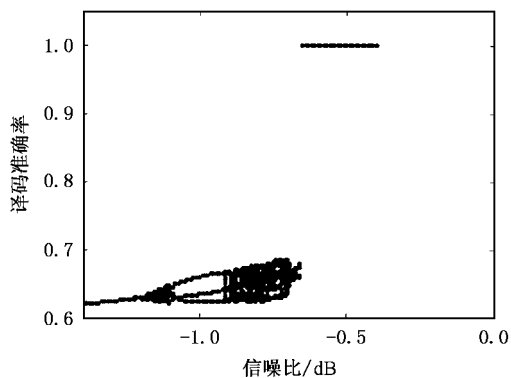
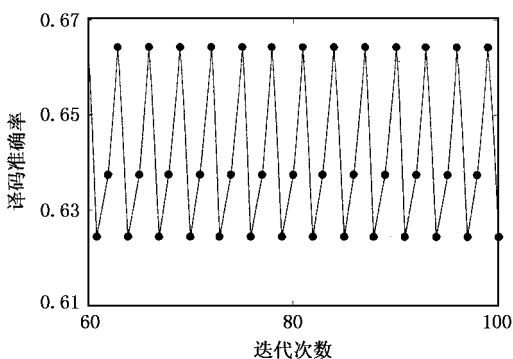
图 6 $N = 144$ 时算法的分岔图

图 7 典型的周期三轨道

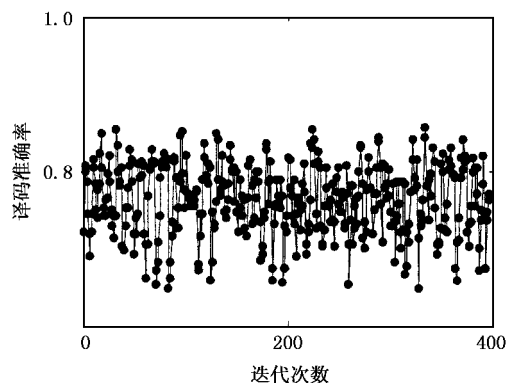


图 8 典型的混沌轨道

5. 对 Turbo 码奇异区的控制

在以上的仿真中,为了定性的描述出奇异区的性质,这里选取了较低的 N ,奇异区集中在 $-1 \sim 0$ dB 范围内.在 Turbo 码实际应用当中,随着 N 的增加,此奇异区的范围一般集中在 $0 \sim 1$ dB 内.人们总是希望迭代算法能够快速的进入到不动点状态.从

而能够减少所需的迭代次数,降低算法复杂度.奇异区的出现说明不动点在 Turbo 译码算法中不总是稳定的,外信息有可能出现周期、准周期甚至混沌等一系列动力学现象.本文采用非线性动力学中常用的延迟反馈控制法对 Turbo 译码算法中的不动点进行稳定化控制,以此来降低 Turbo 译码的复杂度,提高 Turbo 码的整体性能.

延迟反馈控制法(DFC)^[7-9]的主要思路是,利用系统输出信号的一部分经过时间延迟再反馈到系统中去.设 $y(t)$ 是某一可测量的输出量, $S(t)$ 是输入控制量,则反馈的控制形式为

$$S(t) = k[y(t - \tau) - y(t)], \quad (2)$$

其中 τ 是时间延迟量, k 是反馈增益强度.如果选择合适,可以使系统稳定在某一不稳定的轨道上面,从而达到目的.在 Turbo 译码算法中,将前几次迭代的结果作为反馈输入,对于第一个解码器来说,其输入的先验概率除了第二个解码器的外信息外,还包括了第一个解码器前几次的外信息的反馈,即

$$\begin{aligned} L_{\text{priority}}(l) = & L'_{\text{extrinsic}}(l-1) \\ & + k \cdot [L_{\text{extrinsic}}(l-2) \\ & - L_{\text{extrinsic}}(l-1)]. \end{aligned} \quad (3)$$

使用延迟反馈控制后,如图 9 所示,取反馈强度 $k = 0.1$,原来处于奇异区内的混沌相空间轨道被稳定到清晰不动点上,由此可以改善 Turbo 码的性能.加入控制后 Turbo 码的性能曲线如图 10 所示,与未加控制的 Turbo 码相比,对于不确定不动点来说,加入反馈控制并没有任何增益.但当 Turbo 译码算法处于奇异区内时,通过选取合适的增益 k ,Turbo 码可以得到大约 $0.1 \sim 0.3$ dB 的改善.从而表明该控制方法可以较好的减轻奇异区对 Turbo 译码的负面影响.

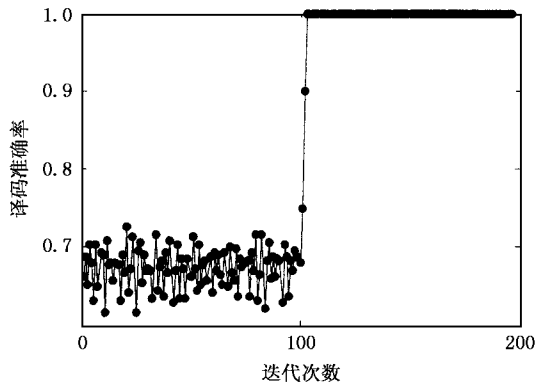


图 9 延迟反馈控制使奇异区稳定到不动点

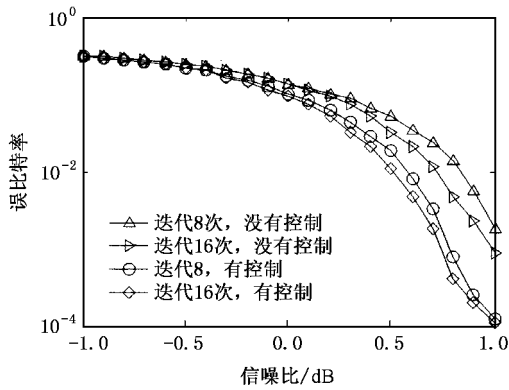


图 10 加入控制前后 Turbo 码的性能

6. 结 论

本文以信噪比 SNR 和信息比特数 N 为参数对 Turbo 码的译码算法建立动力学模型. 通过改变 N 得到了其由不确定不动点过渡到奇异区的三种分岔过程. 在奇异区内第一次发现了周期三、混沌等相空间轨道. 根据以上分析本文提出了延迟反馈控制的方法, 实验表明, 该方法在稍增加算法复杂度的基础上可以有效的改善 Turbo 码在奇异区的性能, 改进了其在低信噪比环境中的应用.

- [1] Berrou C , Glavieux A , Thitimajshima P 1993 *IEEE Trans. Commun.* **44** 1064
- [2] Richardson T 2000 *IEEE Trans. Inform. Theory* **46** 9
- [3] Dakshi Agrawal , Alexander Vardy 2001 *IEEE Trans. Information Theory* **47** 699
- [4] Kocarev L , Tasev Z , Maggio G M 2003 *Circuits and Systems , ISCAS '03 Proceedings of the 2003 International Symposium* **3** 742
- [5] Kuznetsov Y A 1998 *Elements of Applied Bifurcation Theory* (New

York : Springer-Verlag Applied Mathematical Sciences) p113

- [6] Li T Y , Yorke J A 1975 *Amer. Math. Monthly* **82** 985
- [7] Pyragas K 1995 *Phys Lett.* 1993 A **206** 323
- [8] Li L X 2001 *Acta Phys. Sin.* **10** 796 (in Chinese) [李丽香 2001 物理学报 **10** 796]
- [9] Yu H J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5053 (in Chinese) [于洪洁 2005 物理学报 **54** 5053]

Bifurcation analysis and control in Turbo decoding algorithm^{*}

Zhang Wei Zhou Shu-Hua Ren Yong Shan Xiu-Ming[†]

(*Complex Engineered Systems Laboratory, Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(Received 10 May 2005 ; revised manuscript received 22 June 2005)

Abstract

Turbo Codes can approach the Shannon limit very closely with the help of its special iterative decoding algorithm. This paper establishes a nonlinear dynamic system to analyze the relationship between Turbo decoding output and the number of iterations. Here, the number of iterations is taken as the time axis, decoding output as the state variable, SNR and information bits N as system parameters. It is shown that with SNR increasing, the decoding algorithm undergoes three stages, namely the indecisive fix-point, singular region and unequivocal fix-point. Bifurcations occur during the transformation from the indecisive fix-point to the singular region. It is first proposed that fold, period doubling and Neimark-Sacker bifurcation all have the possibility to occur, depending on the value of N . In the singular region, phase trajectories may appear as period-two, period-three, quasiperiod and chaos. This paper first observed and confirmed the existence of period-three and chaos. Singular region deteriorates the performance of Turbo codes under low SNR. This paper proposes a time-delay feedback control method to stabilize the fix-point. Simulation results show that this method achieves 0.1—0.3 dB improvement for Turbo codes under low SNR condition.

Keywords : Turbo decoding algorithm, dynamic system, bifurcation, chaos, time-delay feedback control

PACC : 0547, 0100, 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90204004, 90304005).

[†] Corresponding author. E-mail : shanxm@tsinghua. edu. cn