第55卷 第3期 2006年3月
1000-3290/2006/55(03)/1011-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.55,No.3,March,2006


# 低维非线性系统的一般多线性变量分离方法和局域激发模式

沈守枫

(浙江工业大学数学系,杭州 310014)

(2005年7月15日收到;2005年7月27日收到修改稿)

基于Bäcklund变换的多线性变量分离方法(BT-MLVSA)是求解非线性系统的一种非常有效的方法. 一般多线性变量分离方法(GMLVSA)是该方法的推广. 实现GMLVSA主要有四种途径,一是先把场量按照多个任意函数(通常考虑两个函数的情形)展开得到关于多个函数的多线性方程,另一种途径是推广变量分离的假设,第三类是基于Darboux变换的多线性变量分离方法(DT-MLVSA),第四类是导数相关泛函变量分离法. 利用第一类GMLVSA,可以得到(2+1)维mNNV系统和sine-Gordon系统的一般多线性变量分离解. 把第一类GMLVSA推广到二维非线性系统,这些系统是通过对称约化(2+1)维sine-Gordon.系统得到的. 也就是说,一般多线性变量分离可解性在对称约化下从高维系统到低维系统得到了保持. 这也提供了一条从高维非线性系统导出可GMLVSA求解的低维非线性系统的有效途径.

**关键词**:Bäcklund变换,多线性变量分离,sine-Gordon系统,对称约化

**PACC**:0340

## 1. 引 言

自从孤子理论[1-5]发展以来,人们已经发现了许多(1+1)维非线性系统的孤子激发模式,如钟型孤子(bell-soliton),扭结型孤子(kink-soliton),瞬子(instanton),呼吸子(breather)和某些弱激发模式,如尖波孤子(peakon),紧致子(compacton). 然而,寻求(2+1)维非线性系统或更高维非线性系统的局域激发模式,虽然是孤子理论中极其重要的内容,但是由于方法上的困难,这方面的研究几乎是一片空白,进展不大. 直到1988年,Boiti等人[6]得到了非线性DS系统中所有方向都指数衰减的dromion解,才开始了对高维局域激发模式的研究. 主要用的方法是在Hirota方法或Bäcklund变换方法的基础上取行波解假设的方法来构造新的局域激发模式[7-12]. 最近Lou等人[13,14]提出的基于Bäcklund变换的多线性变量分离方法(BT-MLVSA)是一种非常行之有效的方法,原因在于得到一个含有一些低维的任意函数的普适公式,则可以统一地构造丰富的局域激发模式,如多solitoff解,多dromion解,dromion格点解,多lump解,多环孤子解,多呼吸子解,多瞬子解,混沌-混沌斑图(pattern),混沌-周期斑图等等[13-15]. 该方法首先是Lou在求解(2+1)维非线性NNV系统[13]时取得成功的,可BT-MLVSA求解的系统包括DS系统,NNV系统,长波色散系统,BBK系统,(2+1)维KdV系统,Maccari系统,(M+N)分量AKNS系统,(2+1)维微分-差分特殊Toda晶格[14-16]等等.

可BT-MLVSA求解系统的某个物理量都可以表示成一个普适公式[14,15](或其变形[16,17]),对于不同的非线性系统,普适公式或者对应于某个场量,或者是其中的势函数,还有可能是振幅的平方模函数. 从而BT-MLVSA可解性可定义为[15]:若一个$N\geqslant 2$维非线性系统可BT-MLVSA求解,存在一个合适的物理量可用普适公式(或其变形)描述且其中至少含有一个$N-1$维的任意函数,则称该系统具有BT-MLVSA可解性. 因为线性叠加原理在非线性系统失效,为了得到含有更多变量分离函数的精确解,文献[18—24]提出了一般多线性变量分离方法(GMLVSA). 实现GMLVSA主要有四种途径,一是先把场量按照多个任意函数(通常考虑两个函数的情形)展开得到关于多个函数的多线性方程[18,19],另一种途径是推广变量分离的假设[19],第三类是基于Darboux变换的多线性变量分离方法(DT-MLVSA)[20-22],第四类是导数相关泛函变量分离法[23,24]. 利用第一类GMLVSA,可以得到(2+1)维

mNNV 系统和 sine-Gordon 系统的一般多线性变量分离解. 第二类 GMLVSA 已经成功应用于长波色散系统,BKK 系统和(2+1)维势 Burgers 系统. 第三类 GMLVSA 已经成功求解了 NNV 系统,sine-Gordon 系统,色散长波系统等等. 导数相关泛函变量分离法能够给出更完整的变量分离可解归类.

BT-MLVSA 和第二类 GMLVSA 已经推广应用于更高维非线性系统,如 $N+1(N\geqslant 3)$ 维 Burgers 系统[25—27],(3+1)维浅水波方程[27]. 相比较而言,虽然(1+1)维非线性模型受到维数的限制,但是,我们还是发现了许多有物理意义的系统可 BT-MLVSA 求解,如长短波作用系统,$(M+N)$元 Dispersionless 系统,两类六阶非线性系统,Ito 系统,浅水波系统等等[17,27—29]. 从而我们发现这么一个事实:这些可 BT-MLVSA 求解的(1+1)维非线性系统都可以看做可 BT-MLVSA 求解的(2+1)维非线性系统经过对称约化后得到的某个子系统. 也就是说,如果一个高维非线性系统有 BT-MLVSA 可解性,那么至少存在一个低维非线性系统,其也具有 BT-MLVSA 可解性(审稿人语:如所有(2+1)维多线性变量分离可解系统时间无关约化都是多线性变量分离可解的). 当然,对于某些高维非线性系统不具有 BT-MLVSA 可解性,其对称约化得到的几类子系统可能也具有 BT-MLVSA 可解性.

对于第一类 GMLVSA 方法,并没有在更高维非线性系统,或(1+1)维非线性系统上得到应用. 但是,基于上述 BT-MLVSA 和对称约化之间的联系,本文以(2+1)维 sine-Gordon 系统为例,把该方法推广到二维非线性系统——通过对称约化(2+1)维 sine-Gordon 系统得到的子系统.

## 2. 二维非线性系统的 GMLVSA

文献[18]考虑了如下(2+1)维 sine-Gordon 系统的 GMLVSA:

$$u_{xyt}+u_y v_{xt}+u_x v_{yt}=0, \tag{1}$$

$$v_{xy}=u_x u_y. \tag{2}$$

首先,如果取相似变量和相似解形式为

$$\xi=\int^x\frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{f(\tilde{x})}-\int^t\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{h(\tilde{t})}, \tag{3}$$

$$\eta=\int^y\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{g(\tilde{y})}-\int^t\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{h(\tilde{t})}, \tag{4}$$

$$F(\xi,\eta)=u-\int^t\frac{k_1(\tilde{t})}{h(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t}, \tag{5}$$

$$G(\xi,\eta)=v-\int^t\frac{k_2(\tilde{t})}{h(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t}, \tag{6}$$

这里 $f(x)\neq 0, g(y)\neq 0, h(t)\neq 0, k_1(t)\neq 0, k_2(t)\neq 0$. 则可得到二维非线性系统

$$F_{\xi\xi\eta}+F_{\xi\eta\eta}+F_\eta(G_{\xi\xi}+G_{\xi\eta})+F_\xi(G_{\eta\eta}+G_{\eta\xi})=0, \tag{7}$$

$$G_{\xi\eta}=F_\xi F_\eta. \tag{8}$$

接下来,我们可以类似地考虑上述系统的 GMLVSA,取 Bäcklund 变换

$$F(\xi,\eta)=\pm\mathrm{i}\cdot\ln\left[\frac{\phi(\xi,\eta)}{\psi(\xi,\eta)}\right]+F^*(\xi,\eta), \tag{9}$$

$$G(\xi,\eta)=\ln[\phi(\xi,\eta)\psi(\xi,\eta)]+G^*(\xi,\eta), \tag{10}$$

这里的 $\{F^*(\xi,\eta), G^*(\xi,\eta)\}$ 是任意的种子解,而 $\phi(\xi,\eta)\psi(\xi,\eta)$ 待定. 现在,取种子解为 $\{0, G_1(\xi)+G_2(\eta)\}$,并且令 $\phi(\xi,\eta),\psi(\xi,\eta)$ 为多线性变量分离形式

$$\phi(\xi,\eta)=a_0+a_1p(\xi)+a_2q(\eta)+a_3p(\xi)q(\eta), \tag{11}$$

$$\psi(\xi,\eta)=b_0+b_1p(\xi)+b_2q(\eta)+b_3p(\xi)q(\eta). \tag{12}$$

代入方程(8),可以得到

$$a_0b_3-a_1b_2-a_2b_1+a_3b_0=0,$$

$$b_3=\frac{a_1b_2+a_2b_1-a_3b_0}{a_0}. \tag{13}$$

再代入方程(7),利用 MATHEMATICA 数学软件可以分离方程为

$$G_1''(\xi)=\frac{(c+2Ap')p'-2(-a_0a_3b_0+a_0a_1b_2+Ap)p''}{Ap^2+a_0(-2a_3b_0+2a_1b_2)p+a_0(-a_2b_0+a_0b_2)}, \tag{14}$$

$$G_2''(\xi)=\frac{(-c+2Bq')q'-2(-a_0a_3b_0+a_0a_2b_1+Bq)q''}{Bq^2+a_0(-2a_3b_0+2a_2b_1)q+a_0(-a_1b_0+a_0b_1)}, \tag{15}$$

这里记 $p\equiv p(\xi), q\equiv q(\eta), A=-a_1a_3b_0+a_1a_2b_1-a_0a_3b_1+a_1^2b_2, B=-a_2a_3b_0+a_2^2b_1+a_1a_2b_2-a_0a_3b_2$. 也就是有

$$G_1(\xi)=\int\left(\int\left(\frac{(c+2Ap')p'-2(-a_0a_3b_0+a_0a_1b_2+Ap)p''}{Ap^2+a_0(-2a_3b_0+2a_1b_2)p+a_0(-a_2b_0+a_0b_2)}\right)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\xi, \tag{16}$$

$$G_2(\eta)=\int\left(\int\left(\frac{(-c+2Bq')q'-2(-a_0a_3b_0+a_0a_2b_1+Bq)q''}{Bq^2+a_0(-2a_3b_0+2a_2b_1)q+a_0(-a_1b_0+a_0b_1)}\right)\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\eta. \tag{17}$$

至此，我们得到了二维非线性系统(7)，(8)的一般多线性变量分离解为

$$F(\xi,\eta)=\pm\mathrm{i}\cdot\ln\left[\frac{a_0+a_1p+a_2q+a_3pq}{b_0+b_1p+b_2q+\dfrac{a_1b_2+a_2b_1-a_3b_0}{a_0}pq}\right], \tag{18}$$

$$G(\xi,\eta)=\ln\left[(a_0+a_1p+a_2q+a_3pq)\left(b_0+b_1p+b_2q+\frac{a_1b_2+a_2b_1-a_3b_0}{a_0}pq\right)\right]+G_1(\xi)+G_2(\eta), \tag{19}$$

这里的 $p(\xi)$，$q(\eta)$ 为任意的函数，$G_1(\xi)$，$G_2(\eta)$ 是(16)，(17)式.

另外，如果取相似变量和相似解形式为

$$\xi=x, \tag{20}$$

$$\eta=\int^y\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{g(\tilde{y})}-\int^t\frac{\mathrm{d}\tilde{t}}{h(\tilde{t})}, \tag{21}$$

$$F(\xi,\eta)=u-\int^t\frac{k_1(\tilde{t})}{h(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t}, \tag{22}$$

$$G(\xi,\eta)=v-\int^t\frac{k_2(\tilde{t})}{h(\tilde{t})}\mathrm{d}\tilde{t}, \tag{23}$$

这里 $g(y)\neq0$，$h(t)\neq0$，$k_1(t)\neq0$，$k_2(t)\neq0$. 则可得到二维非线性系统

$$F_{\xi\eta\eta}+F_\eta G_{\xi\eta}+F_\xi G_{\eta\eta}=0, \tag{24}$$

$$G_{\xi\eta}=F_\xi F_\eta. \tag{25}$$

类似地，可以得到该系统的 GMLVSA 解为

$$F(\xi,\eta)=\pm\mathrm{i}\cdot\ln\left[\frac{a_0+a_1p+a_2q+a_3pq}{b_0+b_1p+b_2q+\dfrac{a_1b_2+a_2b_1-a_3b_0}{a_0}pq}\right], \tag{26}$$

$$G(\xi,\eta)=\ln\left[(a_0+a_1p+a_2q+a_3pq)\left(b_0+b_1p+b_2q+\frac{a_1b_2+a_2b_1-a_3b_0}{a_0}pq\right)\right]+G_1(\xi)+G_2(\eta), \tag{27}$$

这里的 $p(\xi)$，$q(\eta)$，$G_1(\xi)$ 为任意的函数，并且

$$G_2(\eta)=\int\left(\int\left(\frac{2Bq'^2-2(-a_0a_3b_0+a_0a_2b_1+Bq)q''}{Bq^2+a_0(-2a_3b_0+2a_2b_1)q+a_0(-a_1b_0+a_0b_1)}\right)\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}\eta. \tag{28}$$

这里 $B=-a_2a_3b_0+a_2^2b_1+a_1a_2b_2-a_0a_3b_2$.

同样地，利用上述方法，可以检验其他约化子系统是否具有 GMLVSA 可解性. 不过，在这里，我们并没有找到一种有效的方法可以统一地检查对称约化后的系统哪些具有 GMLVSA 可解性，那些不具有 GMLVSA 可解性.

## 3. 局域激发模式

自从 1965 年 Zabusky 和 Kruskal[1] 将他们发现的孤波命名为孤子以后，孤子理论和应用得到了迅猛发展. 正如文献[30]所写到：从天上涡旋星系的密度波，海上冲击波，等离子体，分子系统，生物系统，光纤中光的传输，激光传播，非线性传输线，超流氦-3，超导 Josephson 结，磁学，结构相变，液晶，流体动力学以及基本粒子等，都与孤子有关. 一定程度上已经形成独立的学科分支——孤子物理学[31](soliton physics). 现在，利用 BT-MLVSA，GMLVSA 方法能够构造出丰富的局域激发模式，如多 solitoff 解，多 dromion 解，dromion 格点解，多 lump 解，多呼吸子解，多瞬子解，多圆锥曲线孤子解等等. 不过关于这些结构的实际物理应用还有待进一步研究.

另外，对于 BT-MLVSA 方法，在(1+1)维非线性系统上的成功应用是十分有意义的事情，因为得到的(1+1)维普适公式[17]

$$U = 2\frac{p'(t)q'(x)}{(p(t)+q(x))^2} \tag{29}$$

有明确的一维空间和一维时间的物理意义. 从而由于含有任意函数,就可以构造出丰富的局域激发模式. 虽然我们已经把第一类 GMLVSA 推广到低维(二维)非线性系统上,但是考虑到这些非线性系统(7),(8),(24),(25)的物理意义不明确,或者说变量 $\xi,\eta$ 的物理意义不明确,虽然在理论上能构造出丰富的局域激发模式(具体类似于(2+1)维情况,见文献[18,15],本文略),但是其物理应用有待进一步研究. 当在某学科中发现该系统的应用价值后,那么依照这些系统构造出来的局域激发模式才有真正的用武之地.

## 4. 结 论

本文把第一类 GMLVSA 推广到二维非线性系统,这些系统是通过对称约化(2+1)维 sine-Gordon 系统得到的. 同样地,也可以考虑(2+1)维 mNNV 系统. 因为结果类似,这里略过. 如果一高维非线性系统具有 GMLVSA 可解性,那么其相似约化所得到的某些低维系统也具有 GMLVSA 可解性. 这其实提供了一条从高维非线性系统导出可 GMLVSA 求解的低维非线性系统的有效途径.

前面提到的关于多线性可解性的定义[15],我们认为应该修正为 若一个 $N\geqslant 2$ 维非线性系统可 BT-MLVSA 求解,存在一个合适的物理量可用普适公式(或其变形)描述且其中至少含有一个 $1\leqslant M\leqslant N-1$ 维的任意函数,则称该系统具有 BT-MLVSA 可解性. 或者当 $M<N-1$ 时,称该系统具有弱(week) BT-MLVSA 可解性. 例如(2+1)维 AKNS 浅水波方程[32]

$$u_t - u_{xxt} - 4uu_t - 2u_xv + u_x = 0, \tag{30}$$

$$v_y = u_t. \tag{31}$$

该方程具有多线性变量分离解

$$u(x,y,t) = 2\left(\frac{G''}{F+G} - \left(\frac{G'}{F+G}\right)^2\right) + \frac{\frac{1}{2}G''^2 - G'G'''}{2G'^2} + \frac{1}{4}, \tag{32}$$

$$v(x,y,t) = -2\frac{F'G'}{(F+G)^2} + \frac{1}{2}, \tag{33}$$

这里 $F'\equiv F(t)$, $G\equiv G(x+y)$. 即本质上,它们为一维的任意函数.

另外值得一提的是,目前存在的不同类型的变量分离方法[13—29,33,34]之间有什么联系,是否有统一的方法有待进一步研究. 例如,文献[33,34]利用拓展的 Riccati 方程映射法得到的各种多线性变量分离解,其实可以归为通常的 BT-MLVSA 解的形式. 这里取解[33]

$$u_3 = \frac{\chi_{xx}-\chi_t}{\chi_x} + 2\chi_x\sqrt{\sigma}\tan[\sqrt{\sigma}(\chi+\varphi)] \tag{34}$$

来说明. 考虑到上式中 $\chi\equiv\chi(x,t)$, $\varphi\equiv\varphi(y)$ 为任意函数,则若令

$$\tilde{\chi} = -\tan[\sqrt{\sigma}\cdot\chi], \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{\tan[\sqrt{\sigma}\cdot\varphi]}, \tag{35}$$

可以化简(34)式为如下的 BT-MLVSA 解的形式

$$u_3 = \frac{\tilde{\chi}_{xx}+\tilde{\chi}_t}{\tilde{\chi}_x} - \frac{2\tilde{\chi}_x}{\tilde{\chi}+\tilde{\varphi}}. \tag{36}$$

关于孤子近年的发展和一些前沿课题,文献[35]指出 将现有求精确解的方法应用于新的可积系统或不可积系统,并寻求新的求精确解的方法[36—38],以及与这些方法相联系的可借助于计算机带有人工智能的软件来实现的工作是应该引起注意的问题. 本文提到的 GMLVSA 是必须借助数学软件(如 Maple,MATH-EMATICA 等)才能完成的. 我们相信‘非线性科学的人工智能化’是一种趋势.


[1] Zabusky N J, Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240

[2] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095

[3] Lax P D 1968 *Commu. Pure Appl. Math.* **21** 467

[4] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192

[5] Zakharov V E, Shabat A B 1972 *Soviet Phys. JEPT* **34** 62

[6] Boiti M, Leon J J P, Martina L, Pempinelli F 1988 *Phys. Lett.* A **132** 432

[7] Hietarinta J, Hirota R 1990 *Phys. Lett.* A **145** 237

[8] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett.* A **149** 113

[9] Kawahara T, Araki K, Toh S 1992 *Phys.* D **59** 79

[10] Pathria D, Morris J L 1989 *Phys. Scripta* **39** 673

[11] Santini P M 1990 *Phys.* D **41** 26

[12] Radha R, Lakshmanan M 1997 *Chaos, Solitons and Fractals* **8** 17

[13] Lou S Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 94

[14] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y 2002 *Phys. Rev.* E **66** 046601

[15] Tang X Y 2004 Localized excitations and symmetries of (2 + 1)-dimensional nonlinear systems (Dissertation of Shanghai Jiaotong University) (in Chinese) [唐晓艳 2004 上海交通大学博士论文]
[16] Qian X M, Lou S Y, Hu X B 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 2401
[17] Shen S F 2005 *Some studies of nonlinear systems* (Dissertation of Zhejiang University) (in Chinese) [沈守枫 2005 浙江大学博士论文]
[18] Lou S Y 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 3877
[19] Tang X Y, Lou S Y 2003 *J. Math. Phys.* **44** 4000
[20] Hu H C, Lou S Y, Liu Q P 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1413
[21] Hu H C, Tang X Y, Lou S Y, Liu Q P 2004 *Chaos, Soltions and Fractals* **22** 327
[22] Hu H C, Lou S Y 2005 *Chaos, Solitons and Fractals* **24** 1207
[23] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 12223
[24] Zhang S L, Lou S Y 2004 *Physica* A **335** 430
[25] Ying J P, Lou S Y 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 1448
[26] Shen S F, Zhang J, Pan Z L 2005 *Commu. Theor. Phys.* **43** 389
[27] Shen S F *Commu. Theor. Phys.* submitted
[28] Shen S F, Zhang J, Pan Z L 2005 *Phys. Lett.* A **339** 52
[29] Shen S F *Commu. Theor. Phys.* submitted
[30] Chen L J, Liang C H 1997 *Soliton theary and its application* (Xidian University Press) (in Chinese) [陈陆君,梁昌洪 1997 孤立子理论及其应用——光孤子理论及光孤子通信,西安电子科技大学出版社]
[31] Pang X F 2003 *Soliton physics* (Sichuan Publishing House of Science & Technology) (in Chinese) [庞晓峰 2003 孤子物理学(四川科学技术出版社)]
[32] Melnikov V K 1983 *Lett. Math. Phys.* **7** 126
[33] Zheng C L, Fang J P, Chen L Q 2005 *Chin. J. Phys.* **43** 17
[34] Fang J P, Zheng C L, Zhu J M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2990 (in Chinese) [方建平、郑春龙、朱加民 2005 物理学报 **54** 2990]
[35] Li Y S 1999 *Soliton and Integrable System* (Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese) [李翊神 1999 孤子与可积系统(上海科技教育出版社)]
[36] Lou S Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1937 (in Chinese) [楼森岳 1998 物理学报 **47** 1937]
[37] Lou S Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1657 (in Chinese) [楼森岳 2000 物理学报 **49** 1657]
[38] Lou S Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 897

# General multi-linear variable separation approach to solving low dimensional nonlinear systems and localized exitations

Shen Shou-Feng
(*Department of Mathematics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou* 310014, *China*)
(Received 15 July 2005; revised manuscript received 27 July 2005)

Abstract

Multi-linear variable separation approach based on the corresponding Bäcklund transformation (BT-MLVSA) is a useful method to solve nonlinear systems. General multi-linear variable separation approach (GMLVSA) is its extension and there are four ways to realize it. The first one is to expand the nonlinear systems according to multi-arbitrary functions, the second one is to expand the variable separation ansatz. The third one is the MLVSA based on the Darboux transformation (DT-MLVSA) and the last one is the derivative-dependent functional variable separation method. By using the first kind of GMLVSA, the solutions can be obtained for the (2 + 1)-dimensional mNNV system and sine-Gordon system. In this paper, the first kind of GMLVSA is extended to solve some two-dimensional nonlinear systems which are derived from the (2 + 1)-dimensional sine-Gordon system by using symmetry reduction method. Namely, the applicability of the method is retained from high dimensional systems to low dimensional systems in the symmetry reduction sense. This also provide a way of deducing low dimensional systems which can be solved by GMLVSA from high dimensional systems.

**Keywords**: Bäcklund transformation, multi-linear variable separation, sine-Gordon system, symmetry reduction
**PACC**: 0340