

# 静电波对磁化等离子体的共振加热的理论 及数值模拟研究<sup>\*</sup>

盛正卯<sup>†</sup> 王 庸 马 健 郑思波

(浙江大学物理系 杭州 310027)

(2005 年 3 月 4 日收到, 2005 年 5 月 11 日收到修改稿)

利用多标度展开得到了更一般的静电波与磁化等离子体回旋运动间的共振条件, 通过数值模拟证实了理论分析, 发现分数频率同样可以产生共振加热, 发现加热效果即使对于相同频率的波, 也不是随驱动波的振幅单调增强, 而是存在一些优势振幅, 即在特定频率特定振幅下有特别好的加热效果.

关键词: 等离子体, 共振加热, 非线性动力学

PACC: 5235M, 5250, 0547

## 1. 引 言

由于在实验室磁约束等离子体, 空间等离子体及激光物质相互作用中的重要性, 磁化等离子体的共振加热问题已有很多文献<sup>[1-10]</sup>. 文献 [1] 在驱动波的波长远小于回旋半径的条件下得到了被广泛采用的共振条件为驱动波的频率是回旋频率的整数倍. 但最近 Chen 等人在驱动波的波长远大于回旋半径的条件下得到了驱动波频率为回旋频率的  $2/N$  倍 ( $N$  为整数) 时同样会出现共振加热的结论<sup>[1, 2]</sup>. 事实上文献 [4] 在 1984 年通过粒子模拟就发现, 当波的频率为  $\omega = \frac{3}{2}\Omega_c$  (其中  $\Omega_c$  为回旋频率) 时同样也会出现共振加热现象. 因此研究是否还有其他共振加热的新条件是一个很有意义的问题, 更重要的是在什么频率, 什么强度下加热效果最好, 这对于有效地实现聚变反应中的加热问题, 理解地球空间中太阳高能粒子事件以及激光物质相互作用问题都有重要的理论指导意义. 本文将静电波加热为例子作为出发点, 事实上就像文献 [2] 所指出的那样对于阿尔芬波加热情形同样适用. 我们选取静电波电势形式为  $\Phi_0 \cos(kx - \omega t)$ , 取匀场磁场的方向为  $z$  方向, 则可得到系统的哈密顿量为

$$H = \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{A})^2}{2} + \Phi(x, t), \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{A} = -B_0 y \mathbf{x}, \quad (2)$$

$$\Phi(x, t) = \Phi_0 \cos(kx - \omega t). \quad (3)$$

然后可以得到系统的运动方程为

$$\frac{dv_x}{dt} = v_y + k\Phi_0 \sin(kx - \omega t), \quad (4)$$

$$v_y = -x + x_0. \quad (5)$$

这里以回旋频率  $\Omega_c = qB_0/m$  的倒数作为时间单位, 由此得到

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = x_0 + k\Phi_0 \sin(kx - \omega t), \quad (6)$$

这是非线性的单粒子运动方程. 如果  $k = 0$ , 或者  $\omega = 0$ , 那么均可以严格求解, 但两者均不为零时只能求微扰解, 或者数值模拟.

当静电场的强度不是很强, 且  $kr_L \gg 1$  ( $r_L$  为回旋半径) 时, 即波长远小于粒子的回旋半径时, 粒子与静电波的相互作用在一个回旋周期内可以被平均而忽略, 粒子将在回旋运动的基础上作扰动, 这样可以将 (6) 式右边第二项中的  $x$  用  $x = r_L \sin(t + \phi_0)$  代替, 其中  $\phi_0$  为初位相, 然后利用贝塞耳函数的母函数作展开, 而得到近似解, 进而给出  $\omega = N$  ( $N$  为自然数) 时, 系统会出现很明显的郎道共振加热效应.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金重大项目(批准号: 40390150)和非线性科学“973”项目(批准号: G2000077305)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: zmsheng@css.zju.edu.cn

而当  $k(x - x_0) \ll 1$  时 (6) 式可以近似为带驱动的马修方程, 从而得出  $\omega = \frac{2}{N}$  时同样会出现共振加热的结论. 当波长不是处于这两种极限情形时, 那么需要建立新的理论分析和数值模拟来研究其共振条件及共振效果.

## 2. 多标度展开

在作标准的多标度展开分析前, 先做一个直观的分析. 可以利用内插方法, 提出如下的零级近似解

$$x = r_1 \sin(t + \phi_1) - r_2 \sin(\omega t + \phi_2), \quad (7)$$

代入方程 (6) 的右边, 其中  $r_1, r_2$  和  $\phi_1, \phi_2$  为待定参数.  $r_2 = 0$  表示以回旋运动为主, 而  $r_1 = 0$  表示以波的强迫运动为主. 代入 (6) 式右边并作贝塞耳函数展开得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + x - x_0 = k\Phi_0 \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_1) J_n(kr_2) \\ \times \sin[(m - n\omega - \omega)t + m\phi_1 - n\phi_2], \end{aligned} \quad (8)$$

其中  $J_m$  为  $m$  阶贝塞耳函数. 方程 (8) 的解为

$$\begin{aligned} x = x_0 + k\Phi_0 \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} A_{mn} \\ \times \sin[(m - n\omega - \omega)t + m\phi_1 - n\phi_2], \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$A_{mn} = \frac{J_m(kr_2) J_n(kr_2)}{1 - (m - n\omega - \omega)^2}.$$

显然当

$$\omega = \frac{m \pm 1}{n + 1} \equiv \frac{M}{N} \quad (10)$$

时, 系统出现共振. 当  $N = 1$  时, 得到朗道共振情形; 当  $M = 2$ , 则可得到文献 [1, 2] 的结论, 因此前述两种共振条件只是这个新的普遍共振条件 (10) 的特例.

为了简单起见, 在做标准的多标度展开前先对方程 (6) 作如下简化: 取  $x_0 = 0$ , 即选取适当的坐标原点, 取  $k = 1$ , 即以波矢的倒数为长度的单位. 则方程简化为

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z = \epsilon \sin(z - \omega t). \quad (11)$$

取如下的多标度展开式<sup>[12]</sup>:

$$z = A \cos(t - \phi) + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots + \epsilon^N z_N, \quad (12)$$

其中  $A, \phi, z_1, z_2, \dots, z_N$  均为时间  $t$  的函数. 其中第

一项是齐次方程的解, 称为主要部分, 其余各项为微扰. 将 (12) 式代入 (11) 式可得如下方程:

$$\begin{aligned} & \left\{ 2A \frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2 A}{dt^2} - A \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right\} \cos(t - \phi) \\ & + \left\{ -2 \frac{dA}{dt} + 2 \frac{dA}{dt} \frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right\} \sin(t - \phi) \\ & + \epsilon \left( \frac{d^2 z_1}{dt^2} + z_1 \right) + \epsilon^2 \left( \frac{d^2 z_2}{dt^2} + z_2 \right) + \dots \\ & + \epsilon^N \left( \frac{d^2 z_N}{dt^2} + z_N \right) \\ & = \epsilon \sin[A \cos(t - \phi) - \omega t] \\ & \times \cos[\epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots + \epsilon^N z_N] \\ & + \epsilon \cos[A \cos(t - \phi) - \omega t] \\ & \times \sin[\epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots + \epsilon^N z_N]. \end{aligned} \quad (13)$$

比较  $\epsilon$  各阶幂次项可以得到如下方程组:

$$\begin{aligned} 2A \frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2 \phi}{dt^2} - A \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 = 0, \\ -2 \frac{dA}{dt} + 2 \frac{dA}{dt} \frac{d\phi}{dt} + A \frac{d^2 \phi}{dt^2} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \epsilon \left( \frac{d^2 z_1}{dt^2} + z_1 \right) = \epsilon \sin[A \cos(t - \phi) - \omega t] \\ = \epsilon \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(A) \\ \times \sin[(m - \omega)t - m\phi + m\pi/2], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\epsilon^2 \left( \frac{d^2 z_2}{dt^2} + z_2 \right) = \epsilon^2 z_1 \cos[A \cos(t - \phi) - \omega t], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^3 \left( \frac{d^2 z_3}{dt^2} + z_3 \right) = \epsilon^3 z_2 \cos[A \cos(t - \phi) - \omega t] \\ - \frac{\epsilon^3}{2} z_1^2 \sin[A \cos(t - \phi) - \omega t]. \end{aligned} \quad (17)$$

方程 (14) 的一个解是  $A, \phi$  为常数, 即主要运动是回旋运动. 此时方程 (15) 的解为

$$z_1 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(A) \sin[(m - \omega)t - m\phi + m\pi/2]}{1 - (m - \omega)^2}. \quad (18)$$

显然当频率  $\omega = N$ , 即波的频率是回旋频率的整数倍时, 系统将出现共振, 此即朗道共振. 此时一阶项将比零阶量大, 微扰失效, 因此应该将引起共振的一阶项前移到零阶项. 这样一阶项仍然有限, 即

$$z_1 = \sum_{m \neq N \pm 1} \frac{J_m(A) \sin[(m - \omega)t - m\phi + m\pi/2]}{1 - (m - \omega)^2}, \quad (18')$$

而零阶项变为

$$\begin{aligned}
& 2A \frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2} - A \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\
&= \epsilon \left[ J_{N-1}(A) - J_{N+1}(A) \right] \sin \left( N\phi - \frac{N+1}{2}\pi \right), \\
& - 2 \frac{dA}{dt} + 2 \frac{dA}{dt} \frac{d\phi}{dt} + A \frac{d^2\phi}{dt^2} \\
&= \epsilon \left[ J_{N-1}(A) + J_{N+1}(A) \right] \cos \left( N\phi - \frac{N+1}{2}\pi \right). \quad (19)
\end{aligned}$$

上式表明,此时  $A, \phi$  将是时间的函数,但它们对时间的依赖关系近似正比于微扰参量  $\epsilon$ ,因此可以忽略时间的二阶导数项,以及时间导数的乘积项,这样在小  $\epsilon$  条件下,可利用哈密顿方法求解方程(19).表明系统在做回旋运动的过程中其振幅和位相同时作慢变运动,运动轨迹出现调制运动(modulation),调制运动的频率正比于静电波的振幅  $\epsilon$ .随着静电波振幅增加,调制频率也增加,当调制频率达到了回旋运动(是系统的基本运动)的频率同量级时,调制将消失,此时系统将向混沌状态转变,出现共振加热状态,而在此之前应称为共振加速.

如果静电波不是回旋频率的整数倍,那么可以将(18)式的一阶解代入方程(16),而得到二阶解

$$\begin{aligned}
z_2 = & \sum_{n, m = -\infty}^{\infty} A_{nm} \sin[(n+m-2\omega)t \\
& - (n+m)\phi + (n+m)\pi/2] \\
& + B_{nm} \sin[(m-n)t - (m-n)\phi \\
& + (m-n)\pi/2], \quad (20)
\end{aligned}$$

其中

$$A_{nm} = \frac{1}{2} \frac{J_m(A)J_n(A)}{[1-(m-\omega)^2][1-(m+n-2\omega)^2]},$$

$$B_{nm} = \frac{1}{2} \frac{J_m(A)J_n(A)}{[1-(m-\omega)^2][1-(m-n)^2]}.$$

我们可以发现  $\omega \neq N$ ,但  $\omega = N/2$  时,系统同样将出现共振.此时应该将引起共振的二阶项前移到零阶项(若仅前移到一阶项,则将引起一阶解的发散),这样可以保证一阶、二阶解仍然有限.这时的零阶方程变为

$$\begin{aligned}
& 2A \frac{d\phi}{dt} + \frac{d^2\phi}{dt^2} - A \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\
&= \epsilon^2 \left[ \frac{dF(A, \omega)}{dA} \sin \left( N\phi - \frac{N+1}{2}\pi \right) \right. \\
& \quad \left. + G(A, \omega) \right], \\
& - 2 \frac{dA}{dt} + 2 \frac{dA}{dt} \frac{d\phi}{dt} + A \frac{d^2\phi}{dt^2} \\
&= \epsilon^2 \frac{F(A, \omega)}{A} \cos \left( N\phi - \frac{N+1}{2}\pi \right), \quad (21)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
F(A, \omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(N-m)J_m(A)J_{N-m}(A)}{1-(m-\omega)^2}, \\
G(A, \omega) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(A)}{1-(m-\omega)^2} \frac{dJ_m(A)}{dA},
\end{aligned}$$

表明  $A, \phi$  对时间的依赖关系近似正比于  $\epsilon^2$ .同理可以得到系统在做回旋运动的过程中其振幅和位相同时作慢变运动,调制频率正比于静电波的振幅平方  $\epsilon^2$ .随着静电波振幅增加,调制频率比  $\omega = N$  时增加更快,当调制频率达到了回旋频率同量级时,调制消失,系统将向混沌状态转变,出现共振加热状态.

同理在求解方程(17)时可以发现,当静电波的频率  $\omega = N/3$  时系统将出现共振.值得注意的是,此时系统的调制频率仍然正比于静电波的振幅平方  $\epsilon^2$ .这是因为虽然系统的频率  $\omega \neq N/2$ ,但二阶解中当  $m-n = \pm 1$  时,  $B_{nm}$  发散,因此这些项需要前移到零阶项,即在零阶方程中要保留  $G(A, \omega)$ .依此类推,在求解  $N$  阶方程时将发现  $\omega = M/N$  时,也出现共振,与前面的直观分析相符合.当波的频率特别低时,以上的微扰展开需要特别小心,因为此时,一阶解有可能大于零阶解,因此需要将这些项前移到零阶项,最后可以发现当频率特别低时,调制频率与静电波的振幅无关,只决定于静电波的频率.事实上系统只能作规则运动,不会出现混沌,从而只有加速,而达不到加热的效果.为了证实以上分析,我们需要对系统作数值模拟.

### 3. 数值模拟

本文利用 4, 5 阶的 Runge-Kutta 方法进行数值模拟.首先取(6)式中  $k=l, \Phi=1.0$ ,对不同频率进行计算,得出经过 2000s 后该粒子的最大速度平方值随频率的变化关系如图 1(a)(b)所示.这里取初始位置  $x_0=0$ ,  $x$  方向上的初始速度为 2.0,  $y$  方向上的速度根据(5)式由  $x$  值得出,  $z$  方向由于作匀速运动,可以不考虑.

从图中可以发现在频率低于回旋频率,振幅为 1 的静电波的作用下,粒子获得的最大动能随频率  $\omega$  的变化曲线除了在  $1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4$  处出现一些峰以外没有非常显著的突变.表明除了上述共振峰以外其他有理频率值也能使粒子得到一定的能量,这与小振幅线性情形完全不同.线性情形时只有整数倍频率能使粒子获得明显的加速,而其他频率

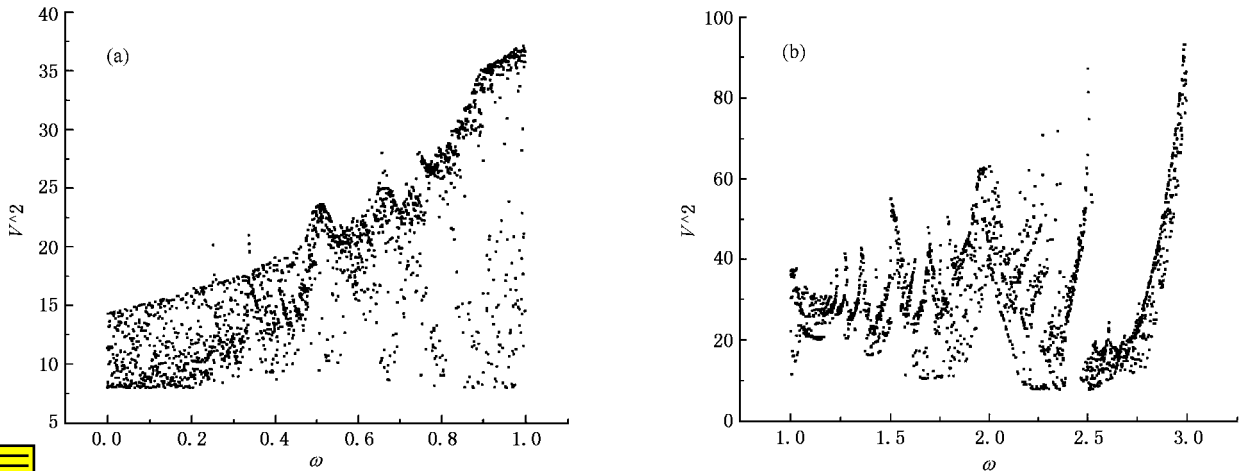


图 1 (a)最大动能随频率的变化图(低频部分)(b)最大动能随频率的变化图(高频部分)

几乎不能使粒子加速.图 1(a)同时表明如上一节多标度展开分析的那样  $\omega = M/N$  时均能产生共振效应,但由于大  $N$  对应于高阶效应,因此  $N$  越小共振效应越明显.这从图 1(b)的高频(即频率高于回旋频率)情形看得更为明显,其峰值主要对应于  $N < 5$  情形,如  $6/5$   $5/4$   $4/3$   $3/2$  等等.前述数值模拟表明粒子在特定频率的静电波的非线性作用下会出现明显的增能过程.然而要了解这些粒子的增能过程是

规则的加速过程还是无规的加热过程,需要仔细研究系统相空间中固定点(fixed points,或称不动点)的产生及演化过程,由于定量分析很复杂将另文讨论.本文通过直接对(6)式作数值研究.方程(6)虽然描述的是单粒子过程,如果能确定单粒子在静电波的非线性作用下,其长时间的运动状态处于混沌状态,那么我们有理由认为大量粒子的统计结果是呈现无规的热运动状态.为了研究粒子是否进入混沌状态,

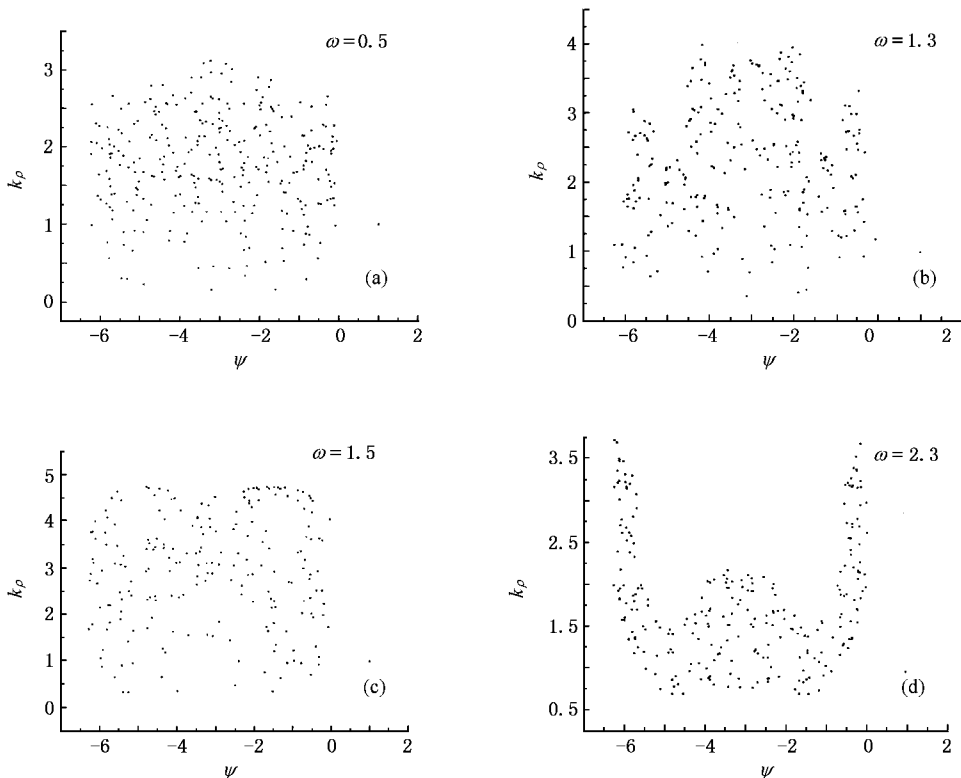


图 2 频率分别为  $1/2$   $4/3$   $3/2$  和  $7/3$  时的庞加莱截面

我们重点研究粒子轨迹的庞加莱截面. 图 2 分别给出了静电波频率为  $1/2$ ,  $4/3$ ,  $3/2$  和  $7/3$ , 振幅为 1 时粒子运动的庞加莱截面. 其中横轴  $\psi = kx - \omega t$  表示瞬时位相, 纵轴为  $k\rho$ , 其中  $\rho = v/\Omega_e$  表示瞬时回旋半径. 其中选取初始位置  $x_0 = 1.0$ , 初始速度  $v_{x0} = -1.0$ .

从图 2 可以看出四个频率的静电波均导致了粒子处于混沌状态, 即粒子处于被加热过程中.

粒子的增能效果不仅依赖于驱动波的频率, 而且也依赖于驱动波的振幅. 为此我们计算了不同频率, 不同振幅组合下粒子经过 800s 的演化以后, 其后 200s 时间内粒子的平均动能, 结果如图 3 所示. 发现小振幅时, 对于频率依赖非常敏感, 只有特定频率的波才能导致粒子的增能, 这与朗道共振相一致, 随着振幅的增加, 整体而言各种频率都有一定的

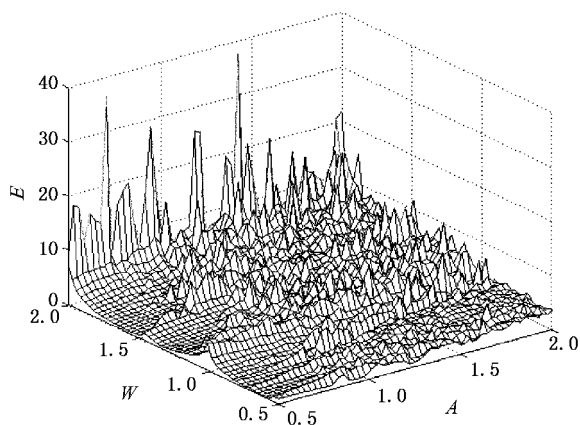


图 3 粒子 800—1000s 时间内平均动能与频率  $\omega$ , 振幅  $A$  的关系图

加热效果, 但某些频率效果更佳. 对于具有相同频率不同振幅的波, 并不是振幅越大, 增能效果就越好, 而是存在一个最佳值. 例如  $\omega = 1$ , 振幅  $\varepsilon = 1.7$  时, 存在一个特别尖锐的峰. 这是静电波产生的强迫运动与均匀磁场产生的回旋运动相互作用的结果.

## 4. 结论与讨论

至此我们通过多标度展开, 得到了新的统一的非线性共振条件  $\omega = M\Omega_e/N$ , 并且得到了数值模拟的证实. 通过数值模拟进步发现在驱动波振幅足够大时, 虽然任意的  $N, M$  值确实都能够使粒子增能, 但只有当  $N, M$  较小时增能效果才特别明显, 而且能产生无规的热运动, 即得到加热. 但如何从规则运动趋向于混沌状态还有待于进一步的研究, 特别是低频情形. 经过初步的研究表明其混沌状态显著不同于朗道共振情形, 具体结果将另文讨论. 通过数值模拟还发现具有相同频率不同振幅的波, 并不是振幅越大, 增能效果就越好, 而是存在多个峰值, 这对如何选择适当的波强度从而达到最佳的加热效果具有重要的实际指导意义. 最后值得指出的是上述结论虽然是在讨论静电波对磁化等离子体的加热问题中得出, 但事实上方程 (6) 可以描述一大类物理问题, 具有一定的普遍性. 例如阿尔芬波的等离子体加热问题, 从而有可能应用于日热冕加热问题的讨论, 以及空间等离子体中的磁声波加热问题等.

作者感谢陈骝教授和王晓刚教授富有启发性的讨论.

- [ 1 ] Chen L, Lin Z, White R 2001 *Phys. Plasmas*. **8** 4713  
 [ 2 ] White R, Chen L, Lin Z 2002 *Phys. Plasmas*. **9** 1890  
 [ 3 ] Abe H, Okada H, Itatani R 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 1153  
 [ 4 ] McChesney J M, Stern R A, Bellan P M 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 1436  
 [ 5 ] Gates D A, Gorelenkow N N, White R B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 205003  
 [ 6 ] Sheng Z M, Mima K, Senluku Y *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88**

055004

- [ 7 ] Strozzi D J, Ram A K, Bers A 2003 *Phys. Plasmas*. **10** 2722  
 [ 8 ] Taguchi T, Antonsen Jr T M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 205003  
 [ 9 ] Liu H, He X T, Chen S G 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066409  
 [ 10 ] Shi B R, Long Y X, Dong J Q *et al* 2003 *Chin. Phys.* **12** 1251  
 [ 11 ] Chen F F 1994 *An introduction to Plasma Physics and controlled fusion* (Plenum press, New York)  
 [ 12 ] Struble R A, Fletcher J E 1962 *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **10** 314

# Simulation on heating of plasma in a magnetic field with electrostatic wave<sup>\*</sup>

Sheng Zheng-Mao Wang Yong Ma Jian Zheng Si-Bo

( Department of Physics , Zhejiang University , Hangzhou 310027 , China )

( Received 4 March 2005 ; revised manuscript received 11 May 2005 )

## Abstract

A uniform nonlinear resonant condition for interaction between electrostatic wave and charged particles in a uniform magnetic field is given by multi-scale expansion. It is verified by numerical simulation. It is shown that resonant heating can be produced by electrostatic wave with sub-harmonic frequency of the cyclotron. Moreover it is shown that the heating efficiency does not increase with the amplitude of driving wave even if for the same frequency, which means there is an optimum combination of frequency and amplitude to get efficient heating.

**Keywords** : plasma , resonant heating , nonlinear dynamics

**PACC** : 5235M , 5250 , 0547

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No.40390150 ) and the National Basic Research Project " Nonlinear Science " of China( Grant No. G2000077305 ).