

正弦平方势与正电子面沟道辐射的一般特征

罗诗裕[†] 邵明珠

(东莞理工学院电子工程系, 东莞 523106)

(2005 年 5 月 20 日收到, 2005 年 7 月 4 日收到修改稿)

引入正弦平方势, 在经典力学框架内, 将面沟道粒子的运动方程化为标准的摆方程, 并用 Jacobian 椭圆函数和椭圆积分解析地给出系统的解和粒子运动周期, 导出了正电子面沟道辐射的瞬时辐射强度、平均辐射强度和辐射谱特征. 结果表明, 沟道辐射频率已进入 γ -能区, 并指出了利用它作为短波长激光的可能性.

关键词: 沟道辐射, 非线性, 正弦平方势

PACC: 6180

1. 引言

当带电粒子沿着晶体某些方向(特别是低晶面指数方向)运动时, 就像进入了一条通道一样很容易穿透到晶体内部, 这个现象称为沟道效应. 经典物理学证明^[1], 在电磁场中运动的带电粒子, 只要它的加速度不为零, 就要自发地向外辐射电磁波. 在晶格场中运动的带电粒子也不例外, 强大的晶格场可以使辐射能量达到很高. 作沟道运动的带电粒子将不断向外辐射能量, 这种辐射称为沟道辐射. 带电粒子的沟道辐射是由于粒子横向运动引起的, 对于 10MeV 的正电子, 辐射能量可达 keV 量级.

在平面连续近似下, 正电子在面沟道中的运动行为类似于线极化摆动器中的电子运动. 同样, 在连续近似下, 电子在轴沟道中的运动行为十分类似于螺旋摆动器中的自由电子. 自由电子激光的相干性是自由电子通过摆动器(场)同辐射场相互作用形成“拍波”(有质动力波), 并被“拍波”俘获(同步)来实现的. 目前, 自由电子激光的发展方向之一就是如何获得短波长、大功率的自由电子激光. 但是, 要用传统的方法把自由电子激光推向更短的波长将在技术上遇到严重挑战. 注意到当今科学技术的最大特点之一就是交叉和融合, 自由电子激光和带电粒子沟道辐射相结合可望得到 X 激光或 γ 激光, 从而引起了人们的密切关注.

带电粒子的沟道辐射是自发辐射, 如何把它改

造为相干辐射是问题的关键. 如果能在晶体中产生一种稳定的驻波, 则电子同驻波场相互作用的结果, 可望得到一种相干的沟道辐射. 值得注意的是, 因为 γ 激光的能量高, 不能用常规的反射镜方法(谐振腔), 于是有人提出利用弯曲晶体(弯晶), 并通过自发的沟道辐射在弯晶中的动力学衍射来获得相干光. 近年来, 又有人提出用声振方法使沟道平面呈波纹状, 带电粒子在波浪形沟道中运动可望得到相干的沟道辐射; 也有人设想, 利用沟道辐射与超晶格多层薄膜结构的动力学衍射来得到相干光. 本文讨论沟道辐射的一般特征, 下一篇文章讨论如何把沟道辐射改造为相干辐射.

我们曾对带电粒子的沟道效应进行过比较多的研究^[2-6], 发现沟道效应与粒子的运动行为直接相关, 而带电粒子在沟道中的运动行为则决定于粒子-晶体相互作用势. 常用的粒子-晶体相互作用势有 Lindhard 势, Moliere 势, 但是, 由于相互作用势的复杂性, 一般都只能数值求解. 我们引入正弦平方势来描述粒子-晶体相互作用^[7], 把粒子运动方程化为标准的摆方程, 解析地处理了沟道辐射强度、最大辐射频率和辐射谱的一般特征. 结果表明, 对于 10MeV 的正电子, 辐射能量的确早已进入 X 能区. 最后, 以正电子在碳单晶中的沟道辐射为例进行了具体计算, 得到了与其他工作基本符合的结果^[8-10].

2. 正弦平方势和粒子运动方程

根据牛顿第二定律, 粒子运动方程可表示为

[†] E-mail: fgluoshiy@dgut.edu.cn

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{d}{dx} V(x) = 0, \quad (1)$$

其中 $m = m_0 \gamma$ 是粒子质量, γ 是相对论因子, m_0 是粒子静止质量, $V(x)$ 是粒子 - 晶体相互作用势. 利用我们曾经提出过的正弦平方势^[7], 可将它表示为

$$V(x) = K\beta_1 \sin^2(\pi x/d_p), \quad (2)$$

其中 β_1 是势参数,

$$K = \pi z_1 z_2 e^2 N d_p^2, \quad (3)$$

d_p 是晶面间距, $N d_p^2$ 是晶体原子的面密度, z_1 是入射粒子的原子系数, z_2 是靶原子序数.

令

$$\xi = 2\pi x/d_p, \quad \tau = \frac{2\delta^{1/2} \nu}{d_p} t, \quad (4)$$

$$\delta = \epsilon^2 \pi^2 \beta_1 / 4, \quad \epsilon^2 = K/E, \quad E = mv^2/2, \quad (5)$$

ν 是粒子纵向运动速度. 将 (2—5) 式代入方程 (1), 可得

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} + \sin \xi = 0. \quad (6)$$

方程 (6) 是一个标准的摆方程.

方程 (6) 的等价系统可以表示为

$$\dot{\xi} = \zeta, \quad (7)$$

$$\dot{\zeta} = -\sin \xi.$$

相应的 Hamiltonian 量

$$h = \frac{\zeta^2}{2} + (1 - \cos \xi), \quad (8)$$

根据 h 的大小, 相平面上的轨道分为三类.

2.1. 异宿轨道 $h = 2$

把相平面分为两个区域, 相应的解可表示为

$$\xi = \pm 2 \arcsin(\operatorname{sh} \tau), \quad (9)$$

$$\zeta = \pm 2 \operatorname{sech} \tau,$$

\pm 号分别对应上、下平面的两条异宿轨道. 粒子沿这条轨道运动的周期为无穷.

2.2. 荡型周期轨道 $0 < h < 2$

相应的解可表示为

$$\xi = 2 \arcsin(\kappa \operatorname{sn} \tau), \quad (10)$$

$$\zeta = 2\kappa \operatorname{cn} \tau,$$

式中 $\operatorname{sn} \tau$ 和 $\operatorname{cn} \tau$ 是 Jacobian 椭圆函数, $\kappa = h/2$ 是椭圆函数的模. 粒子沿这族轨道的运动周期

$$T = 4K(\kappa), \quad (11)$$

其中 $K(\kappa)$ 是第一类椭圆积分. 当 h 单调增加时, 周期 T 从 2π 增加到无穷.

2.3. 回转型周期轨道 $h > 2$

相应的解可表示为

$$\xi = \pm 2 \arcsin\left(\operatorname{sn} \frac{\tau}{\kappa'}\right), \quad (12)$$

$$\zeta = \pm \frac{2}{\kappa} \operatorname{dn} \frac{\tau}{\kappa'}, \quad (13)$$

式中 $\kappa' = (2/h)^{1/2}$, $\operatorname{dn} \tau$ 为 Jacobian 椭圆函数. 粒子沿轨道 (12) (13) 的运动周期

$$T' = 2\kappa' K(\kappa'), \quad (14)$$

当 h 单调减少时, 周期 T' 由零增加到无穷.

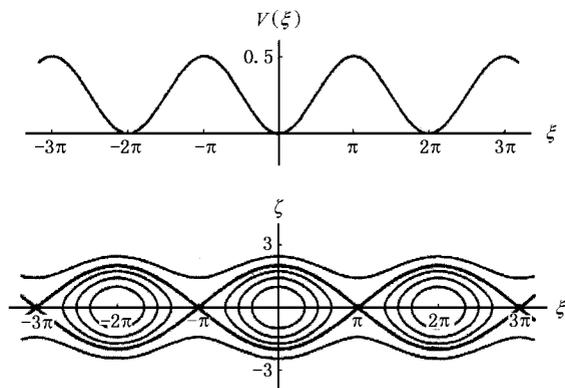


图 1 正弦平方势与系统的相平面特征. 从内到外 $h = 0.5, 1, 1.5, 2, 3$

图 1 给出了正弦平方势和系统的相平面特征. 由图 1 可以看出, 分界线 ($h = 2$) 把相平面分成两部分. 在分界线的内部 ($0 < h < 2$), 相轨道是闭合的, 描写的是摆绕平衡点的来回振荡, 振荡型周期轨道描写的是沟道粒子的运动行为. 在分界线的外部 ($h > 2$), 相轨道是开放的, 开放型周期轨道描写的是摆绕支点旋转运动, 旋转型周期轨道描写的是准沟道粒子的运动行为.

3. 辐射强度

沟道辐射强度与沟道粒子的运动行为有关. 换句话说, 与沟道粒子的轨道特征有关, 下面分两种情况进行讨论.

3.1. 瞬时辐射强度

对于超相对论带电粒子, 它的瞬时辐射强度可表示为^[1]

$$I_{\text{in}}(t) = \frac{\mathcal{X}(z_1 e)^4 \epsilon^2 \gamma^2}{3m^2 c^3}, \quad (15)$$

其中 c 是光速, ε 是横向电场强度, $z_1 e \varepsilon$ 是作用在沟道粒子上的力, 它的大小与粒子的轨道特征有关, 因而与运动方程的解有关. 根据定义, 可将 $z_1 e \varepsilon$ 表示为

$$z_1 e \varepsilon = - \frac{\partial V(x)}{\partial x}, \quad (16)$$

其中 $V(x)$ 是粒子-晶体相互作用势. 由 (2) 和 (10) 式, 可将上式化为

$$z_1 e \varepsilon = - A \sin \xi, \quad (17)$$

其中 $A = \pi K \beta_1 / d_p$, ξ 由 (10) 式和 (4) 式给出.

将 (17) 式代入 (15) 式, 可得

$$I_m(t) = I_0 \kappa^2 \text{sn}^2(\rho t) \text{dn}^2(\rho t), \quad (18)$$

其中

$$I_0 = \frac{2\pi^2 A^2 (z_1 e)^2 \beta_1^2 \gamma^2}{3m^2 c^3}, \quad \rho = \frac{2\delta^{1/2} v_{\perp}}{d_p}, \quad (19)$$

v_{\perp} 是粒子的横向速度. 由 (18) 式可以看出, 带电粒子的瞬时辐射强度与运动方程 (6) 的解 (10) 直接有关, 而且可用 Jacobi 椭圆函数严格地把它表示出来.

3.2. 平均辐射强度

瞬时辐射强度描述了沟道辐射的瞬态特征, 而实验上的可观测量却是平均辐射强度. 平均辐射强度 I 定义为瞬时辐射强度在一个周期内的平均值, 即

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T I_m(t) dt. \quad (20)$$

将 (18) 式代入上式, 并注意到 $T = \frac{d_p \tau}{2\delta^{1/2}}$, 完成积分后, 可得

$$I = \frac{\kappa'^2 I_0}{3} \left[\frac{(2\kappa^2 - 1)E(\kappa)}{\kappa'^2 K(\kappa)} - 1 \right], \quad (21)$$

其中

$$\kappa'^2 = 1 - \kappa^2 \quad (22)$$

是 Jacobian 椭圆函数的补模, $E(\kappa)$ 是第二类椭圆积分. 从 (19) 和 (21) 式可以看出, 带电粒子沟道辐射的平均强度与粒子的振幅的平方成正比.

4. 辐射谱特征

4.1. 辐射频率

考虑到 Doppler 效应, l 次谐波的辐射频率 ω_l 可以表示为^[1]

$$\omega_l = \frac{l\Omega}{1 - \beta_x \cdot n}, \quad (23)$$

其中 β_x 是无量纲的粒子横向速度, n 是辐射方向的单位矢量, 而

$$\Omega = \Omega_0 \gamma^{-1/2}, \quad (24)$$

其中 $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 是惯性系中粒子横向振动频率, T 是以时间为单位的振动周期, 且可由 (11) 式和 (4) 式给出. 当粒子运动方向与辐射方向一致时, 辐射频率最大. 进一步考虑相对论效应, l 次谐波的最大辐射频率可以表示为^[1]

$$\omega_{lm} = 2l\Omega_0 \gamma^{3/2}. \quad (25)$$

4.2. 辐射谱特征

在超相对论情况下, 带电粒子沟道辐射的角分布大部分都集中在粒子运动方向上. 由文献 [1] 可知, 角宽 $\Delta\theta$ 可近似地表示为

$$\Delta\theta \sim \gamma^{-1}. \quad (26)$$

要了解详情沟道辐射谱分布, 有必要知道角宽 $\Delta\theta$ 与粒子在沟道中的最大偏转角 α 之间的关系. 通常, 把 α 定义为粒子的横向动量与纵向动量之比, 且可近似表示为

$$\alpha = \left| \frac{dx}{dt} / c \right|_{\max}. \quad (27)$$

由方程的解 (10) 可直接求得

$$\alpha = \left(\frac{A d_p \beta_1}{m c^2 \gamma} \right)^{1/2}, \quad (28)$$

定义 $\psi = \alpha / \Delta\theta$, 并称为无量纲的偏转角. 由 (26) 和 (28) 式可得

$$\psi = \left(\frac{A d_p \beta_1 \gamma}{m c^2} \right)^{1/2}. \quad (29)$$

现在我们分两种情况进行讨论.

4.2.1. $\psi \gg 1$

当 $\psi \gg 1$ 时, 粒子在沟道中的偏转角 α 比 $\Delta\theta$ 大得多, 因此, 我们可以认为, 某个方向上的辐射强度主要是与这个方向平行的那部分轨道贡献的; 在超相对论情况下, 对向前辐射有贡献的那部分轨道大都位于 $\frac{dx}{dt} = 0$ 附近, 我们假设粒子在这部分轨道上经受的“外场”是不变的, 则情况与同步辐射完全相似. 由文献 [1] 可知, 大部分辐射都集中在频率

$$\omega_1 \cong \left| \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right|_{\max} (mc)^{-1} \gamma^2 \quad (30)$$

附近, 由 (2) 和 (30) 式, 可将上式化为

$$\omega_1 = \frac{\pi A \beta_1 \kappa \kappa' \gamma^2}{mc}, \quad (31)$$

4.2.2. $\psi \ll 1$

当 $\psi \ll 1$ 时, 粒子在沟道中的偏转角 α 比 $\Delta\theta$ 小得多, 整个轨道上的辐射都集中在粒子运动方向上. 换句话说, 在 $\Delta\theta$ 内任何一点的辐射强度, 几乎整个轨道都对它有贡献, 由文献 [1] 可知, 辐射的主要部分都集中在

$$\omega_2 \cong \frac{v_{\perp}}{x_m} \gamma^2 \quad (32)$$

附近, 其中 $v_{\perp} = dx/dt$ 是粒子的横向速度, x_m 是粒子的最大横向位移, x_m/v_{\perp} 表示粒子到达 x_m 所需要的时间, 且可近似地将它表示为

$$x_m/v_{\perp} = T/4, \quad (33)$$

其中

$$T = \frac{2d_p K(\kappa)}{c\sqrt{\delta}}, \quad (34)$$

是以“时间”为单位的运动周期. 将 (34) (33) 式代入 (32) 式, 可得

$$\omega_2 = \frac{2c\sqrt{\delta}\gamma^2}{K(\kappa)d_p}. \quad (35)$$

5. 应 用

我们以正电子为例, 具体分析一下它在碳单晶中沟道辐射的平均强度和最大频率. 选择与晶体有关的参数为 $Z_2 = 6$, $N = 1.1 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}$; 与入射粒子有关的参数 $Z_1 = 1$, $X_0 = 1$. 对于不同能量的正电子, 由 (21) (31) (35) 和 (29) 式, 可分别求得它的平均辐射强度、辐射频率以及无量纲的偏转角. 结果如表 1 所示. 与文献 [9, 10] 给出的结果基本一致. 另外, 从表 1 还可以看出, 沟道辐射能量早已进入 γ 能区, 如果将它改造为相干光, 可望得到新的 γ 激光.

表 1 正电子的平均辐射强度、最大频率以及无量纲的偏转角

γ	ω_1/s^{-1}	ω_2/s^{-1}	I (eV/s)	ψ
10^2	2.4×10^{18}	1.6×10^{19}	7.9×10^8	0.14
10^3	2.4×10^{20}	4.8×10^{20}	7.9×10^{10}	0.46
10^4	2.4×10^{22}	1.6×10^{22}	7.9×10^{12}	1.44
4×10^4	3.8×10^{23}	1.3×10^{22}	1.3×10^{14}	2.88

- [1] Landau L D 1975 *The Classical Theory of Fields* (Oxford: Pergamon Press)
- [2] Luo S Y, Shao M Z 2005 *Chin. J. Semiconductors* **26** 294 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2005 半导体学报 **26** 294]
- [3] Luo S Y, Shao M Z, Wei L X *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1219 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠、韦洛霞等 2004 物理学报 **53** 1219]
- [4] Luo S Y, Shao M Z 2004 *HEP&NP* **28** 96 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2004 高能物理与核物理 **28** 96]

- [5] Luo S Y, Shao M Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1940 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2004 物理学报 **53** 1940]
- [6] Luo S Y, Shao M Z 2003 *Nucl. Phys. Rev.* **20** 407 (in Chinese) [罗诗裕、邵明珠 2003 原子核物理评论 **20** 407]
- [7] Shao M Z 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1825 (in Chinese) [邵明珠 1992 物理学报 **41** 1825]
- [8] Korol A, Solovoyov A V, Greiner W 1998 *J. Phys. G* **24** L45
- [9] Korol A, Solovoyov A V, Greiner W 1999 *Int J. Mod. Phys. E* **8** 49
- [10] Robin N 2001 *Phys. Rev. A* **64** 052901

The sine-squared potential and properties of planar channelling radiation of positron

Luo Shi-Yu Shao Ming-Zhu

(*Department of Electrical Engineering , Dongguan University of Technology , Dongguan 523106 ,China*)

(Received 20 May 2005 ; revised manuscript received 4 July 2005)

Abstract

The sine-squared potential is introduced to describe the interaction between particles and the crystal. The motion equation of the planar channelling particles is reduced to the pendulum equation by this interaction potential. The solution of the equation and the period of the particle motion are expressed exactly by means of Jacobian elliptic function and elliptic integral. The radiation intensity and properties of the radiation spectrum are discussed. It is pointed out that it is possible to take channeling radiation as a new γ -Laser.

Keywords : channeling radiation , nonlinearity , sine-squared potential

PACC : 6180