第 55 卷 第 4 期 2006 年 4 月
1000-3290/2006/55(04)/1539-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.4,April,2006

尘埃粒子的时空结构及其性质

陈 光
(东华大学信息科学与技术学院,上海 200051)
(2005 年 5 月 24 日收到;2005 年 12 月 16 日收到修改稿)

讨论了尘埃粒子解的时空结构及其性质,导出了尘埃粒子的内空间的离散结构.证明了尘埃粒子内部的物质球是一个无坐标的平直球,因而具有最小的体积和整体的关联性.导出了在尘埃粒子的内外时空中的径向测地线并说明其连续性.阐述了由这个解所揭示的物质、引力与时空之间的内在联系.

关键词:尘埃粒子,离散时空,测地线
PACC:0230,0420

1. 引 言

文献[1]基于连续函数理论并引进了实数的层次性与离散化而建立了一个初步的离散函数理论,将此理论与经典广义相对论结合起来讨论尘埃物质的引力坍缩问题,指出了关于这个问题的连续体系的 Oppenheimer 和 Snyder 解中的 Friedmann 内解与 Schwarzschild 外解的不一致性并对其进行拓展与离散化,导出了一个非坍缩的尘埃粒子解,消除了引力奇性并揭示了时空离散化的性质.本文将进一步讨论这个解的时空结构及其基本性质.我们将证明尘埃粒子的内空间是离散的;指出尘埃粒子内部的物质球是一个无坐标的平直球,因而具有最小的体积和整体的关联性;导出在尘埃粒子的内外时空中的径向测地线并说明其连续性.由此将不但有助于对这个尘埃粒子解的深入理解,而且也揭示出物质和引力与时空之间的一种未曾发现的内在联系.

2. 尘埃粒子解

在文献[1]中所导出的尘埃粒子解是一个离散时空的修正的 Oppenheimer 和 Snyder 解.尘埃粒子的外时空($r \geqslant a$)服从 Schwarzschild 度规

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\frac{\mathrm{d}r^2}{1-2GM/r} + r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2), \tag{1}$$

而内时空($\bar{r} \leqslant a$)服从 Friedmann 度规

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\bar{t}^2 + b^2(\bar{t}) \times\left[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1-k\bar{r}^2}+\bar{r}^2(\mathrm{d}\bar{\theta}^2+\sin^2\bar{\theta}\,\mathrm{d}\bar{\phi}^2)\right]. \tag{2}$$

这里固有时 $\bar{t}$ 和尺度因子 $b(\bar{t})$ 由摆线方程给出,

$$\bar{t} = \left(\frac{\eta+\sin\eta}{2\sqrt{k}}\right),\quad b = \frac{1}{2}(1+\cos\eta). \tag{3}$$

在 $\bar{r} = a$ 处,内外时空坐标由以下的变换所联系:

$$r = ab(\bar{t}) = \frac{a}{2}(1+\cos\eta), \tag{4}$$

$$t = 2GM\left\{\ln\left|\frac{(a/(2GM)-1)^{1/2}+\tan(\eta/2)}{(a/(2GM)-1)^{1/2}-\tan(\eta/2)}\right| + (a/(2GM)-1)^{1/2} \times[\eta+(a/(4GM))(\eta+\sin\eta)]\right\}, \tag{5}$$

$$\theta = \bar{\theta}, \tag{6}$$

$$\phi = \bar{\phi}. \tag{7}$$

解的参数满足

$$k^{-1/2} = \sqrt{2}a = 4\sqrt{2}GM,$$

$$\eta = 2n\pi + \sum_{k=l}^{i'}\eta_k C^k \overset{i'}{\approx} 2n\pi,$$

其中 $l \leqslant i'$,$i' \leqslant -1$,$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N$,$N$ 为任意的正整数.于是由(3)—(6)式有

$$\bar{t} \overset{i'}{\approx} n\bar{\tau},\quad \bar{\tau} \overset{i'}{\approx} 4\sqrt{2}\pi GM, \tag{8}$$

$$r \overset{i'}{\approx} 4GM, \tag{9}$$

$$t \overset{i'}{\approx} n\tau,\quad \tau \overset{i'}{\approx} 8\pi GM. \tag{10}$$

由(8)—(10)式可知,固有时 $\bar{t}$ 和坐标时 t 是离散的.此外,若取尘埃粒子的质量为

$$M \stackrel{i'}{\approx} (8\pi G)^{-1/2},$$

则其半径为

$$r \stackrel{i'}{\approx} \frac{1}{2\pi}(8\pi G)^{1/2},$$

而基本的离散坐标时、离散固有时分别为

$$\tau \stackrel{i'}{\approx} (8\pi G)^{1/2},$$

$$\bar{\tau} \stackrel{i'}{\approx} (4\pi G)^{1/2}.$$

这些量分别具有 Planck 质量、Planck 长度和 Planck 时间的量级.

3. 尘埃粒子的内空间结构

尘埃粒子的内空间结构可以由 Friedmann 度规和Einstein 场方程来确定.基于(2)式并考虑到 $b(\bar{t}) \stackrel{i'}{\approx} 1$,可知尘埃粒子的内空间可表示为

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1-\kappa\bar{r}^2} + \bar{r}^2(\mathrm{d}\bar{\theta}^2 + \sin^2\bar{\theta}\mathrm{d}\bar{\phi}^2). \quad (11)$$

首先证明在连续空间的条件下,即当 $0 \leqslant \bar{r} \leqslant a$ 时,这个空间为四维 Euclid 空间中的三维超球面的一个部分.依照通常的方法,只要作极坐标到笛卡儿坐标的变换

$$\begin{aligned} x^1 &= \bar{r}\ \sin\bar{\theta}\cos\bar{\phi}, \\ x^2 &= \bar{r}\ \sin\bar{\theta}\cos\bar{\phi}, \\ x^3 &= \bar{r}\ \cos\bar{\theta}, \end{aligned} \quad (12)$$

且令

$$x^\mu x^\mu = x^i x^i + (x^4)^2 = \frac{1}{\kappa}$$

$$(\mu = 1,2,3,4;\ i = 1,2,3), \quad (13)$$

就可得到(11)式的等价形式为

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^i + (\mathrm{d}x^4)^2 \quad (14)$$

和

$$\bar{r}^2 = [\bar{r}\ (x^4)]^2 = x^i x^i = \frac{1}{\kappa} - (x^4)^2. \quad (15)$$

(13)式为四维 Euclid 空间中的三维超球面方程.由(15)式并考虑到 $k^{-1/2} = \sqrt{2}a = 4\sqrt{2}GM$ 和 $0 \leqslant \bar{r} \leqslant a$,我们有 $a^2 \leqslant (x^4)^2 \leqslant k^{-1}$,而一个完整的三维超球面对应于 $0 \leqslant (x^4)^2 \leqslant k^{-1}$,故这时的(11)式对应于三维超球面的一个部分.

接着证明尘埃物质并不分布在上述部分的三维超球面上.只要考虑到 Friedmann 坐标为尘埃物质的共动坐标,如果尘埃物质分布在一个部分的三维超球面上,则对关联于尘埃物质的线元而言,必有 $\mathrm{d}\bar{r} = 0$,$\mathrm{d}\bar{\theta} = 0$ 和 $\mathrm{d}\bar{\phi} = 0$.这是因为在共动坐标系中任一部分的尘埃物质沿着任一方向的速度均为零.而具有零尺度的尘埃物质只能对应于点粒子,这就与具有有限尺度的尘埃球解相矛盾.鉴于在连续时空中不容许有尘埃球解,于是尘埃球只能存在于离散时空之中.

最后证明尘埃球在空间性质上是平直的.将 Friedmann 度规(2)式代入 Einstein 场方程,可以导出关于尘埃物质的一个方程[2]

$$\dot{b}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho b^2. \quad (16)$$

由 $k^{-1/2} = \sqrt{2}a = 4\sqrt{2}GM$,并考虑到 $b \stackrel{i'}{\approx}$ 和 $\dot{b} \stackrel{i'}{\approx} 0$,有

$$\begin{aligned} \rho &\stackrel{i'}{\approx} \frac{3k}{8\pi G} \stackrel{i'}{\approx} \frac{M}{v_q}, \\ v_q &= \frac{4\pi}{3}a^3. \end{aligned} \quad (17)$$

这里,M 和 ρ 分别为尘埃粒子的质量和质量密度,而 v_q 为平直空间中的半径为 a 的球体体积.可见,尘埃物质构成一个平直的尘埃球.

综上所述,可以导出球径坐标的离散化,使得相应于(15)式有

$$\bar{r} \stackrel{i'}{\approx} a,$$

$$x^4 \stackrel{i'}{\approx} a.$$

从而由(13)式所表示的四维 Euclid 空间中的三维超球面便退化为一个二维球面,而尘埃物质就存在于这个球面的内部且是无坐标的.可以将这个球面所包围的体积理解为一个最小的体元,而存在于这个体元中的尘埃物质则具有一种整体而非局域的关联性.

4. 在尘埃粒子的内外时空中的径向测地线

如上所述,尘埃粒子的内时空服从 Friedmann 度规(2)式而外时空服从 Schwarzschild 度规(1)式,两者在 $r \stackrel{i'}{\approx} \bar{r} \stackrel{i'}{\approx} a$ 处相互连接.以下将通过讨论在尘埃粒子的内外时空中的测地线来说明时空几何在该连接点处的连续性.为了简化讨论,仅考虑径向测地运动的情况.依照通常的方法,可以导出在外 Schwarzschild 时空中的径向测地线方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^2\left(1 - \frac{\delta}{\beta^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right) \quad (18)$$

或

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)^2 = \left(1 - \frac{\delta}{\beta^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right), \qquad (19)$$

式中,

$$\mathrm{d}R = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}},$$

$$\mathrm{d}T = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}\,\mathrm{d}t,$$

β 为一个积分常数,δ 为一个参数且当 $\delta = 1$ 时对应于类时测地线,而当 $\delta = 0$ 时对应于类光测地线.

以 $\delta = 1$ 代入(19)式可得类时测地线方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right). \qquad (20)$$

由(20)式并考虑到 $r \geqslant a = 4GM$,故有

$$\beta^2 \geqslant 1 - \frac{2GM}{a} = \frac{1}{2}.$$

相应于 β^2 的不同取值有两种情况.

1)当 $1 \geqslant \beta^2 = 1 - \frac{2GM}{a_N} \geqslant \frac{1}{2}$ 时,有 $a_N \geqslant r \geqslant a$. 这里,当 $r \overset{i'}{\approx} a_N$ 时,有

$$\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right| = 0,$$

而当 $r \overset{i'}{\approx} a$ 时,有

$$\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right| \overset{i'}{\approx} \left(1 - \frac{1}{2\beta^2}\right)^{1/2}.$$

这时,该测地线对应于一种束缚状态. 特殊地,当 $r \overset{i'}{\approx} a_N \overset{i'}{\approx} a$ 时为静止状态.

2)当 $\beta^2 > 1$ 时,有 $a \leqslant r < \infty$. 这里,当 $r \to \infty$ 时,有

$$\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right| = \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right)^{1/2},$$

而当 $r \overset{i'}{\approx} a$ 时,有

$$\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right| \overset{i'}{\approx} \left(1 - \frac{1}{2\beta^2}\right)^{1/2}.$$

这时,该测地线对应于一种散射状态.

以 $\delta = 0$ 代入(19)式则得类光测地线方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)^2 = 1. \qquad (21)$$

同理,可以导出在尘埃粒子的内 Friedmann 时空中的径向测地线方程为

$$\left(\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}\bar{t}}\right)^2 = b^{-2}(1 - k\bar{r}^{-2})\left(1 - \frac{\delta}{\eta^2}\right) \qquad (22)$$

或

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)^2 = \left(1 - \frac{\delta}{\eta^2}\right), \qquad (23)$$

式中,

$$\mathrm{d}R = \frac{b\,\mathrm{d}\bar{r}}{\sqrt{1 - k\bar{r}^{-2}}},$$

$$\mathrm{d}T = \mathrm{d}\bar{t},$$

$$\eta^2 = 2\beta^2,$$

δ 为一个参数且当 $\delta = 1$ 和 $\delta = 0$ 时分别对应于类时和类光测地线. 以 $\delta = 1$ 和 $\delta = 0$ 分别代入(23)式可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \qquad (24)$$

和

$$\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right)^2 = 1. \qquad (25)$$

将(20),(21)式与(24),(25)式相比较可知,在 $r \overset{i'}{\approx} \bar{r} \overset{i'}{\approx} a$ 处可由内外时空度规而导出一致的径向测地运动速度,从而说明了时空几何在这里的连续性.

5. 结　　论

综上所述,尘埃粒子具有 Planck 质量和 Planck 尺度的离散时空结构. 尘埃粒子的外时空服从 Schwarzschild 度规并由 a 和 M 所确定. 尘埃粒子的内时空则服从 Friedmann 度规并由 k 和 a 的关系而破缺了它的四维 Euclid 空间中的三维超球面的对称性,继而由球径坐标的离散化而退化为三维 Euclid 空间中的二维球面的对称性. 尘埃物质表示为存在于该球面内部的无坐标的尘埃球,因而具有最小的体积和整体的关联性. 尘埃粒子的内 Friedmann 时空与外 Schwarzschild 时空在 $r \overset{i'}{\approx} \bar{r} \overset{i'}{\approx} a$ 处相连接并使得测地线在所有坐标点上是连续的. 而测地线的连续性则反映了尘埃粒子解的时空几何的完整性. 诚然,时空度规是定义在时空坐标上的,而测地运动则由时空度规所规定并显示了尘埃粒子的引力效应,于是引力效应便具有局域的时空性质. 尘埃粒子的这种结构特性意味着可将它的质量与引力分开,使得前者对应于一种具有整体性质的时空几何并表示为一个耦合系数,而后者则对应于一种具有局域性质的时空几何并表示为一个场. 这就是由这个尘埃粒子解所揭示的物质、引力与时空的一种内在联系. 它同时也揭示了尘埃物质本身并不存在着自引力相互作用,因而尘埃粒子是非坍缩的.

[1] Chen G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2971 (in Chinese) [陈 光 2005 物理学报 **54** 2971]

[2] Misner C W, Thorne K S, Wheeler J A 1973 *Gravitation* (San Francisco: Freeman) p710

The spacetime structure and properties of dust particle

Chen Guang

(*College of Information Science and Technoloy, Donghua University, Shanghai 200051, China*)

(Received 24 May 2005; revised manuscript received 16 December 2005)

Abstract

The spacetime structure and properties of the solution of dust particle are discussed. We derive the discrete structure of interior space of dust particle, and prove that the matter ball in the interior of dust particle is a flat ball without coordinates and has minimal volume and unitariness. Then, we derive the radial geodesics in the interior and exterior spacetime of dust particle and prove its continuity. Finally, we expound the inherent links between matter, gravitation and spacetime which were brought to light in the solution of dust particle.

Keywords: dust particle, discrete spacetime, geodesic

PACC: 0230, 0420