

(2 + 1) 维修正 Veselov-Novikov 系统的新型 折叠子及其弹性碰撞*

沈守枫 张 隽

(浙江工业大学数学系 杭州 310014)

(2005 年 8 月 25 日收到 2005 年 11 月 25 日收到修改稿)

借助 Mathematica 软件, 在 Bäcklund 变换的基础上采用多线性变量分离 (MLVS) 方法, 得到了 (2 + 1) 维修正 Veselov-Novikov 系统的一个含低维任意函数的新的精确解. 选取合适的多值函数, 构造出新型的折叠子, 对其进行了分类并且研究了各种类型的二折叠子之间的完全弹性碰撞. 另外还给出了折叠子与隐形折叠子的相互作用. 最后把 MLVS 方法推广到一个新的 (1 + 1) 维非线性系统.

关键词: 修正 Veselov-Novikov 系统, 折叠子, 弹性碰撞, 变量分离

PACC: 0340

1. 引 言

自从 1988 年 Boiti 等^[1-3]得到了 (2 + 1) 维 Davey-Stewartson (DS) 系统中所有方向都指数衰减的 dromion 解, 关于 (2 + 1) 维局域激发模式^[4,5]的研究才日渐丰富起来. 已经发现了 dromion 解、lump 解、圆锥曲线孤子、呼吸子、瞬子和尖波 (peakon) 孤子等等, 不过这些激发模式是针对单值情况而言的. 可是在自然界中常常会出现各种无法用单值解来描述的折叠现象. 例如海浪在某个方向会以多值函数折叠, 再如折叠蛋白质、大脑皮层和流体表面的泡沫等等. 最近, Lou 等^[6,7]已经发现并定义了几类 (2 + 1) 维多值局域激发模式——折叠孤立波和折叠子. 如果折叠孤立波具有弹性碰撞性质, 则称该折叠孤立波为折叠子. 需要更深入研究的问题包括: 折叠孤立波和折叠子是否存在于其他非线性系统? 是否能发现新型的折叠孤立波和折叠子? 它们相互作用的性质如何? 为部分解决上述问题, 本文研究如下的 (2 + 1) 维修正 Veselov-Novikov (mVN) 系统^[8]:

$$u_t = u_{xxx} - u_x^3 + 3vu_x, \quad (1)$$

$$v_y = (u_x u_y)_x. \quad (2)$$

并且对折叠子进行了分类, 还研究了各种类型的二

折叠子之间的完全弹性碰撞, 同时给出了折叠子和隐形折叠子之间的相互作用.

2. mVN 系统 (1) (2) 的精确解

对于非线性系统而言, 叠加原理不再成立, 而且一个微小扰动都可能造成后继时刻行为的巨大差异, 这使得对其进行解析研究变得相当困难. 也就是线性系统中的 Fourier 变换方法和变量分离方法均不能直接应用于非线性系统. 不过近 40 年间在孤立子理论中逐渐建立了一些解析求解的有效方法^[9-15], 其中, 著名的反散射方法^[9-11]可以看作非线性 Fourier 变换方法. 但是, 非线性系统的变量分离方法研究一直进展不大. 直到最近才在几个方面得到了发展, 如 Lax 对的非线性化方法^[16]、对称约束方法^[17]、形式变量分离方法^[18]、多线性变量分离 (MLVS) 方法^[4-7]. 需要特别指出的是, MLVS 方法是一种极其重要而且有效的推广方法. 下面我们利用 MLVS 方法^[6,7]研究 mVN 系统 (1) (2). 首先把 u, v 展开为

$$u = \pm i \cdot \ln \left[\frac{g}{f} \right] + u^*, \quad (3)$$

$$v = (\ln [fg])_{xx} + v^*. \quad (4)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10501040) 资助的课题.

这里 $i = \sqrt{-1}$. 为方便起见, 记

$$g \equiv g(x, y, t),$$

$$f \equiv f(x, y, t),$$

$$u^* \equiv u^*(x, y, t),$$

$$v^* \equiv v^*(x, y, t).$$

令种子解 $\{u^* = 0, v^* = v_0(x, t)\}$ 且取多线性变量分离形式为

$$g = a_0 + a_1 p(x, t) + a_2 q(y, t) + a_3 p(x, t)q(y, t), \quad (5)$$

$$f = b_0 + b_1 p(x, t) + b_2 q(y, t) + b_3 p(x, t)q(y, t). \quad (6)$$

利用 Mathematica 软件, 由方程 (2) 可以得到约束条件

$$b_3 = \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2 - a_3 b_0}{a_0}. \quad (7)$$

由方程 (1) 可以得到

$$\begin{aligned} & (p_t - 3v_0 p_x - p_{xxx} - a_0(a_1 b_0 - a_0 b_1) \\ & + 2a_0(a_3 b_0 - a_2 b_1)q \\ & + (a_2 a_3 b_0 - a_2^2 b_1 - a_1 a_2 b_2 + a_0 a_3 b_2)q^2 \\ & + q[a_0(a_2 b_0 - a_0 b_2) + 2a_0(a_3 b_0 - a_1 b_2)p \\ & + (a_1 a_3 b_0 - a_1 a_2 b_1 + a_0 a_3 b_1 - a_1^2 b_2)p^2] = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

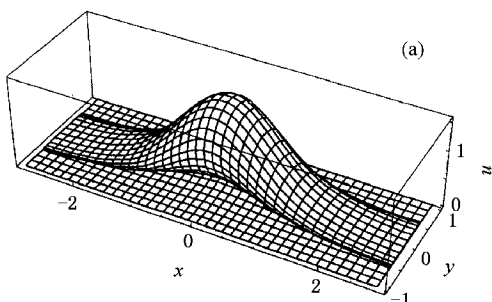
从而我们可以取

$$q = q(y), \quad (9)$$

$$v_0(x, t) = \frac{p_t - p_{xxx}}{3p_x}.$$

这样, 已经得到 (2+1) 维 mVN 系统如下的多线性变量分离解:

$$u(x, y, t) = \pm i \cdot \ln \left[\frac{a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 pq}{b_0 + b_1 p + b_2 q + \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2 - a_3 b_0}{a_0} pq} \right], \quad (10)$$



$$u(x, y, t) = \left(\ln \left[(a_0 + a_1 p + a_2 q + a_3 pq) \times \left(b_0 + b_1 p + b_2 q + \frac{a_2 b_1 + a_1 b_2 - a_3 b_0}{a_0} pq \right) \right] \right) + \frac{p_t - p_{xxx}}{3p_x}. \quad (11)$$

这里的 $p \equiv p(x, t), q \equiv q(y)$ 为任意的函数. 下面我们将对场量 $u(x, y, t)$ 的各种新型折叠子进行分类, 并且研究其相互之间的完全弹性碰撞.

3. 折叠子及其弹性碰撞

为简单起见, 我们仅讨论

$$U = -i \cdot \ln \left[\frac{1 + i p(x, t)q(y)}{1 - i p(x, t)q(y)} \right] = 2 \arctan [p(x, t)q(y)] \quad (12)$$

的折叠子及其碰撞性质. 考虑到 $p(x, t), q(y)$ 为任意函数, 从而取多值函数为

$$p = c_1 \operatorname{sech}^2[\xi - c_2 t], \quad (13)$$

$$x = \xi - c_3 \tan[\xi], \quad (14)$$

$$q = \operatorname{sech}^2[\eta], \quad (15)$$

$$y = \eta - 2 \tan[\eta]. \quad (16)$$

可以得到三种典型的单折叠子, 分别为钟形 (bell) 折叠子、尖波 (peakon) 折叠子和圈 (loop) 折叠子. 这里, 我们只对 x 方向考虑折叠的程度, 由 (15)(16) 式可知, 在 y 方向该局部激发模式均具有圈折叠子结构. 由 (13) 式表明 c_1 为折叠子振幅的大小和方向.

(14) 式中的 c_3 表示 x 方向的折叠程度, 随着 c_3 的增大, 折叠程度从无到有并且逐渐增大. 依次为钟形折叠子 (图 1)、尖波折叠子 (图 2) 和圈折叠子 (图 3).

图 1、图 2 和图 3 分别取 $c_1 = \frac{1}{8}, c_1 = 1$ 和 $c_1 = 2$, 其

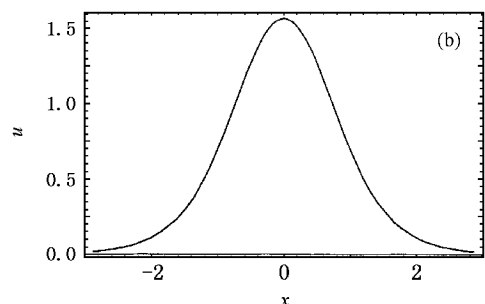


图 1 钟形折叠子的三维图形 (a) 和当 $y=0$ 时相应的二维图形 (b)

他的参数取值为 $c_2 = c_3 = 1, t = 0$. 当 $c_1 < 0$ 时, 分

别为反钟形折叠子、反尖波折叠子和反圈折叠子.

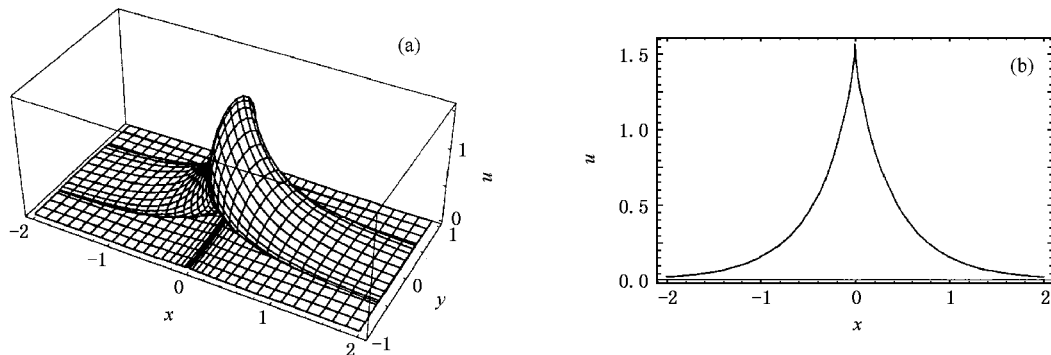


图 2 尖波折叠子的三维图形 (a) 和当 $y = 0$ 时相应的二维图形 (b)

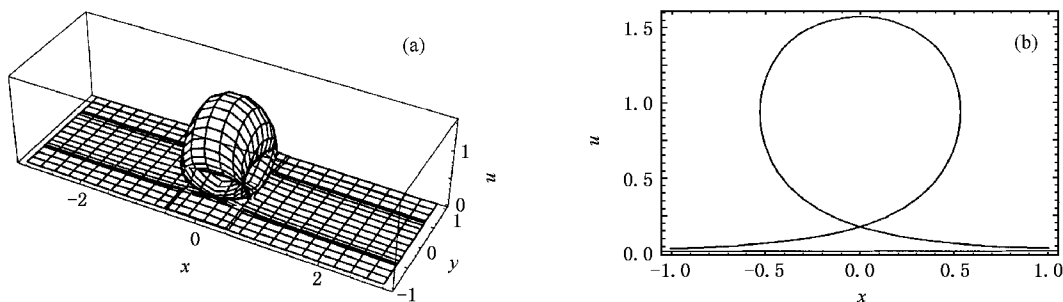


图 3 圈折叠子的三维图形 (a) 和当 $y = 0$ 时相应的二维图形 (b)

下面我们考虑各种类型的二折叠子之间的相互碰撞行为. 取如下的多值函数:

$$p = d_1 \operatorname{sech}^2[\xi] + d_2 \operatorname{sech}^2\left[\xi - \frac{t}{2}\right], \quad (17)$$

$$x = \xi - d_3 \tanh[\xi] - d_4 \tanh\left[\xi - \frac{t}{2}\right], \quad (18)$$

$$q = \operatorname{sech}^2[\eta], \quad (19)$$

$$y = \eta - 2 \tanh[\eta]. \quad (20)$$

(17)(18) 式中 d_1, d_2 表示二折叠子的振幅和方向, d_3, d_4 表示二折叠子的类型. 例如固定参数 $d_1 = d_3 = 2, d_2 = d_4 = 1$, 则可以得到如图 4—图 8 所示的尖波-圈折叠子相互之间的弹性碰撞.

同样可以得到其他的二折叠子相互弹性碰撞行为(记为折叠子 1-折叠子 2) 这里的折叠子 1、折叠子 2 可以分别为钟形折叠子、反钟形折叠子、尖波折叠子、反尖波折叠子、圈折叠子和反圈折叠子中的任意一种. 限于篇幅, 略去各种二折叠子相互作用的图像.

最后, 如果取多值函数

$$p = \operatorname{sech}^2\left[\xi - \frac{t}{2}\right], \quad (21)$$

$$x = \xi - e_1 \tanh[\xi] - e_2 \tanh\left[\xi - \frac{t}{2}\right], \quad (22)$$

$$q = \operatorname{sech}^2[\eta], \quad (23)$$

$$y = \eta - 2 \tanh[\eta], \quad (24)$$

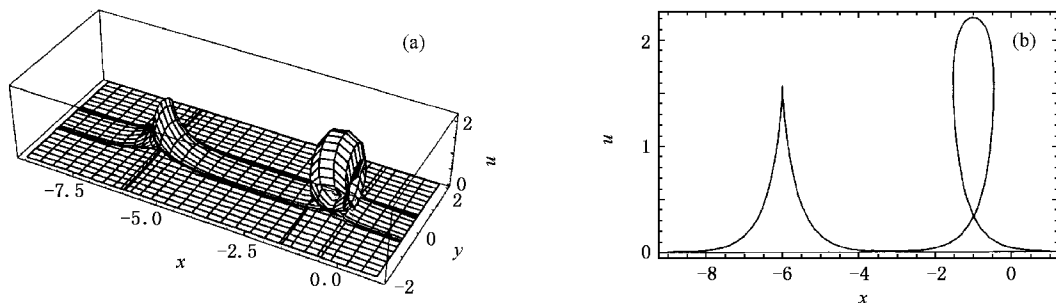


图 4 当 $t = -16$ 时的尖波-圈折叠子的位置 (a) 和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形 (b)

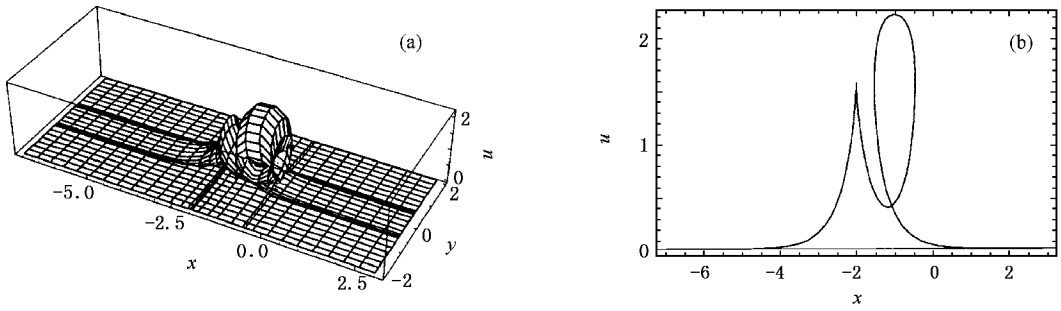


图 5 当 $t = -8$ 时的尖波-圈折叠子的弹性碰撞(a)和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形(b)

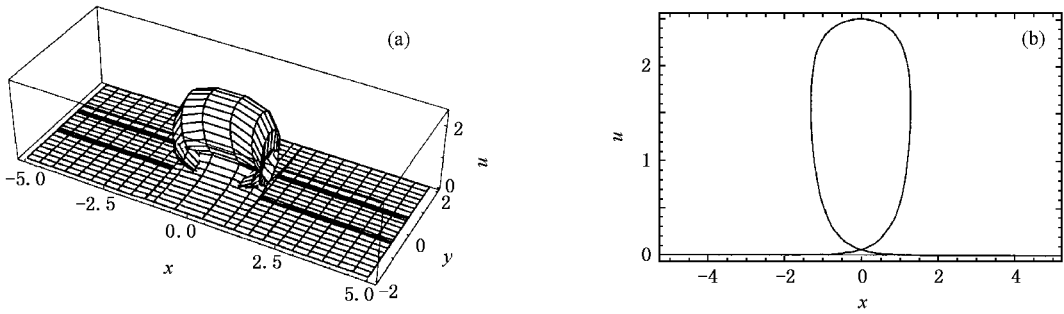


图 6 当 $t = 0$ 时的碰撞状态(a)和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形(b)

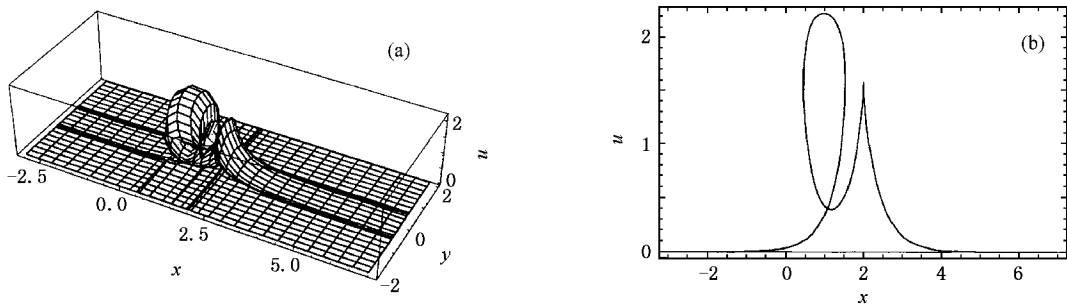


图 7 当 $t = 8$ 时的尖波-圈折叠子进行分离(a)和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形(b)

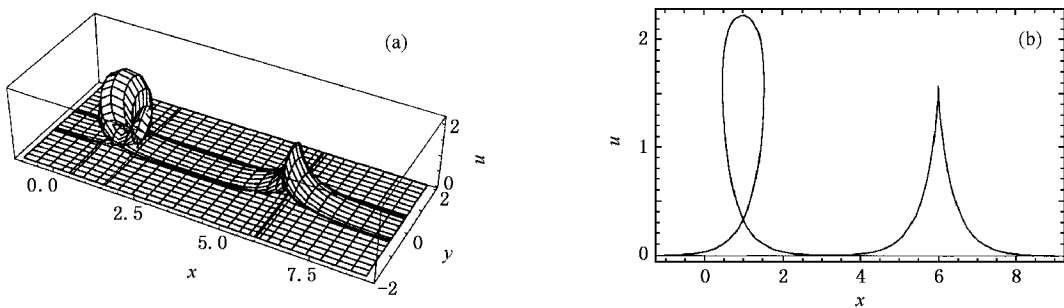


图 8 当 $t = 16$ 时的尖波-圈折叠子均有了相位移动(a)和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形(b)

可以给出各种类型的折叠子与隐形折叠子的相互作用. 例如取 $e_1 = e_2 = 2$, 有圈折叠子和隐形折叠子的

弹性碰撞(如图 9—图 13 所示). 限于篇幅, 这里略去其他类型的图像. 类似的分析见文献 [19].

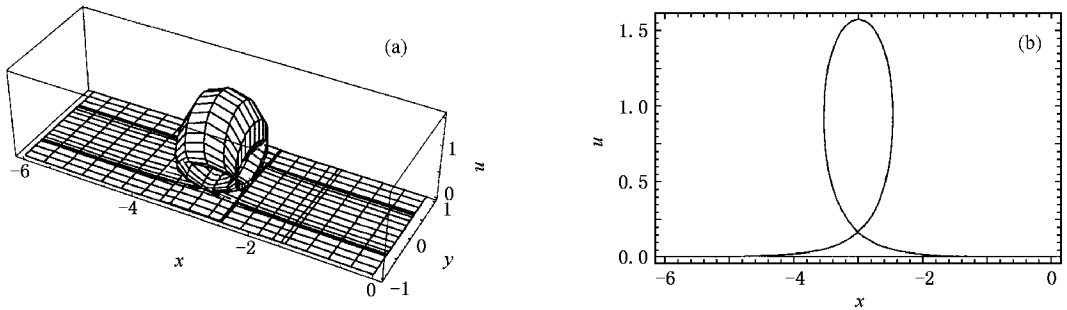


图 9 当 $t = -10$ 时只能观察到圈折叠子(a)和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形(b)

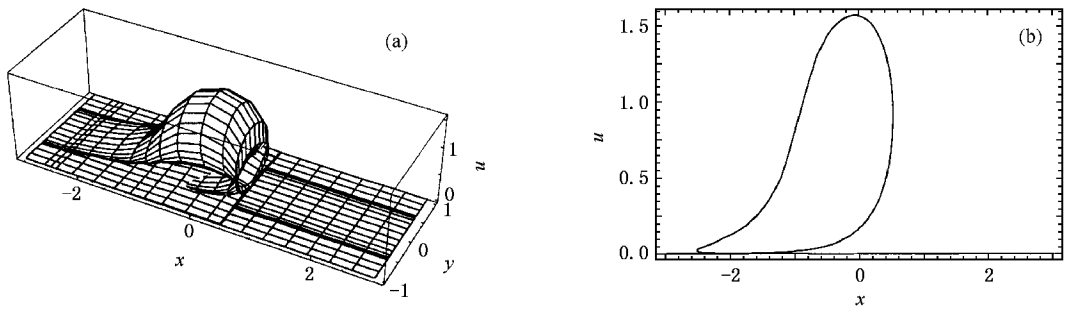


图 10 当 $t = -4$ 时圈折叠子与隐形折叠子发生了碰撞(a)和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形(b)

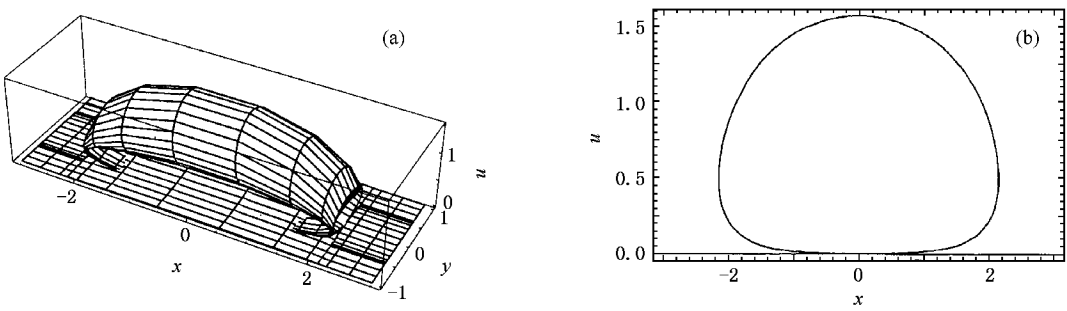


图 11 当 $t = 0$ 时碰撞形成的状态(a)和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形(b)

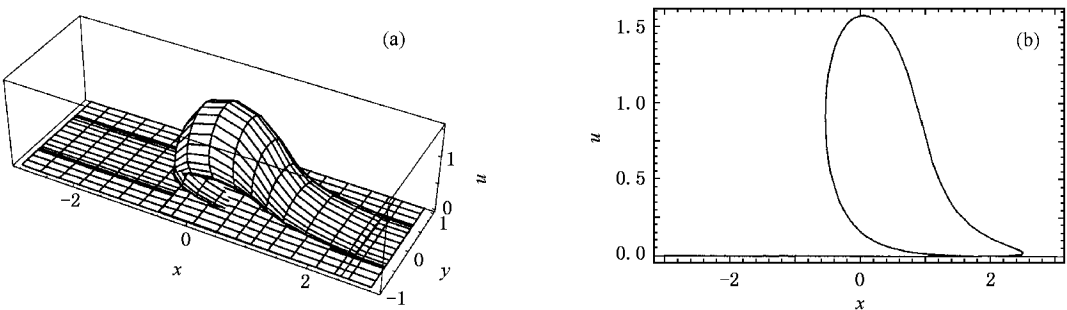


图 12 当 $t = 4$ 时圈折叠子向右逐渐远离隐形折叠子(a)和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形(b)

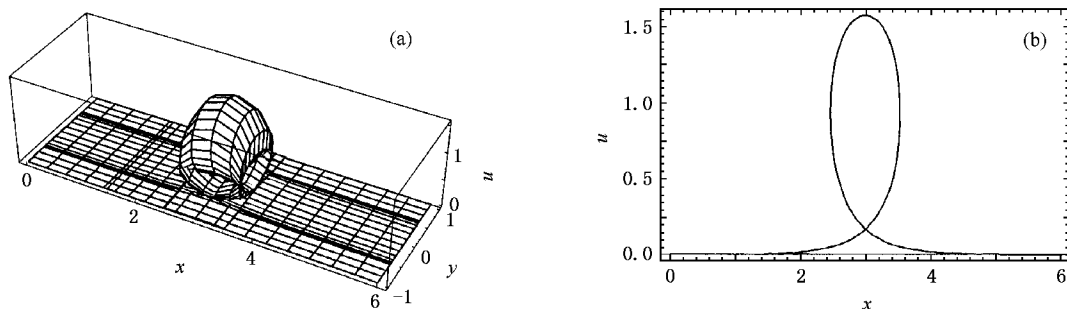


图 13 在 $t = 10$ 时只能观察到已经有了向右相位移动的圈折叠子 (a) 和 $\eta = 0$ 时相应的二维图形 (b)

4. 总 结

借助 Mathematica 软件, 在 Bäcklund 变换的基础上采用 MLVS 方法, 得到了 (2+1) 维 mVN 系统一个含低维任意函数的新的精确解. 选取合适的多值函数, 构造出新型的折叠子, 对其进行了分类并且研究了各种类型的二折叠子之间的完全弹性碰撞. 另外还给出了折叠子与隐形折叠子的相互作用.

这里用到的 MLVS 方法可以推广到 (1+1) 维非线性系统, 例如对于如下系统^[20]:

$$u_t + u_{xxx} + 3u_x w_x - 3uvw_x = 0, \quad (25)$$

$$v_t = u_x, \quad (26)$$

$$w_t = -uv, \quad (27)$$

拥有变量分离解

$$u(x, t) = (\ln[e^{\alpha t} - \alpha(x)] - \ln[e^{\alpha t} + \alpha(x)]), \quad (28)$$

$$v(x, t) = (\ln[e^{\alpha t} - \alpha(x)] - \ln[e^{\alpha t} + \alpha(x)]), \quad (29)$$

$$w(x, t) = (\ln[e^{\alpha t} - \alpha(x)] + \ln[e^{\alpha t} + \alpha(x)])_x + \int^x \frac{c \cdot \alpha(\tilde{x}) - G''(\tilde{x})}{3G'(\tilde{x})} d\tilde{x}. \quad (30)$$

这里的 $\alpha(x)$, c 任意.

对于如何在自然界中实现或观察到本文得到的折叠子和它们的物理应用均有待作进一步的研究.

[1] Boiti M, Leon J J P, Martina L et al 1988 *Phys. Lett. A* **132** 432
 [2] Hietarinta J, Hirota R 1990 *Phys. Lett. A* **145** 237
 [3] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett. A* **149** 113
 [4] Lou S Y 2000 *Phys. Lett. A* **277** 94
 [5] Tang X Y, Lou S Y, Zhang Y et al 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046601
 [6] Lou S Y 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 3877
 [7] Tang X Y, Lou S Y 2003 *J. Math. Phys.* **44** 4000
 [8] Boiti M, Martina L, Pempinelli F et al 2000 *Proceedings of the Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years after NEEDS '79* (Lecce: World Scientific) p129
 [9] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D et al 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095
 [10] Lax P D 1968 *Commun. Pure Appl. Math.* **21** 467

[11] Zakharov V E, Shabat A B 1972 *Soviet Phys. JEPT* **34** 62
 [12] Bluman G W, Kumei S 1989 *Symmetries and Differential Equations* (New York: Springer-Verlag)
 [13] Hirota R 1971 *Phys. Rev. Lett.* **27** 1192
 [14] Weiss J, Tabor M, Carnevale G et al 1983 *J. Math. Phys.* **24** 522
 [15] Clarkson P A, Kruskal M D 1989 *J. Math. Phys.* **30** 2201
 [16] Cao C W 1990 *Sci. China A* **33** 528
 [17] Cheng Y, Li Y S 1991 *Phys. Lett. A* **175** 22
 [18] Lou S Y, Chen L L 1990 *J. Math. Phys.* **40** 6491
 [19] Tang X Y 2003 *Phys. Lett. A* **314** 286
 [20] Hirota R, Hu X B, Tang X Y 2003 *J. Math. Anal. Appl.* **288** 326

New foldons and their elastic interactions in the $(2 + 1)$ -dimensional modified Veselov-Novikov system^{*}

Shen Shou-Feng Zhang Jun

(Department of Mathematics , Zhejiang University of Technology , Hangzhou 310014 , China)

(Received 25 August 2005 ; revised manuscript received 25 November 2005)

Abstract

By using Mathematica and multi-linear variable separation (MLVS) approach which is based on the Bäcklund transformations , a new exact solution which include low dimensional arbitrary functions of the $(2 + 1)$ -dimensional modified Veselov-Novikov system is obtained. Two new foldons are constructed and their entirely elastic interactions are considered. In addition , foldon and ghoston interactions are derived. MLVS approach is also extended to solve a new $(1 + 1)$ -dimensional nonlinear system.

Keywords : modified Veselov-Novikov system , foldon , elastic interaction , variable separation

PACC : 0340

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10501040).