第 55 卷 第 4 期 2006 年 4 月
1000-3290/2006/55(04)/1561-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55, No.4, April, 2006

一类非线性方程激波解的 Sinc-Galerkin 方法*

吴钦宽†

(南京工程学院基础部,南京 210013)

(2005 年 9 月 1 日收到;2005 年 11 月 10 日收到修改稿)

研究了一类非线性奇摄动方程的激波问题.利用 Sinc-Galerkin 方法,构造出边值问题的激波解,并由 Newton 法得到其近似解.

关键词:非线性方程,激波,Sinc-Galerkin 方法,Newton 法

PACC:0340K,0290

1. 引 言

非线性问题的理论和方法在国际学术界的研究中是一个十分热门的话题[1].许多学者做了大量的工作[2—13],并解决了许多数学物理问题.

激波问题为当前国际学术界所关注的问题[14—16].关于激波问题的应用方面,冯士德等[17]在流体力学、卢先和等[18]在天体物理、何枫等[19]在射流和张树东等[20]在激光等领域做了一系列研究.近年来在非线性奇摄动方程激波问题的研究中,莫嘉琪、吴钦宽等[21—25]做了一系列工作.本文利用 Sinc-Galerkin 方法[26],考虑如下一类非线性奇摄动激波问题:

$$\varepsilon \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u^m = f(x). \tag{1}$$

方程(1)中的边值条件为 $u(0)=0$,$u(1)=0$.这里,ε 为正的小参数,m 为奇数,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 解析.

2. 边值问题的 Sinc-Galerkin 方法

设方程(1)的近似解形式为

$$u_1(x) = \sum_{j=-M}^{N} c_j S_j(x) \qquad (l = M + N + 1), \tag{2}$$

式中,$S_j(x)$ 是复合函数 $S(j,h)\circ\phi(x)$;M,N 为正整数.这里的 Sinc 函数[26]

$$S(j,h) = \mathrm{sinc}\left(\frac{x - jh}{h}\right)$$

$$\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

其中 h 为步长,它们的选取参见文献[26].

为了确定(2)式中的未知系数 $\{c_j\}_{-M}^{N}$,将方程(1)关于基本函数 $\{S_k\}_{k=-M}^{N}$ 进行正交化,即

$$\langle \varepsilon u'', S_k\rangle + \langle uu', S_k\rangle - \langle u^m, S_k\rangle = \langle f(x), S_k\rangle \qquad (k = -M,\cdots,N), \tag{3}$$

式中内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的含义是

$$\langle g(x), f(x)\rangle = \int_0^1 g(x) f(x) w(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

这里 $w(x)$ 是一个权重函数,它的选取依赖于所讨论问题的边界条件、区域和微分方程.对于二阶边值问题,我们取

$$w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}.$$

关于权重函数的详细讨论参见文献[27].

定理 1 关于(3)式,我们得到下列关系式:

$$\langle \varepsilon u'', S_k\rangle \approx h\sum_{j=-M}^{N}\sum_{i=0}^{2}\frac{u(x_j)}{\phi'(x_j)h^i}\delta_{kj}^{(i)} g_{2,i}(x_j), \tag{5}$$

$$\langle uu', S_k\rangle \approx -\frac{1}{2}h\sum_{j=-M}^{N}\left\{\frac{u^2(x_j)}{\phi'(x_j)} \times\left[\frac{1}{h}\delta_{kj}^{(1)}\phi' w + \delta_{kj}^{(0)} w'\right]\right\}, \tag{6}$$

$\delta_{kj}^{(i)}$,$g_{2,i}$($i=0,1,2$)的表达式将在下面给出.

证明 由(4)式得到

$$\langle \varepsilon u'', S_k\rangle = \int_0^1 \varepsilon u'' S_k(x) w(x)\,\mathrm{d}x$$

---

* 国家自然科学基金(批准号:10471039)资助的课题.

† E-mail:wuqk@njit.edu.cn

$$= B_x + \int_0^1 u(x)(\varepsilon S_k(x)w(x))''\mathrm{d}x, \tag{7}$$

式中

$$B_x = \left[\sum_{i=0}^{1}(-1)^i u^{(1-i)}(\varepsilon S_k w)(i)\right]_{x=0}^{1} = 0.$$

设$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\phi^n}[S_k(x)] = S_k^n(x)(0\leqslant n\leqslant 2)$，于是我们得到

$$\langle \varepsilon u'', S_k\rangle = \int_0^1\left(\sum_{i=0}^{2}u(x)S_k^{(i)}(x)g_{2,i}\right)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

类似地有

$$\begin{aligned}\langle uu', S_k\rangle &= \int_0^1 uu'S_k(x)w(x)\mathrm{d}x\\ &= H_x - \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x)(S_k(x)w(x))'\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{9}$$

式中

$$H_x = \left[\frac{1}{2}S_k wu^2\right]_0^1 = 0.$$

于是也得到

$$\begin{aligned}\langle uu', S_k\rangle = -\frac{1}{2}\int_0^1 u^2[S_k^{(1)}(x)\phi'(x)w(x)\\ + S_k(x)w'(x)]\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{10}$$

由文献[28]知

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x \approx h\sum_{j=-M}^{N}\frac{F(x_j)}{\phi'(x_j)},$$

从而我们可以分别得到(5)和(6)式.(5),(6)式中的$\delta_{kj}^{(i)}$，$g_{2,i}$可分别表示为[29]

$$\delta_{kj}^{(0)} = [S(j,h)\circ\phi(x)]|_{x=x_k} = \begin{cases}1 & (j=k),\\ 0 & (j\neq k),\end{cases} \tag{11}$$

$$\delta_{kj}^{(1)} = h\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}[S(j,h)\circ\phi(x)]|_{x=x_k} = \begin{cases}1 & (j=k),\\ \dfrac{(1)^{k-j}}{k-j} & (j\neq k),\end{cases} \tag{12}$$

$$\delta_{kj}^{(2)} = h^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}[S(j,h)\circ\phi(x)]|_{x=x_k} = \begin{cases}-\dfrac{\pi^2}{3} & (j=k),\\ \dfrac{-2(1)^{k-j}}{(k-j)^2} & (j\neq k);\end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}g_{2,2}(x) &= \varepsilon w(\phi')^2,\\ g_{2,1}(x) &= \varepsilon w(\phi)'' + 2\varepsilon w'\phi',\\ g_{2,0}(x) &= \varepsilon w''.\end{aligned} \tag{14}$$

用上述方法，我们同样可以得到

$$\begin{aligned}\langle u^m, S_k\rangle &\approx h\frac{u^m(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)},\\ \langle f(x), S_k\rangle &\approx h\frac{f(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)}.\end{aligned} \tag{15}$$

对于(15)式的详细推导，参见文献[29].

3. 非线性方程的激波解

我们把(5),(6)和(15)式分别代入(3)式，并用c_j代替$u(x_j)$，便得到定理2.

定理2 假设(2)式是方程(1)的近似解，那么对于Sinc-Galerkin系统的未知系数$\{c_j\}_{-M}^{N}$，由下列关系式确定：

$$\begin{aligned}&\sum_{j=-M}^{N}\sum_{i=0}^{2}\frac{1}{h^i}\delta_{kj}^{(i)}\frac{g_{2,i}(x_j)}{\phi'(x_j)}c_j\\ &-\frac{1}{2}\sum_{j=-M}^{N}\left[\frac{1}{h}\delta_{kj}^{(1)}w + \delta_{kj}^{(0)}\frac{w'}{\phi'(x_j)}\right]c_j^2\\ &-\frac{w(x_k)}{\phi'(x_k)}c_j^m\\ &= \frac{f(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)} \quad (k=-M,\cdots,N).\end{aligned} \tag{16}$$

为了求得未知系数$\{c_j\}_{-M}^{N}$，我们需要引入符号$\boldsymbol{D}(g)$，$\boldsymbol{I}^{(i)}$，$\boldsymbol{c}^p$和$\boldsymbol{i}$.设$\boldsymbol{D}(g)$为$l\times l$对角矩阵，

$$\boldsymbol{D}(g) = \begin{pmatrix} g(x_{-M}) & & & & & \\ & g(x_{-M+1}) & & & & \\ & & \cdots & & & \\ & & & g(x_0) & & \\ & & & & \cdots & \\ & & & & & g(x_N)\end{pmatrix}. \tag{17}$$

$\boldsymbol{I}^{(i)}$为$l\times l$阶矩阵，

$$\boldsymbol{I}^{(i)} = [\delta_{kj}^{(i)}] \quad (0\leqslant i\leqslant 2;j,k=-M,\cdots,N). \tag{18}$$

$\boldsymbol{c}^p$为l维向量，

$$\boldsymbol{c}^p = [c_j^p] \quad (p=1,2,m;j=-M,\cdots,N).$$

$\boldsymbol{i}$为每个元素都是1的m维向量.

引入上述符号后系统(16)可由下列矩阵形式表示：

$$\boldsymbol{Ac} + \boldsymbol{Bc}^2 + \boldsymbol{Ec}^m = \boldsymbol{\Theta}, \tag{19}$$

式中，

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=0}^{2}\frac{1}{h^i}\boldsymbol{I}^{(i)}\boldsymbol{D}\left(\frac{g_{2,i}}{\phi'}\right),$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{h}\boldsymbol{I}^{(1)}\boldsymbol{D}(w) - \boldsymbol{I}^{(0)}\boldsymbol{D}\left(\frac{w'}{\phi'}\right)\right],$$

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}\left(\frac{w}{\phi'}\right),$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{D}\left(\frac{wf}{\phi'}\right)\boldsymbol{i}.$$

从而由(19)式得到具有 l 个未知系数 $\{c_j\}_{-M}^{N}$ 的 $l = M + N + 1$ 个方程的非线性代数系统. 我们利用 Newton 法[30,31]即可由非线性代数系统(19)解得系数的近似解 $\boldsymbol{c} = (c_{-M},\cdots,c_N)^{\mathrm{T}}$. 于是我们得到 $u(x)$ 的 Sinc-Galerkin 近似解 $u_l(x)$.

4. 结　论

我们用 Sinc-Galerkin 方法把求解非线性奇摄动微分方程转化为解非线性代数方程,并且所得到的近似解 $u_l(x)$ 具有级数形式. 这在解决许多实际问题时具有一定的实用价值,如对厄尔尼诺-南方海涛耦合系统振子模型的求解问题等,这些将另文讨论.

[1] de Jager E M, Jiang F R 1996 *The Theory of Singular Perturbation* (Amsterdam: North-Holland)

[2] Lin F, Xu Y S 2003 *Chin. Phys.* **12** 1049

[3] Mo J Q, Lin W T 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 996 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996]

[4] Lai X J, Zhang J F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4065 (in Chinese) [来娴静、张解放 2004 物理学报 **53** 4065]

[5] Tang J S, Xie X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2828 (in Chinese) [唐驾时、谢　喜 2004 物理学报 **53** 2828]

[6] Liu G T, Fan T Y 2004 *Chin. Phys.* **13** 805

[7] Hu J L 2004 *Chin. Phys.* **13** 297

[8] Wu Q K 2004 *Acta Anal. Func. Appl.* **6** 76 (in Chinese) [吴钦宽 2004 应用泛函分析学报 **6** 76]

[9] Wu Q K, Mo J Q 2004 *J. Lanzhou Univ.* **40** 10 (in Chinese) [吴钦宽、莫嘉琪 2004 兰州大学学报 **40** 10]

[10] Wu Q K, Lin P J, Sun F S *et al* 2005 *Prog. Nat. Sci.* **15** 375 (in Chinese) [吴钦宽、林平健、孙福树等 2005 自然科学进展 **15** 375]

[11] Han Z X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1481 (in Chinese) [韩兆秀 2005 物理学报 **54** 1481]

[12] Liu C S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2505 (in Chinese) [刘成仕 2005 物理学报 **54** 2505]

[13] Zheng Q, Yue P, Gong L X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2996 (in Chinese) [郑　强、岳　萍、龚伦训 2005 物理学报 **54** 2996]

[14] Lu Y Q, Wang W X, He D R 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1079 (in Chinese) [陆云清、王文秀、何大韧 2003 物理学报 **52** 1079]

[15] Hong L, Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]

[16] Ma M Q, Wang W X, He D R 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1679 (in Chinese) [马明全、王文秀、何大韧 2000 物理学报 **49** 1679]

[17] Feng S D, Michihisa T H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1006 (in Chinese) [冯士德、鸟原道久 2001 物理学报 **50** 1006]

[18] Lu X H, Song L T, Wei F S 1997 *Chin. J. Space Sci.* **17** 1079 (in Chinese) [卢先和、宋礼庭、魏奉思 1997 空间科学学报 **17** 1079]

[19] He F, Yang J L, Shen M Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1918 (in Chinese) [何　枫、杨京龙、沈孟育 2002 物理学报 **51** 1918]

[20] Zhang S D, Zhang W J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1512 (in Chinese) [张树东、张为俊 2001 物理学报 **50** 1512]

[21] Mo J Q, Wang H 2002 *Appl. Math. J. Chin. Univ.* A **17** 281 (in Chinese) [莫嘉琪、王　辉 2002 高校应用数学学报 A **17** 281]

[22] Mo J Q 2004 *Math. Appl.* **17** 301 (in Chinese) [莫嘉琪 2004 应用数学 **17** 301]

[23] Mo J Q 2003 *Acta Math. Phys.* A **23** 530 (in Chinese) [莫嘉琪 2003 数学物理学报 A **23** 530]

[24] Wu Q K 2004 *J. Eng. Math.* **21** 653 (in Chinese) [吴钦宽 2004 工程数学学报 **21** 653]

[25] Wu Q K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2510 (in Chinese) [吴钦宽 2005 物理学报 **54** 2510]

[26] El-Gamel M, Cannon J R 2005 *Z. Angew. Math. Phys.* **56** 45

[27] Slenger F 1993 *Numerical Methods Based on Analytic Functions* (New York: Springer)

[28] El-Gamel M, Behiry S, Hashish H 2003 *Appl. Math. Copm.* **145** 717

[29] Ralph C, Bowers K 1991 *SIMA J. Numer. Anal.* **28** 76

[30] Burden R L, Faires J D 1993 *Numerical Analysis* (Boston: Pws-Kent)

[31] Herniter M E 2001 *Programming in MATLAB* (London: Thomson Learning)

The shock solution for a class of the nonlinear equations by the Sinc-Galerkin method *

Wu Qin-Kuan†

(*Department of Basic Courses*, *Nanjing Institute of Technology*, *Nanjing* 210013, *China*)

(Received 1 September 2005; revised manuscript received 10 November 2005)

Abstract

The shock problems for a class of the nonlinear singularly perturbed equations is studied. Using Sinc-Galerkin method, the shock solutions of boundary value problem are constructed, the approximate solution by Newton 's method is obtained.

Keywords: nonlinear equation, shock, Sinc-Galerkin method, Newton 's method

PACC: 0340K, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10471039).

† E-mail: wuqk@njit.edu.cn