第 55 卷 第 4 期 2006 年 4 月
1000-3290/2006/55(04)/1565-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.55,No.4,April,2006

非线性演化方程椭圆函数解的一种简单求法及其应用*

李德生[1)2)†] 张鸿庆[2)]

1)(燕山大学数学系,秦皇岛 066004)

2)(大连理工大学应用数学系,大连 116024)

(2005 年 7 月 26 日收到;2005 年 11 月 9 日收到修改稿)

非线性演化方程的许多行波解可以写成满足投影 Riccati 方程的两个基本函数的多项式形式.利用这一性质,通过建立一般的椭圆方程与投影 Riccati 方程解之间的关系,导出了一个构造这些解的新方法.该方法对类型Ⅰ的方程和类型Ⅱ的方程均有效,同时也回答了如何求出非线性演化方程分式形式椭圆函数解的问题.

关键词:非线性演化方程,椭圆函数解

PACC:0340K,0290,1190

1. 引 言

最近,刘式适等[1—5]提出了 Jacobi 椭圆函数展开法,求得了一大类非线性波动方程的周期解,包括对应的冲击波解和孤立波解,并指出此方法适用于只含有偶数阶导数项或只含有奇数阶导数项的非线性演化方程[4].文献[6]提出了'秩'的概念,而文献[7]将 Jacobi 椭圆函数展开法应用的方程类型进行推广,指出只要方程是'秩'同类的,即属于类型Ⅰ,就可用 Jacobi 椭圆函数展开法进行求解.对于"秩"异类的方程,一般不具有 Jacobi 椭圆正弦函数展开形式的解,但有可能具有双曲正切函数展开形式的解.这样,对奇数阶导数项和偶数阶导数项同时存在的方程,只要它们各项的'秩'是同类的,也可能具有 Jacobi 椭圆函数展开形式的解.

文献[6]中提出了方程'秩'的概念.设非线性演化方程的一般形式

$$F(u,u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx},\cdots)=0, \tag{1}$$

式中 F 是关于变元 $u,u_t,u_x,u_{tt},u_{tx},u_{xx},\cdots$ 的多项式.在行波变换

$$u(x,t)=u(\xi), \tag{2}$$

$$\xi=k(x-\lambda t) \tag{3}$$

下,(1)式约化为如下的常微分方程:

$$O(u,u',u'',u''',\cdots)=0, \tag{4}$$

其中"′"为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$.(4)式中的任何一项可用通式表示(不考虑其系数)为

$$u^{k0}(u')^{k_1}(u'')^{k_2}\cdots(u^{(m)})^{k_m},$$

其中 k_j 是非负整数,于是可定义该项的'秩'为

$$0k_0+1k_1+2k_2+\cdots+mk_m. \tag{5}$$

实际上就是该项中 u 的各阶导数与其相应幂次乘积之和(可以认为 u 为自身的零阶导数).有了"秩"的概念,我们就可以把所研究的非线性方程分为两种类型:(1)类型Ⅰ,简称'秩'同类,即各项的"秩"的取值要么全为偶数要么全为奇数;(2)类型Ⅱ,简称'秩'异类,即各项的'秩'的取值为奇数与偶数混合.显然,只含有奇数阶导数项或只含有偶数阶导数项的非线性方程是属于类型Ⅰ的.

本文进一步考虑非线性演化方程 Jacobi 椭圆函数解的求解问题,受文献[8]中结果的启发,我们发现对于所有多项式形式和可化为多项式形式的非线性演化方程,本文所提出的这类 Jacobi 椭圆函数解都是可能存在的,不必区分他们是否为类型Ⅰ的方程还是类型Ⅱ的方程.同时我们还回答了文献[9]中

---

* 国家重点基础研究发展规划(批准号:2004CB318000)资助的课题.

† E-mail:deshengli_868@yahoo.com.cn

提出的如何获得分数形式 Jacobi 椭圆函数解的问题.

2. 新 Jacobi 椭圆函数解的求解方法

所谓新 Jacobi 椭圆函数解的求解方法不过是投影 Riccati 方程求解法[10—14]的一个修改.投影 Riccati 方程为

$$F'(\xi) = pF(\xi)G(\xi), \tag{6}$$

$$G'(\xi) = q + pG^2(\xi) - rF(\xi), \tag{7}$$

式中 p,q,r 为任意常数.

我们知道,一般的 Jacobi 椭圆函数方程[15]为

$$\phi'^2(\xi) = h_0 + h_2\phi^2(\xi) + h_4\phi^4(\xi). \tag{8}$$

不难验证,对任意的非零常数 l,当

$$h_0 = -\frac{pq^3}{16r^2l^2},$$

$$h_2 = \frac{pq}{2},$$

$$h_4 = -\frac{pr^2l^2}{q}$$

时,方程(6),(7)具有如下的 Jacobi 椭圆函数解:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{q}{2r} + l\phi(\xi), \\ G(\xi) &= \frac{l\phi'(\xi)}{\frac{pq}{2r} + pl\phi(\xi)}, \end{aligned} \tag{9}$$

式中 F,G 满足关系

$$G^2(\xi) = -\frac{q}{p} + \frac{2r}{p}F(\xi) - \frac{r^2}{pq}F^2(\xi). \tag{10}$$

当

$$h_0 = \frac{pq^2}{8rl},$$

$$h_2 = \frac{pq}{2},$$

$$h_4 = \frac{prl}{2}$$

时,方程(6),(7)具有如下的 Jacobi 椭圆函数解:

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \frac{q}{2r} + l\phi^2(\xi), \\ G(\xi) &= \frac{2l\phi(\xi)\phi'(\xi)}{\frac{pq}{2r} + pl\phi^2(\xi)}, \end{aligned} \tag{11}$$

式中 F,G 满足关系

$$G^2(\xi) = -\frac{q}{p} + \frac{2r}{p}F(\xi). \tag{12}$$

从文献[15]中可知,对于常数 h_0,h_2,h_4 的不同选择,我们可以得到文献[15]中所列出的所有 Jacobi 椭圆函数解.再由常数 p,q,r,l 的任意性可知,投影 Riccati 方程(6),(7)具有上述 Jacobi 椭圆函数所给出的由(9)和(11)式确定的解.细心的读者不难看到,其实投影 Riccati 方程(6),(7)具有的解还远不止这些.为了行文上的方便,文中只给出由方程(6)—(10)或方程(6)—(8)及(11),(12)所确定的非线性演化方程的 Jacobi 椭圆函数解,而不去讨论具体常数 h_0,h_2,h_4 的不同选择下的结果.

下面我们以典型的 mKdV 方程和 mKdV-Burgers 方程为例说明方法的有效性.

3. mKdV 方程和 mKdV-Burgers 方程的新 Jacobi 椭圆函数解

3.1. mKdV 方程

mKdV 方程

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0, \tag{13}$$

文献[5]讨论了该方程 4 种 Jacobi 椭圆函数解,下面利用我们提出的方法求解此方程.首先利用变换(2)式并积分一次,(13)式变为

$$k^2\beta u'' + \frac{\alpha u^3}{3} - \lambda u - c = 0, \tag{14}$$

式中 c 为积分常数.

设

$$u(\xi) = a_0 + a_1F(\xi) + b_1G(\xi). \tag{15}$$

将(15)式代入到(14)式并利用(6),(7),(12)式得

$$\begin{aligned} & k^2\beta u'' + \frac{\alpha u^3}{3} - \lambda u - c \\ &= \frac{\alpha a_1^3F^3}{3} + \left(b_1\alpha a_1^2G + \frac{3k^2\beta a_1p^2r + 2\alpha b_1^2a_1r + \alpha pa_0a_1^2}{p}\right)F^2 \\ &+ \left(\frac{(6b_1p\alpha a_0a_1 + 2\alpha b_1^3r + 3b_1p^2k^2\beta r)G}{3p}\right. \\ &\left. + \frac{2\alpha b_1^2a_0r - k^2\beta a_1p^2q + \alpha pa_0^2a_1 - \alpha b_1^2a_1q - \lambda pa_1}{p}\right)F \\ &+ \frac{(-3b_1p\lambda - \alpha b_1^3q + 3b_1p\alpha a_0^2)G}{3p} \\ &+ \frac{\alpha pa_0^3 - 3\lambda pa_0 - 3\alpha b_1^2a_0q - 3cp}{3p} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

由此可得一代数方程组,

$$\alpha a_1^3 = 0,$$

$$b_1\alpha a_1^2 = 0,$$

$$3k^2\beta a_1p^2r + 2\alpha b_1^2a_1r + \alpha pa_0a_1^2 = 0,$$

$$6b_1p\alpha a_0a_1 + 2\alpha b_1^3r + 3b_1p^2k^2\beta r = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&2\alpha b_1^2 a_0 r - k^2\beta a_1 p^2 q + \alpha p a_0^2 a_1 \\
&- \alpha b_1^2 a_1 q - \lambda p a_1 = 0, \\
&- 3 b_1 p\lambda - \alpha b_1^3 q + 3 b_1 p\alpha a_0^2 = 0, \\
&\alpha p a_0^3 - 3\lambda p a_0 - 3\alpha b_1^2 a_0 q - 3cp = 0.
\end{aligned} \tag{17}
$$

求解此代数方程组可得下列一组解：

$$
\begin{aligned}
c &= 0, \\
a_0 &= 0, \\
a_1 &= 0, \\
b_1 &= \pm pk\sqrt{-\frac{3\beta}{2\alpha}}, \\
\lambda &= \frac{k^2\beta pq}{2},
\end{aligned} \tag{18}
$$

式中 k 为任意常数.再由(11)式得到 mKdV 方程一个如下形式的解：

$$
u_1(x,t) = \pm 2lk\sqrt{-\frac{3\beta}{2\alpha}}\,\frac{\phi\left(k\left(x-\frac{k^2\beta pq}{2}t\right)\right)\phi'\left(k\left(x-\frac{k^2\beta pq}{2}t\right)\right)}{\frac{q}{2r}+l\phi^2\left(k\left(x-\frac{k^2\beta pq}{2}t\right)\right)}. \tag{19}
$$

将(15)式代入到(14)式并利用(6),(7),(10)式得

$$
\begin{aligned}
&k^2\beta u'' + \frac{\alpha u^3}{3} - \lambda u - c \\
&= -\frac{(6k^2\beta a_1 p^2 r^2 + 3\alpha b_1^2 a_1 r^2 - \alpha pq a_1^3)F^3}{3pq} - \left(\frac{(-3b_1 p\alpha q a_1^2 + \alpha b_1^3 r^2 + 6 b_1 p^2 k^2\beta r^2)G}{3pq}\right. \\
&\quad \left. + \frac{-\alpha pq a_0 a_1^2 - 2\alpha b_1^2 a_1 rq - 3k^2\beta a_1 p^2 rq + \alpha b_1^2 a_0 r^2}{pq}\right)F^2 \\
&\quad - \left(\frac{(-3b_1 p^2 k^2\beta rq - 6 b_1 p\alpha q a_0 a_1 - 2\alpha b_1^3 rq)G}{3pq}\right. \\
&\quad \left. + \frac{-2\alpha b_1^2 a_0 rq - \alpha pq a_0^2 a_1 + \lambda pq a_1 + \alpha b_1^2 a_1 q^2 + k^2\beta a_1 p^2 q^2}{pq}\right)F \\
&\quad - \frac{(\alpha b_1^3 q^2 - 3 b_1 p\alpha q a_0^2 + 3 b_1 p\lambda q)G}{3pq} - \frac{3\alpha b_1^2 a_0 q^2 - \alpha pq a_0^3 + 3\lambda pq a_0 + 3cpq}{3pq} = 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

由此可得一代数方程组，

$$
\begin{aligned}
&6k^2\beta a_1 p^2 r^2 + 3\alpha b_1^2 a_1 r^2 - \alpha pq a_1^3 = 0, \\
&-3 b_1 p\alpha q a_1^2 + \alpha b_1^3 r^2 + 6 b_1 p^2 k^2\beta r^2 = 0, \\
&-\alpha pq a_0 a_1^2 - 2\alpha b_1^2 a_1 rq - 3k^2\beta a_1 p^2 rq \\
&+ \alpha b_1^2 a_0 r^2 = 0, \\
&-3 b_1 p^2 k^2\beta rq - 6 b_1 p\alpha q a_0 a_1 - 2\alpha b_1^3 rq = 0, \\
&-2\alpha b_1^2 a_0 rq - \alpha pq a_0^2 a_1 + \lambda pq a_1 \\
&+ \alpha b_1^2 a_1 q^2 + k^2\beta a_1 p^2 q^2 = 0, \\
&\alpha b_1^3 q^2 - 3 b_1 p\alpha q a_0^2 + 3 b_1 p\lambda q = 0, \\
&3\alpha b_1^2 a_0 q^2 - \alpha pq a_0^3 + 3\lambda pq a_0 + 3cpq = 0.
\end{aligned} \tag{21}
$$

求解此代数方程组可得如下两组解：

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \mp\frac{3k\beta p}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha q}{6\beta q}}, \\
a_1 &= \mp rk\sqrt{\frac{6\beta p}{\alpha q}}, \\
b_1 &= 0, \\
\lambda &= \frac{k^2\beta pq}{2}, \\
c &= 0;
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0, \\
a_1 &= \pm rk\sqrt{\frac{3\beta p}{2\alpha q}}, \\
b_1 &= \pm kp\sqrt{-\frac{3\beta}{2\alpha}}, \\
\lambda &= \frac{k^2\beta pq}{2}, \\
c &= 0.
\end{aligned} \tag{23}
$$

这里 k 为任意常数.再由(9)式得到 mKdV 方程如下形式的解：

$$
\begin{aligned}
u_2(x,t) &= \mp\frac{3k\beta p}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha q}{6\beta p}} \pm rk\sqrt{\frac{6\beta p}{\alpha q}} \\
&\quad \times\left(\frac{q}{2r}+l\phi\left(k\left(x-\frac{k^2\beta pq}{2}t\right)\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$= \pm\, lrk\sqrt{\frac{6\beta p}{\alpha q}}\left(\phi\left(k\left(x - \frac{k^2\beta pq}{2}t\right)\right)\right), \quad (24)$$

$$u_3(x,t) = \pm\, rk\sqrt{\frac{3\beta p}{2\alpha q}}\left(\frac{q}{2r} + l\phi\left(k\left(x - \frac{k^2\beta pq}{2}t\right)\right)\right)$$
$$\pm\, kp\sqrt{\frac{-3\beta}{2\alpha}}\,\frac{l\phi'\left(k\left(x - \frac{k^2\beta pq}{2}t\right)\right)}{\frac{pq}{2r} + pl\phi\left(k\left(x - \frac{k^2\beta pq}{2}t\right)\right)}. \quad (25)$$

显然,这里得到的解(24)式对于特别选取的常数 p, q, r, k, l 恰好对应着文献[5]中所得到的 4 种解,而其他的解则是该方程的新解,特别是解(25)式,这种形式的 Jacobi 椭圆函数解作者尚未见过报道.

3.2. mKdV-Burgers 方程

注意到 mKdV 方程是类型Ⅰ的,下面考虑一个类型Ⅱ的方程:mKdV-Burgers 方程[6]

$$u_t + u^2 u_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0. \quad (26)$$

同样,利用变换(2)式并积分一次,(26)式变为

$$k^2\beta u'' + \alpha k u' + \frac{u^3}{3} - \lambda u - c = 0, \quad (27)$$

式中 c 为积分常数.

设

$$u(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + b_1 G(\xi). \quad (28)$$

将(28)式代入(27)式并利用(6),(7),(12)式得

$$\begin{aligned} & k^2\beta u'' + \alpha k u' + \frac{u^3}{3} - \lambda u - c \\ = & \frac{a_1^3 F^3}{3} + \left(b_1 a_1^2 G + \frac{2b_1^2 a_1 r + 3k^2\beta a_1 p^2 r + p a_0 a_1^2}{p}\right)F^2 \\ & + \left(\frac{(2b_1^3 r + 3p^2k^2\beta b_1 r + 3p^2 k\alpha a_1 + 6p b_1 a_0 a_1)G}{p}\right. \\ & \left. + \frac{-b_1^2 a_1 q + k\alpha b_1 rp - k^2\beta a_1 p^2 q + 2b_1^2 a_0 r - \lambda p a_1 + p a_0^2 a_1}{p}\right)F \\ & + \frac{(-3p\lambda b_1 - b_1^3 q + 3p b_1 a_0^2)G}{3p} + \frac{-3cp + pa_0^3 - 3b_1^2 a_0 q - 3\lambda p a_0}{3p} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

由此可得一代数方程组,

$$\begin{aligned} & a_1^3 = 0, \\ & b_1 a_1^2 = 0, \\ & 2b_1^2 a_1 r + 3k^2\beta a_1 p^2 r + p a_0 a_1^2 = 0, \\ & 2b_1^3 r + 3p^2k^2\beta b_1 r + 3p^2 k\alpha a_1 \\ & + 6p b_1 a_0 a_1 = 0, \\ & -b_1^2 a_1 q + k\alpha b_1 rp - k^2\beta a_1 p^2 q \\ & + 2b_1^2 a_0 r - \lambda p a_1 + p a_0^2 a_1 = 0, \\ & -3p\lambda b_1 - b_1^3 q + 3p b_1 a_0^2 = 0, \\ & -3cp + pa_0^3 - 3b_1^2 a_0 q \\ & -3\lambda p a_0 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

求解此代数方程组可得下列一组解:

$$\begin{aligned} a_0 &= \mp\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\frac{2}{3\beta}}, \\ a_1 &= 0, \\ b_1 &= \pm kp\sqrt{-\frac{3\beta}{2}}, \\ \lambda &= \frac{3\beta^2 qpk^2 - \alpha^2}{6\beta}, \\ c &= \mp\frac{\alpha(\alpha^2 + 9\beta^2 qpk^2)}{18\beta}\sqrt{-\frac{2}{3\beta}}, \end{aligned} \quad (31)$$

式中 k 为任意常数.于是在积分常数

$$c = \mp\frac{\alpha(\alpha^2 + 9\beta^2 qpk^2)}{18\beta}\sqrt{-\frac{2}{3\beta}}$$

时,由(11)式得到 mKdV-Burgers 方程一个如下形式的解:

$$u_1(x,t) = \mp\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\frac{2}{3\beta}} \pm 2lk\sqrt{-\frac{3\beta}{2}}\,\frac{\phi\left(k\left(x - \frac{3\beta^2 qpk^2 - \alpha^2}{6\beta}t\right)\right)\phi'\left(k\left(x - \frac{3\beta^2 qpk^2 - \alpha^2}{6\beta}t\right)\right)}{\frac{q}{2r} + l\phi^2\left(k\left(x - \frac{3\beta^2 qpk^2 - \alpha^2}{6\beta}t\right)\right)}. \quad (32)$$

将(28)式代入到(27)式并利用(6),(7),(10)式得

$$k^2\beta u'' + \alpha k u' + \frac{u^3}{3} - \lambda u - c$$
$$= -\frac{(3b_1^2 a_1 r^2 + 6k^2\beta p^2 a_1 r^2 - pqa_1^3)F^3}{3pq} - \Bigg(\frac{(b_1^3 r^2 + 6p^2k^2\beta b_1 r^2 - 3pb_1 qa_1^2)G}{3pq}$$
$$+ \frac{-3k^2\beta p^2 a_1 rq - pqa_0 a_1^2 + b_1^2 a_0 r^2 + k\alpha b_1 r^2 p - 2b_1^2 a_1 rq}{pq}\Bigg)F^2$$
$$-\Bigg(\frac{(-2b_1^3 r - 3p^2k^2\beta b_1 r - 6pb_1 a_0 a_1 - 3p^2 k\alpha a_1)G}{3p}$$
$$+ \frac{b_1^2 a_1 q - pa_0^2 a_1 - k\alpha b_1 rp + k^2\beta p^2 a_1 q + \lambda p a_1 - 2b_1^2 a_0 r}{p}\Bigg)F$$
$$- \frac{(b_1^3 q^2 + 3p\lambda b_1 q - 3pb_1 qa_0^2)G}{3pq} - \frac{-pqa_0^3 + 3\lambda pqa_0 + 3b_1^2 a_0 q^2 + 3cpq}{3pq} = 0. \tag{33}$$

由此可得一代数方程组，

$$\begin{aligned}
&3b_1^2 a_1 r^2 + 6k^2\beta p^2 a_1 r^2 - pqa_1^3 = 0,\\
&b_1^3 r^2 + 6p^2k^2\beta b_1 r^2 - 3pb_1 qa_1^2 = 0,\\
&-3k^2\beta p^2 a_1 rq - pqa_0 a_1^2 + b_1^2 a_0 r^2\\
&+ k\alpha b_1 r^2 p - 2b_1^2 a_1 rq = 0,\\
&-2b_1^3 r - 3p^2k^2\beta b_1 r - 6pb_1 a_0 a_1\\
&-3p^2 k\alpha a_1 = 0,\\
&b_1^2 a_1 q - pa_0^2 a_1 - k\alpha b_1 rp + k^2\beta p^2 a_1 q\\
&+ \lambda p a_1 - 2b_1^2 a_0 r = 0,\\
&b_1^3 q^2 + 3p\lambda b_1 q - 3pb_1 qa_0^2 = 0,\\
&-pqa_0^3 + 3\lambda pqa_0 + 3b_1^2 a_0 q^2 + 3cpq = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

求解此代数方程组可得一组解，

$$\begin{aligned}
a_0 &= \mp\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\frac{2}{3\beta}},\\
a_1 &= \pm rk\sqrt{\frac{3p\beta}{2q}},\\
b_1 &= \pm kp\sqrt{-\frac{3\beta}{2}},\\
\lambda &= \frac{3\beta^2 qpk^2 - \alpha^2}{6\beta},\\
c &= \mp\frac{\alpha(\alpha^2 + 9\beta^2 qpk^2)}{18\beta}\sqrt{-\frac{2}{3\beta}},
\end{aligned} \tag{35}$$

式中 k 为任意常数．于是在积分常数

$$c = \mp\frac{\alpha(\alpha^2 + 9\beta^2 qpk^2)}{18\beta}\sqrt{-\frac{2}{3\beta}}$$

时，由(9)式还可得到 mKdV-Burgers 方程的另一个形式的解，

$$u_2(x,t) = \mp\frac{\alpha}{2}\sqrt{-\frac{2}{3\beta}} \pm rk\sqrt{\frac{3p\beta}{2q}}$$
$$\times\left(\frac{q}{2r} + l\phi\left(k\left(x - \frac{3\beta^2 qpk^2 - \alpha^2}{6\beta}t\right)\right)\right)$$
$$\pm k\sqrt{-\frac{3\beta}{2}}\,\frac{l\phi'\left(k\left(x - \frac{3\beta^2 qpk^2 - \alpha^2}{6\beta}t\right)\right)}{\frac{q}{2r} + l\phi\left(k\left(x - \frac{3\beta^2 qpk^2 - \alpha^2}{6\beta}t\right)\right)}. \tag{36}$$

4. 结　　论

通过研究一般的 Jacobi 椭圆函数方程 $\phi'^2(\xi) = h_0 + h_2\phi^2(\xi) + h_4\phi^4(\xi)$ 与投影 Riccati 方程 $F'(\xi) = pF(\xi)G(\xi)$，$G'(\xi) = q + pG^2(\xi) - rF(\xi)$ 之间解的关系，提出了一个既可以给出类型 Ⅰ 方程 Jacobi 椭圆函数解又可以给出类型 Ⅱ 方程 Jacobi 椭圆函数解的方法．并以 mKdV 方程和 mKdV-Burgers 方程为例说明该方法的有效性，同时，不难看到该方法还是很高效的．这是因为：对于一个给定的方程，只需一次计算过程即可给出由(9)或(11)式所确定的 Jacobi 椭圆函数解，至于解中的函数 ϕ 取哪个 Jacobi 椭圆函数则完全由常数 h_0，h_2，h_4 的不同选择所确定，而这些常数又由任意常数 p，q，r，l 所确定．因此，本文提供的方法避免了许多重复的计算过程，而将不同的 Jacobi 椭圆函数所确定的 Jacobi 椭圆函数解转化为一些简单常数的取值问题．此外该方法还有两个优点：一个是它可以构造出分式形式的椭圆函数解，从而回答了文献[9]中提出的问题．二是这些解在退化情形下可以给出新的孤波解，这也是一个很有意义的问题．

[1] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘适达等 2001 物理学报 **50** 2068]

[2] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘适达等 2002 物理学报 **51** 10]

[3] Liu S D, Fu Z T, Liu S K *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘适达、付遵涛、刘式适等 2002 物理学报 **51** 718]

[4] Liu S K, Fu Z T, Liu S D *et al* 2001 *Phys. Lett.* A **289** 69

[5] Fu Z T, Liu S K, Liu S D *et al* 2001 *Phys. Lett.* A **290** 72

[6] Feng X 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 207

[7] Zhang S Q, Li Z B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1066 (in Chinese) [张善卿、李志斌 2003 物理学报 **52** 1066]

[8] Li D S, Zhang H Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5540 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2005 物理学报 **54** 5540]

[9] Shen S F, Pan Z L, Zhang J *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2056 (in Chinese) [沈守枫、潘祖梁、张 隽等 2004 物理学报 **53** 2056]

[10] Conte R, Musett M 1992 *J. Phys. A* **33** 5609

[11] Bountis T, Papageorgiou V, Winternitz P 1986 *J. Math. Phys.* **27** 1215

[12] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2002 *Sci. China* A **30** 1103

[13] Yan Z Y 2003 *Chaos Solitons Fract.* **16** 759

[14] Fu Z T, Liu S D, Liu S K 2004 *Chaos Solitons Fract.* **20** 301

[15] Liu S K, Liu S D 2000 *Nonlinear Equations in Physics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [刘式适、刘适达 2000 物理学中的非线性方程 (北京 北京大学出版社)]

A simple method for constructing elliptic function solutions to the nonlinear evolution equations and its applications*

Li De-Sheng[1)2)†] Zhang Hong-Qing[2)]

1) (*Department of Mathematics, Yanshan University, Qinghuangdao* 066004, *China*)

2) (*Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian* 116024, *China*)

(Received 26 July 2005; revised manuscript received 9 November 2005)

Abstract

Many travelling wave solutions of nonlinear evolution differential equations can be written as a polynomial of two elementary functions which satisfy a projective Riccati equation. From that property, we deduce a method for building these solutions by establishing the relation between the solutions of the general elliptic equation and the projective Riccati equation. The method is effective for both type Ⅰ and type Ⅱ equtions. At the same time, we also answer the question of how to construct the elliptic function solutions in fraction form to the nonlinear evolution equations.

Keywords: nonlinear evolution equations, elliptic function solutions

PACC: 0340K, 0290, 1190

* Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2004CB318000).

† E-mail: deshengli_868@yahoo.com.cn