

# Tavis-Cummings 模型中两纠缠原子 纠缠的演化特性\*

单传家 夏云杰

(曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)  
(2005 年 8 月 22 日收到, 2005 年 11 月 7 日收到修改稿)

研究了两个纠缠的两能级原子与单模粒子数场进行相互作用系统中两原子的纠缠演化. 结果表明: 两个原子之间的纠缠呈现出周期性的演化特性. 初始两原子的状态、原子之间的偶极相互作用和粒子数场对腔中两个原子的纠缠有着显著的影响. 发现适当选择原子的初态, 两原子会永远处于最大纠缠态.

关键词: 量子纠缠, 偶极-偶极相互作用, 部分转置矩阵负本征值, 纠缠原子

PACC: 0365, 4250

## 1. 引 言

量子纠缠是量子力学最显著的特征之一, 是量子信息领域一个非常重要的问题. 它在量子信息处理<sup>[1-4]</sup>的量子隐形传态、量子编码及量子纠错、量子密钥分配和量子计算中具有重要应用. 量子纠缠态度量也是人们研究的课题之一, 最近几年提出了一些描述纠缠态纠缠的物理量, 如 Von Neumann 熵、纠缠相对熵<sup>[5]</sup>、密度算符之间的距离<sup>[6]</sup>、共生纠缠度<sup>[7]</sup>、部分转置矩阵负本征值<sup>[8]</sup>等. 近年来人们利用量子腔电动力学方法<sup>[9, 10]</sup>提出了多种两粒子和多粒子纠缠的制备方案, 而原子与场之间的纠缠早期只是考虑系统处于纯态的情况, 但是系统难免与外界环境发生相互作用, 因此研究混合态纠缠具有更重要的意义. Bose 等<sup>[11]</sup>研究了一个初始处于纯态的两能级原子与热光场作用的 Jaynes-Cummings (J-C) 模型, 发现原子与场可以产生纠缠. 这种方法也被用来研究存在损耗的 J-C 模型的原子与场的纠缠<sup>[12]</sup>和两全同原子 Tavis-Cummings (T-C) 模型的纠缠<sup>[13]</sup>. 最近 蔡金芳等<sup>[14]</sup>研究了在 J-C 模型中处于混态的原子与压缩场之间的纠缠, 向少华等<sup>[15]</sup>研究了推广的 J-C 模型中原子纠缠的时间演化和热纠缠态,

Boukobza 等<sup>[16]</sup>研究了 J-C 模型中的纠缠与熵的变化, 宋军等<sup>[17]</sup>研究了两个纠缠原子与二项式光场相互作用的动力学. 对于 T-C 模型中两原子之间的纠缠演化研究不多, 文献<sup>[13]</sup>只是考虑了两个原子初始处于分离态, 并且忽略了两原子之间的偶极-偶极相互作用.

在本文中, 我们考虑两个原子初始处于纠缠态, 并且存在原子之间的偶极相互作用的情况, 研究了腔中两原子的纠缠演化. 利用数值计算得出腔中两个原子的纠缠与初始两原子的状态、原子之间的偶极相互作用和粒子数场有关. 还发现适当选择原子的初态, 两原子会永远处于最大纠缠态.

## 2. 理论模型及其波函数

考虑两个两能级原子与单模光场相互作用, 假设原子间距离小于腔场波长, 使得原子间的偶极-偶极相互作用不可忽略. 在这种情况下系统的哈密顿量可写为

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \omega_i \sigma_i^z + \sum_{i=1}^2 g_i (a^\dagger \sigma_i^- + a \sigma_i^+) + \Omega \sum_{i=j=1}^2 \sigma_i^- \sigma_j^+, \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 10534030)资助的课题.

式中  $\omega_1, \omega_2$  为两原子的本征跃迁频率,  $\omega$  为腔场频率,  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  分别为原子的激发态和基态.

$$\begin{aligned}\sigma_1^z &= |e_A\rangle\langle e_A| - |g_A\rangle\langle g_A|, \\ \sigma_1^- &= |g_A\rangle\langle e_A|, \\ \sigma_1^+ &= |e_A\rangle\langle g_A|\end{aligned}\quad (2)$$

分别为原子  $A$  的赝自旋算符.

$$\begin{aligned}\sigma_2^z &= |e_B\rangle\langle e_B| - |g_B\rangle\langle g_B|, \\ \sigma_2^- &= |g_B\rangle\langle e_B|, \\ \sigma_2^+ &= |e_B\rangle\langle g_B|\end{aligned}\quad (3)$$

分别为原子  $B$  的赝自旋算符. 这里,  $a$  和  $a^+$  分别为光子的湮没和产生算符,  $g$  为原子与光场间的耦合常量,  $\Omega$  为原子间偶极-偶极相互作用强度.

考虑  $\omega = \omega_1 = \omega_2, g_1 = g_2$  的情况, 初始两原子处于纠缠态, 光场处于粒子数态, 系统的状态为

$$\Psi(0) = (\cos\theta |e_A\rangle |g_B\rangle + \sin\theta |g_A\rangle |e_B\rangle) \otimes |n\rangle. \quad (4)$$

在相互作用绘景中, 系统在  $t > 0$  时刻的态矢可表示为

$$\begin{aligned}\psi(t) &= C_1 |e_A\rangle |e_B\rangle |n-1\rangle + C_2 |e_A\rangle |g_B\rangle |n\rangle \\ &+ C_3 |g_A\rangle |e_B\rangle |n\rangle + C_4 |g_A\rangle |g_B\rangle |n+1\rangle.\end{aligned}\quad (5)$$

将(5)式代入相互作用绘景中的薛定谔方程

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H_I \psi(t). \quad (6)$$

利用初始条件, 可以得到

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)g\sqrt{n}(e^{iat} - e^{ibt})}{\Delta}, \\ C_2 &= \frac{-a(\cos\theta + \sin\theta)e^{iat} + b(\cos\theta + \sin\theta)e^{ibt}}{2\Delta} \\ &+ \frac{\cos\theta - \sin\theta}{2} e^{i\Omega t}, \\ C_3 &= \frac{-a(\cos\theta + \sin\theta)e^{iat} + b(\cos\theta + \sin\theta)e^{ibt}}{2\Delta} \\ &+ \frac{\sin\theta - \cos\theta}{2} e^{i\Omega t}, \\ C_4 &= \frac{(\cos\theta + \sin\theta)g\sqrt{n+1}(e^{iat} - e^{ibt})}{\Delta},\end{aligned}\quad (7)$$

式中,

$$\begin{aligned}a &= \frac{-\Omega - \Delta}{2}, \\ b &= \frac{-\Omega + \Delta}{2}, \\ \Delta &= \sqrt{8g^2(1+2n) + \Omega^2}.\end{aligned}$$

### 3. 数值计算与理论分析

一个两子系统的纯量子态, 它的纠缠度等于任一子系统约化密度矩阵的 Von Neumann 熵, 而对于两个子系统构成的复合系统的混合态, 我们用 Peres 提出的用部分转置矩阵的负本征值判断纠缠的方法, 即对于用密度矩阵  $\rho$  表示的两子系统系统中, 纠缠可以用部分转置矩阵的负本征值<sup>[8]</sup>来定义,

$$E = -2 \sum_i \mu_i^-, \quad (8)$$

式中  $\mu_i^-$  是部分转置矩阵  $\rho$  的负本征值. 当  $E = 0$ , 两个子系统是分离的<sup>[18]</sup>; 当  $E = 1$ , 两个子系统处于最大纠缠; 当  $0 < E < 1$ , 两子系统是纠缠的.

对(5)式中光场求迹得到两原子的约化密度矩阵为

$$\begin{aligned}\rho_{AB}(t) &= |C_1|^2 |e_A\rangle\langle e_A\rangle |e_B\rangle\langle e_B\rangle \\ &+ |C_2|^2 |e_A\rangle\langle g_B\rangle |e_A\rangle\langle g_B\rangle \\ &+ |C_3|^2 |g_A\rangle\langle e_B\rangle |g_A\rangle\langle e_B\rangle \\ &+ |C_4|^2 |g_A\rangle\langle g_B\rangle |g_A\rangle\langle g_B\rangle \\ &+ C_2 C_3^* |e_A\rangle\langle g_B\rangle |g_A\rangle\langle e_B\rangle \\ &+ C_3 C_2^* |g_A\rangle\langle e_B\rangle |e_A\rangle\langle g_B\rangle.\end{aligned}\quad (9)$$

对(9)式中原子  $B$  做转置可以求出部分转置矩阵  $\rho_{AB}^T$  的负本征值, 再利用(8)式计算出两原子纠缠量  $E_{AB}$  的表达式,

$$\begin{aligned}E_{AB} &= - \left( |C_2|^2 + |C_4|^2 \right. \\ &\left. - \sqrt{|C_1|^4 + 4C_2 C_3^* C_3 C_2^* - 2|C_1|^2 |C_4|^2 + |C_4|^4} \right).\end{aligned}\quad (10)$$

然后对(10)式作数值计算, 可得两原子纠缠量  $E_{AB}$  随时间  $t$  的演化规律如图 1—图 3 所示.

比较图 1、图 2 和图 3 可以看出两原子纠缠量呈现出不同的演化特性.

#### 3.1. 两原子的纠缠量随初始两原子所处状态的变化

图 1 描述的是改变初始原子所处状态后, 腔中两原子纠缠随时间的演化规律.

当  $\theta = 0, \frac{4\pi}{8}$  时, 两原子初始处于分离态, 当原子进入腔中以后两原子的纠缠出现周期性变化(曲线  $a$  和曲线  $e$ ), 纠缠度先增大后减小, 减小到某个值后继续增大, 然后再减小直到完全分离, 但是不能达

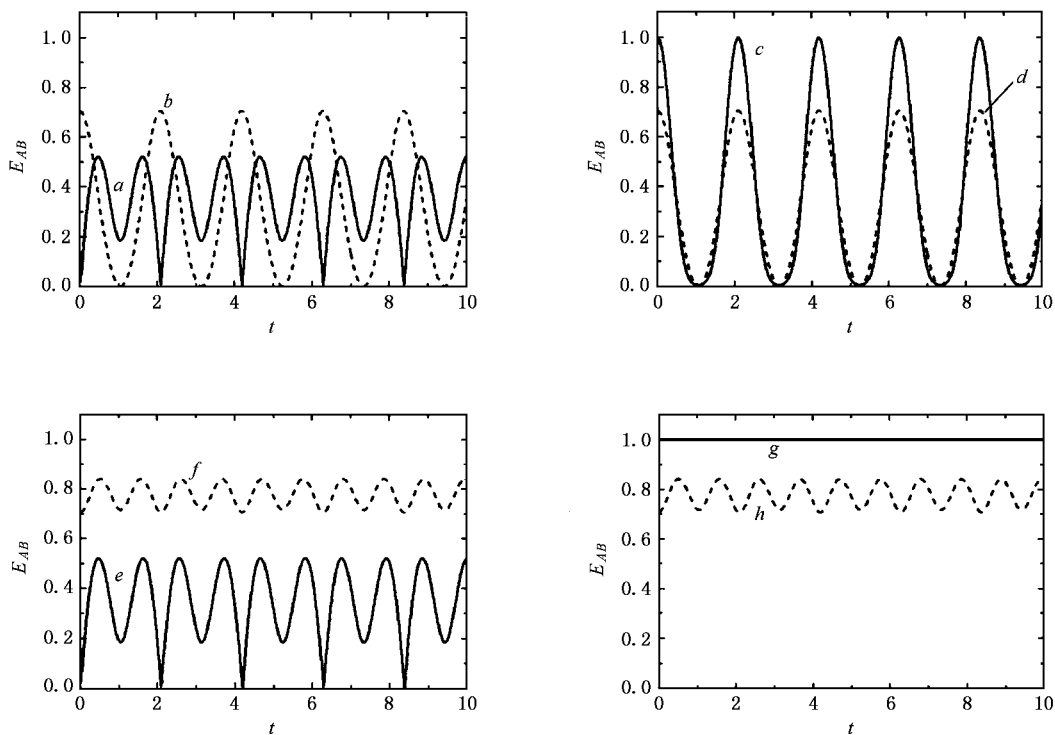


图1 当  $g=1, \Omega=1, n=0$  时两原子纠缠量随时间的演化 曲线  $a: \vartheta=0$  曲线  $b: \vartheta=\frac{\pi}{8}$  曲线  $c: \vartheta=\frac{2\pi}{8}$  曲线  $d: \vartheta=\frac{3\pi}{8}$ , 曲线  $e: \vartheta=\frac{4\pi}{8}$  曲线  $f: \vartheta=\frac{5\pi}{8}$  曲线  $g: \vartheta=\frac{6\pi}{8}$  曲线  $h: \vartheta=\frac{7\pi}{8}$

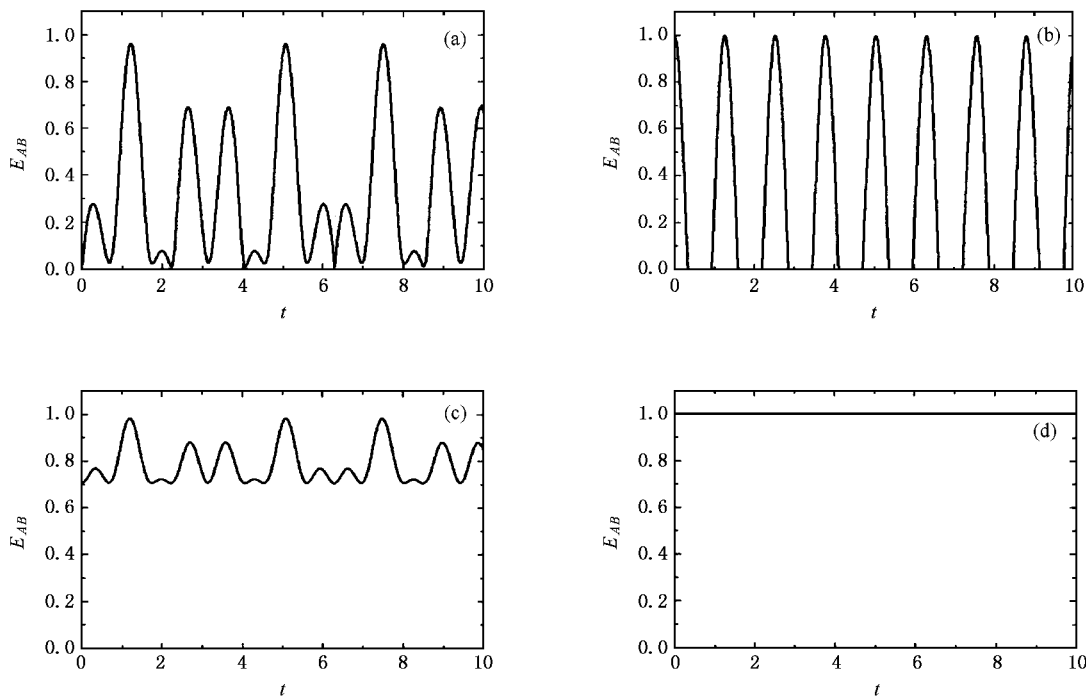


图2 当  $g=1, \Omega=1, n=1$  时两原子纠缠量随时间的演化 (a)  $\vartheta=0$ , (b)  $\vartheta=\frac{\pi}{8}$ , (c)  $\vartheta=\frac{5\pi}{8}$ , (d)  $\vartheta=\frac{6\pi}{8}$

到最大纠缠. 这是由于我们考虑的腔中光场初始处

于真空态, 体系演化为三体纠缠态, 两原子不可能得

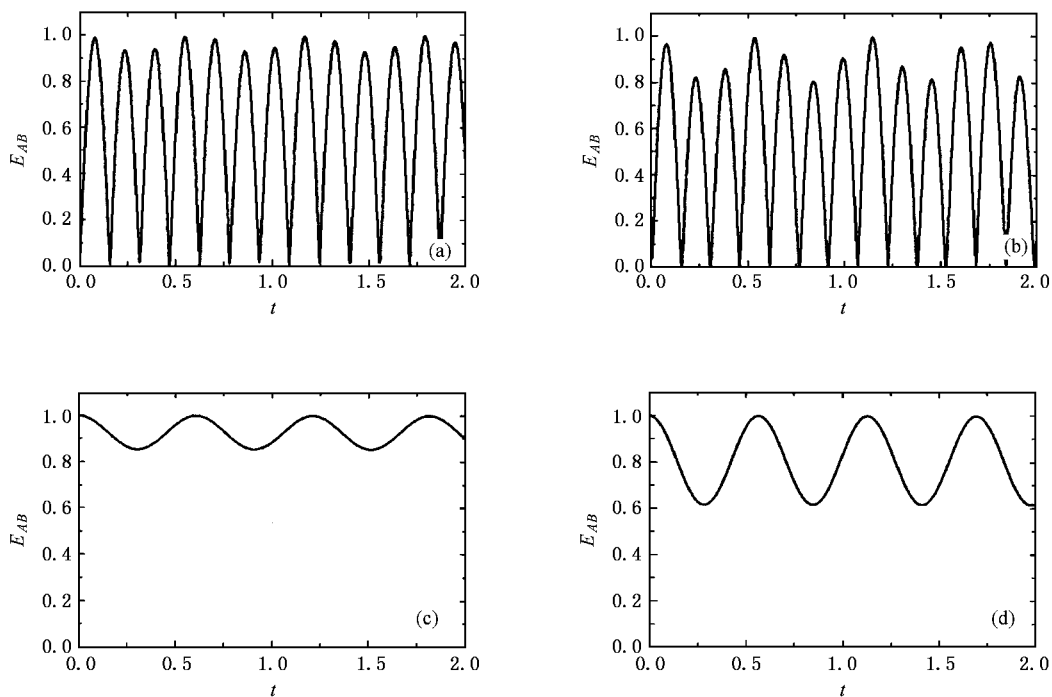


图 3 当  $g = 1, \Omega = 10$  时两原子纠缠量随时间的演化 (a)  $\theta = 0, m = 0$  (b)  $\theta = 0, m = 1$  (c)  $\theta = \frac{2\pi}{8}, m = 0$  (d)  $\theta = \frac{2\pi}{8}, m = 1$

到最大纠缠.另外,由于考虑一个处于基态一个处于激发态的两个原子并且与场耦合系数相同,因此会出现相同的周期性演化特性.

当  $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$  时,两原子初始处于非最大纠缠态,原子与腔作用以后,纠缠也出现周期性变化(曲线 b、曲线 d、曲线 f 和曲线 h),初始两原子的纠缠是相同的,但是进入腔以后却发生了很大的变化,曲线 b 和曲线 d 中原子纠缠度一直减小到零,达到退纠缠的状态,而曲线 f 和曲线 h 却相反,两原子纠缠反而增大,并且纠缠度不会低于两原子初始的纠缠度.当  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时,  $\cos\theta < 0, \sin\theta > 0$ ,对系数  $C_4$  有很大的影响,从而影响两原子都处于基态的概率,  $\cos\theta$  和  $\sin\theta$  异号时两原子都处于基态的概率很小,结果会出现上述的现象.

当  $\theta = \frac{2\pi}{8}, \frac{6\pi}{8}$  时,两原子初始处于最大纠缠态,演化特性与不是最大纠缠的类似.但是发现当  $\theta = \frac{6\pi}{8}$  时,两原子始终处于最大纠缠态(曲线 g).这是由于此时测得两原子处于基态的概率是零,而处于  $|e_A, g_B\rangle$  和  $|g_A, e_B\rangle$  的概率始终相同,从而两原子处于最大纠缠态,相当于原子与场不发生相互作用,原

子处于原来的状态.

### 3.2. 两原子纠缠量与光场所处的状态有关

图 2 描述的是改变初始光场所处状态后,腔中两原子纠缠随时间的演化规律.我们可以看到纠缠度也出现周期性的演化,但是演化的周期变短,变化的幅度要比真空场时的大.对图 2 与图 1 中相对应的部分进行比较发现:当原子初始处于分离态(如图 1 曲线 a 和图 2(a)),腔中有光子数时,两原子的纠缠比真空中的大,有时可以接近于最大纠缠.当原子初始处于纠缠态(如图 1 曲线 b 和图 2(b)),腔中光子数的存在会使两原子纠缠演化周期变短,并且较长时间处于退纠缠状态.当原子初始处于纠缠态(如图 1 曲线 f 和图 2(c)),腔中光子数的存在使两原子一直处于纠缠态.这是由于光场数会影响(7)式中各个系数.当初始光场为真空态时  $C_1 = 0$ ,体系演化为三体纠缠,当腔中有光子数时各个系数不为零,随着时间的演化,有的系数很小可以忽略,从而得到退纠缠状态或最大纠缠态,变化的幅度要比真空场时大.

### 3.3. 两原子纠缠量受原子间偶极-偶极相互作用强度的影响

图 3 描述的是改变原子间偶极-偶极相互作用

强度后,腔中两原子纠缠随时间的演化规律.随着偶极-偶极相互作用的增大,纠缠度演化的周期明显变短,初始分离的两原子演化的幅度变大,有时可以接近于最大纠缠(如图 3(a)).初始纠缠的两原子在偶极-偶极相互作用较小时可以演化为退纠缠的状态,偶极-偶极相互作用变大以后使原子间强烈纠缠,两原子却一直是纠缠的(如图 3(c))(d)).这是由于原子之间偶极-偶极相互作用增大,会减弱原子与场之间的作用,从而使两原子一直处于纠缠的状态.可见原子间的偶极相互作用对两原子纠缠的影响是一种非线性效应.

## 4. 结 论

本文利用部分转置矩阵负本征值计算纠缠的方法,求出了两个纠缠的两能级原子与单模粒子数场

进行相互作用系统中两原子的纠缠随时间的演化.通过对纠缠原子初始纠缠度、光场的状态、原子之间偶极-偶极相互作用对两原子之间纠缠的影响进行了研究,结果表明:两原子之间的纠缠呈现周期性变化,当初始为真空场且  $\theta < \frac{\pi}{2}$  时,两原子的纠缠会减小到零,达到消纠缠.当  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时,两原子的纠缠会增大并且不低于两原子初始的纠缠度.当  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  时,两原子永远处于最大纠缠态.腔中光子数的存在会使初始纠缠的两原子较长时间处于退纠缠状态或使两原子一直处于纠缠态.同时原子之间偶极-偶极相互作用的增大会减弱原子与场之间的作用,使两原子一直处于纠缠态.总之,本文的研究对于纠缠态的制备、量子远程通信等具有一定的指导意义.

- 
- [ 1 ] Bennett C H , Brassard G , Crépeau C *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [ 2 ] Zhang Q , Zhang E Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1684 ( in Chinese )  
[ 张 权、张尔扬 2002 物理学报 **51** 1684 ]
- [ 3 ] Ye L , Guo G C 2002 *Chin. Phys.* **11** 996
- [ 4 ] Grover L K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 325
- [ 5 ] Wang C Z , Fang M F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1989 ( in Chinese )  
[ 王成志、方卯发 2002 物理学报 **51** 1989 ]
- [ 6 ] Knoll L 1995 *Phys. Rev. A* **51** 1622
- [ 7 ] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [ 8 ] Lee J Y , Kim M S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4236
- [ 9 ] Zheng S B , Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
- [ 10 ] Huang Y X , Zhan M S 2004 *Chin. Phys.* **13** 45
- [ 11 ] Bose S , Fuentes-Guridi I , Knight P L *et al* 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 050401
- [ 12 ] Rendell R W , Rajaopala A K 2003 *Phys. Rev. A* **67** 062110
- [ 13 ] Kim M S , Lee J Y , Ahn D *et al* 2002 *Phys. Rev. A* **65** 040101
- [ 14 ] Cai J F , Zou J 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1584
- [ 15 ] Xiang S H , Yang X , Song K H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1289 ( in Chinese ) [ 向少华、杨 雄、宋克慧 2004 物理学报 **53** 1289 ]
- [ 16 ] Boukobza E , Tannor D J 2005 *Phys. Rev. A* **71** 063821
- [ 17 ] Song J , Cao Z L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 696 ( in Chinese ) [ 宋 军、曹卓良 2005 物理学报 **54** 696 ]
- [ 18 ] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413

# The entanglement character of two entangled atoms in Tavis-Cummings model<sup>\*</sup>

Shan Chuan-Jia Xia Yun-Jie

( *College of Physics and Engineering, Qufu Normal University, Qufu 273165, China* )

( Received 22 August 2005 ; revised manuscript received 7 November 2005 )

## Abstract

We investigate the entanglement time evolution of two entangled two-level atoms that interact resonantly with a single-mode field in the Fock state. The results show that the two-atom entanglement state appears with periodicity. The influence of the two-atom initial state, the dipole-dipole coupling intensity between two atoms, and the field in the Fock state on the entanglement degree of two atoms are revealed. Meanwhile the two-atom quantum state will forever stay in the maximum entangled state when the initial state is proper.

**Keywords** : quantum entanglement, dipole-dipole coupling intensity, negative eigenvalues of the partial transposition, entangled atoms

**PACC** : 0365, 4250

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10534030 ).